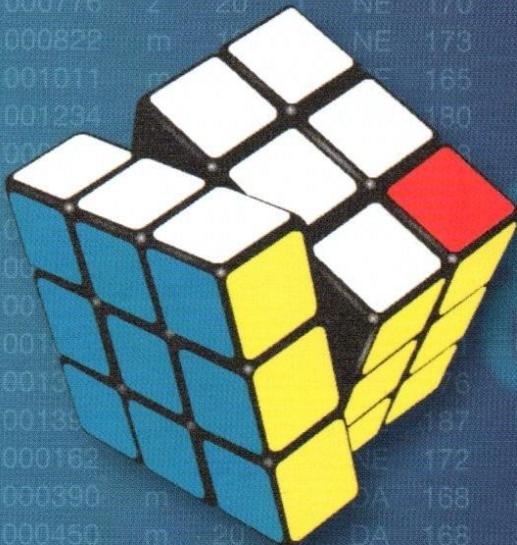


# PRIRUČNIK ZA KVANTITATIVNE METODE



Željko Pedišić

Dražan Dizdar



Željko Pedišić

Dražan Dizdar

---

# Priručnik za kvantitativne metode

Zagreb, 2010.

## Predgovor

Ovaj nastavni priručnik namijenjen je prvenstveno studentima Kineziološkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu za pripremu ispita iz predmeta *Kvantitativne metode*. Nastavnim planom i programom Sveučilišnog studija Kineziološkog fakulteta predviđeno je da se predmet Kvantitativne metode sluša u fondu od 60 sati predavanja i 40 sati (20 blok sati) seminara te polaže pismeno i usmeno. Osnovna namjena ovog priručnika je da studentima olakša praćenje seminarske nastave te savladavanje nastavnog gradiva potrebnog za uspješno polaganje pismenog dijela ispita, što je i odredilo njegov sadržaj i opseg. Stoga se priručnik sastoji od 20 poglavlja koja se sustavno obrađuju u okviru seminarske nastave. Na uvodnoj stranici svakog poglavlja prikazan je sadržaj, odnosno popis pojmovova i postupaka koje je potrebno usvojiti za uspješno polaganje odgovarajuće nastavne cjeline. U nastavku su sažeto i pregledno predstavljene teorijske osnove pojedinih statističkih metoda s primjerima njihove primjene. Pored toga, u okviru svakog poglavlja nalaze se zadaci za vježbu te su opisani postupci izračunavanja zadanih statističkih i kineziometrijskih parametara putem računalnih programa *Microsoft Excel* i *STATISTICA*. U nastavku poglavlja navedena je literatura potrebna za potpunije razumijevanje prethodno obrađene cjeline. Na kraju svakog poglavlja nalaze se pitanja i zadaci s ponuđenim odgovorima, a koja su svojom formom i sadržajem jednaka pitanjima i zadacima na pismenom dijelu ispita. Datoteke korištene u primjerima i zadacima možete pronaći na internet adresi [http://www.kif.hr/\\_download/repository/Datoteke\\_za\\_vjezbu.zip](http://www.kif.hr/_download/repository/Datoteke_za_vjezbu.zip).

Iskoristit ćemo ovu priliku i za izraze iskrene zahvalnosti prof. dr. sc. Nataši Viskić-Štalec i mr. sc. Darku Katoviću za dugogodišnju suradnju na predmetu Kvantitativne metode te Lidiji Dizdar, prof. za detaljnu lekturu cjelokupnog sadržaja ovog priručnika.

Konačno, želimo zahvaliti svim studentima Kineziološkog fakulteta koji nas svojim marljivim učenjem i dobrom raspoloženjem motiviraju da stvaramo i unapređujemo nastavne materijale, kao što je i ovaj priručnik. Nadamo se da će vam priručnik pomoći da lakše i bolje savladate program predmeta Kvantitativne metode te da usvojena znanja prenesete tamo gdje su najpotrebnija – u vaš budući rad u kineziološkoj praksi.

Zagreb, zima 2010.

Autori

Predgovor.....	3
1. Osnovni statistički pojmovi .....	7
2. Inicijalni statistički postupci .....	17
3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije .....	29
4. Transformacije podataka .....	43
5. Procjena aritmetičke sredine populacije .....	57
6. Studentov t - test .....	67
7. Korelacija.....	79
8. Deskriptivna analiza promjena.....	93
9. Matrična algebra I. .....	109
10. Matrična algebra II. ....	123
11. Regresijska analiza .....	135
12. Faktorska analiza .....	151
13. Kanonička korelacijska analiza .....	165
14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza .....	175
15. Uvod u kinezimetriju .....	189
16. Metrijske karakteristike I. .....	203
17. Metrijske karakteristike II. .....	217
18. Neparametrijske metode I. .....	231
19. Neparametrijske metode II. .....	245
20. Neparametrijske metode III. .....	263
Literatura.....	277

---

# 1

## Osnovni statistički pojmovi

- 2
  - 3
  - 4
  - 5
  - 6
  - 7
  - 8
  - 9
  - 10
  - 11
  - 12
  - 13
  - 14
  - 15
  - 16
  - 17
  - 18
  - 19
  - 20
-

# 1. Osnovni statistički pojmovi

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

- statistika
- podatak
- entitet
- varijabla
- vrste varijabli
- populacija entiteta
- uзорак entiteta
- vrste uзорaka entiteta
- populacija varijabli
- uзорak varijabli
- matrica podataka

### MICROSOFT EXCEL

#### Pokretanje programa

##### Unos podataka

- kreiranje matrice podataka
- oznake polja
- odabir polja pointerom ili upisom oznake polja u traku *namebox*
- upisivanje podataka
- korištenje hvataljke
- brisanje sadržaja polja

##### Kopiranje sadržaja

- Copy-Paste
- Cut-Paste
- Copy/Cut-Insert Copied Cells

##### Formatiranje polja

- opcije *number-percentage-text*
- određivanje broja prikazanih decimala
- poravnavanje sadržaja
- sjednjavanje polja
- promjena obilježja fonta
- promjena obilježja rubova polja
- promjena obilježja pozadine polja

### Formule

- unos formula
- kopiranje formula
- korištenje relativnih, apsolutnih i kombiniranih oznaka polja

#### Upravljanje stupcima i retcima

- umetanje stupca/retka
- brisanje stupca/retka
- brisanje sadržaja stupca/retka
- kreiranje statičnog stupca ili retka

#### Upravljanje listovima

##### Pohranjivanje datoteke i otvaranje prethodno pohranjene datoteke

### STATISTICA

#### Pokretanje programa

##### Formiranje matrice podataka

- kreiranje matrice podataka
- unos i promjena naziva entiteta
- unos i promjena naziva varijabli
- upisivanje podataka
- korištenje hvataljke
- brisanje sadržaja polja
- kopiranje sadržaja

##### Formatiranje varijabli

- opcije *number-percentage*
- određivanje broja prikazanih decimala
- unos opisa varijable

#### Upravljanje stupcima i retcima

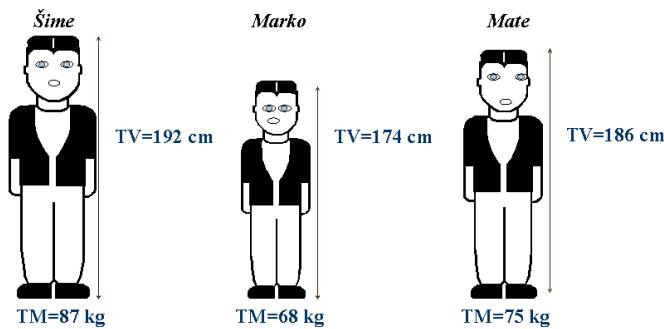
#### Spreadsheet formule

##### Pohranjivanje datoteke i otvaranje prethodno pohranjene datoteke

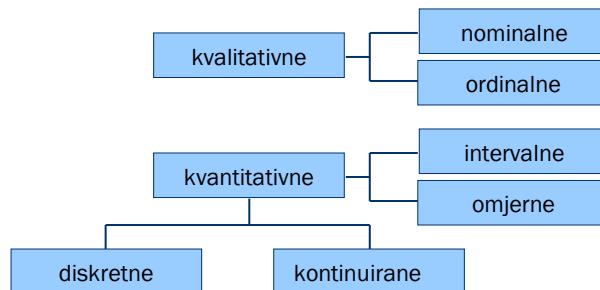
# 1. Osnovni statistički pojmovi

## Osnovni statistički pojmovi

- ▶ **Statistika** je skup metoda za uređivanje, analiziranje i grafičko prikazivanje podataka.
- ▶ **Podatak** je kvantitativna ili kvalitativna vrijednost kojom je opisano određeno obilježje (svojstvo) nekog entiteta.
- ▶ **Entitet** je jedinka nekog skupa osoba, objekata, stvari, pojava, procesa i sl. koja je opisana određenim obilježjima ili varijablama.
- ▶ **Varijable** je svojstvo, obilježje, osobina, sposobnost, znanje, itd. po kojem se entiteti međusobno razlikuju.



- ▶ Varijable je moguće podijeliti na sljedeći način:



- ▶ **Populacija entiteta** ( $P$ ) je skup svih entiteta čija su obilježja predmet statističke analize (naziva se također i *statistički skup* odnosno *univerzum entiteta*). Populacija entiteta može biti beskonačan

$$P = \{e_i; i=1,2,\dots\}$$

ili konačan

$$P = \{e_i; i=1,2,\dots, N\}$$

skup entiteta ( $e_i$ ).

# 1. Osnovni statistički pojmovi

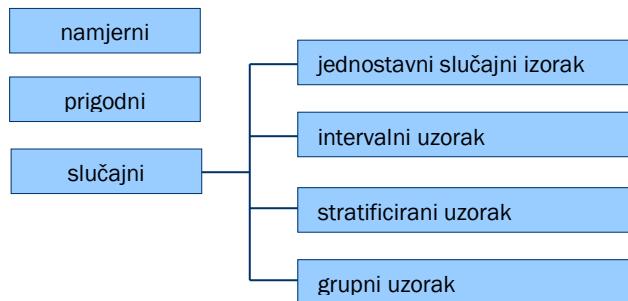
- ▶ **Uzorak entiteta ( $E$ )** je podskup entiteta izabran iz populacije u skladu s nekim pravilom, a s ciljem da je što bolje reprezentira.

$$E = \{e_i; i=1, 2, \dots, n\}, \quad n < N$$

gdje je

- $n$  - broj entiteta u uzorku (efektiv ili opseg uzorka)
- $N$  - broj entiteta u populaciji.

- ▶ Uzorci entiteta mogu biti:



- ▶ **Populacija ili univerzum varijabli**  $W = \{w_j; j=1, 2, \dots\}$  predstavlja skup svih mogućih varijabli kojima se može opisati stanje nekog entiteta.
- ▶ **Uzorak varijabli** je podskup varijabli  $V = \{v_j; j=1, 2, \dots, m\}$  izabran na temelju neke teorije iz populacije varijabli.
- ▶ **Matrica podataka** je skup podataka dobivenih opisom skupa entiteta  $E = \{e_i; i=1, \dots, n\}$  nekim skupom varijabli  $V = \{v_j; j=1, \dots, m\}$  smještenih tako da svaki redak sadrži podatke kojima je pojedini entitet  $e_i$  opisan s  $m$  varijabli, dok svaki stupac sadrži podatke  $n$  entiteta u pojedinoj varijabli  $v_j$ .

**Tablica:** Primjer matrice podataka

	SPOL	TV	TM
Šime	M	192	87
Marko	M	174	68
Mate	M	186	75

# 1. Osnovni statistički pojmovi

## Microsoft Excel

### Postupci:

- ▶ **Pokretanje programa:** start → All Programs → Microsoft Office → Microsoft Excel
- ▶ **Kreiranje matrice podataka:** Nova matrica se kreira odabirom opcije New... padajućeg izbornika File.
- ▶ **Odabir polja u matrici:** Polje je moguće odabrati lijevom tipkom miša ili upisom oznake polja (npr. A22) u traku namebox što je potrebno potvrditi tipkom Enter.
- ▶ **Unos podataka:** Podaci se unose putem tipkovnice pri čemu je moguće iskoristiti opcije Copy i Paste ili hvataljku ( ) za kopiranje sadržaja označenog polja u susjedna polja.
- ▶ **Formatiranje polja:** Dijaloški okvir za formatiranje polja pokreće se odabirom opcije Cells... padajućeg izbornika Format. Može se odabrati tip podataka (Number), vršiti poravnavanje (Alignment) te izvršiti odabir obilježja fonta (Font), rubova polja (Borders) i pozadine polja (Patterns).
- ▶ **Unos formula:** Formule za izračunavanje vrijednosti označenog polja se unose u traku fx (npr. =C1/B1). U svrhu kopiranja formula iz polja u polje (opcije Copy i Paste) moguće je koristiti relativne (npr. A22), apsolutne (npr. \$A\$2) ili kombinirane adrese (npr. \$A2), zavisno o potrebi.
- ▶ **Upravljanje listovima:** Kontekstni izbornik za upravljanje listovima pokreće se desnim klikom miša na ime lista. Moguće je umetnuti novi list (Insert...), izbrisati ga (Delete), preimenovati (Rename), premjestiti ili kopirati (Move or Copy...) te označiti bojom (Tab Color...).

### Zadaci:

- ▶ Kreirajte novu matricu! Odaberite polje u trećem stupcu i sedamdeset prvom retku!
- ▶ U kreiranu matricu unesite sljedeće podatke, a obilježja matrice podesite na prikazan način:

	SPOL	TV	TM
Šime	M	192	87
Marko	M	174	68
Mate	M	186	75

- ▶ Izračunajte omjer visine i mase tijela za sve ispitanike! Iskoristite traku fx i kopiranje formule!
- ▶ Izračunajte razliku Šimine visine i visina ostalih ispitanika! Iskoristite traku fx i kopiranje formule!
- ▶ List s prethodno kreiranom matricom nazovite «KM», označite ga žutom bojom i iskopirajte! Preostala dva lista izbrišite!

# 1. Osnovni statistički pojmovi



## STATISTICA

### Postupci:

- ▶ **Pokretanje programa:** start → All Programs → STATISTICA → STATISTICA
- ▶ **Kreiranje matrice podataka:** Nova matrica se kreira odabirom opcije New... padajućeg izbornika File. U dijaloškom okviru "Create New Document" potrebno je odrediti broj stupaca, tj. varijabli (Number of variables) i broj redaka, tj. entiteta (Number of cases).
- ▶ **Unos podataka:** Podaci se unose putem tipkovnice pri čemu je moguće iskoristiti opcije Copy i Paste ili hvataljku (↔) za kopiranje sadržaja označenog polja u susjedna polja.
- ▶ **Unos imena entiteta:** Unos imena entiteta pokreće se dvostrukim klikom lijeve tipke miša na redni broj entiteta, tj. retka u matrici.
- ▶ **Unos imena varijabli:** Dijaloški okvir za formatiranje varijabli pokreće se dvostrukim klikom lijeve tipke miša na redni broj varijable, tj. stupca u matrici. Moguće je unijeti ime varijable (Name), odrediti format prikaza (npr. broj ili postotak) (Display format), broj decimalnih mesta (Decimal places) te opis varijable (Long name).
- ▶ **Upravljanje varijablama i entitetima:** Odabirom podizbornika Variables padajućeg izbornika Data moguće je umetnuti (Add...), premjestiti (Move...), kopirati (Copy...) ili izbrisati (Delete...) varijable. Istovjetne opcije za entitete nalaze se u podizborniku Cases.
- ▶ **Unos Spreadsheet formule:** Unos Spreadsheet formule vrši se u traci Long name dijaloškog okvira za formatiranje varijabli.

### Zadaci:

- ▶ Kreirajte novu matricu s tri retka i tri stupca!
- ▶ U prethodno kreiranu matricu unesite sljedeće podatke:

	var1	var2	var3
1	m	192	87
2	m	174	68
3	m	186	75

- ▶ Unesite imena entiteta (1. Šime, 2. Marko, 3. Mate) i varijabli (1. Spol, 2. TV, 3. TM)!
- ▶ Umetnite novu varijablu i nazovite je BMI te je izračunajte putem Spreadsheet formula: =TM/(TV/100)\*\*2 !

# 1. Osnovni statistički pojmovi

## Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006.). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 39-49.
- ▶ Petz, B. (2002.). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 9-19, 111, 279-286, 297-298.
- ▶ Mejovšek, M. (2003.). *Uvod u metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 36-41, 97-101.
- ▶ Langer, M. (2004.). *Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows*. Zagreb: Miš, str. 1-74, 105-129.

# 1. Osnovni statistički pojmovi

## Pitanja i zadaci

1. Uzorak entiteta je...

- a) ... skup svih entiteta neke populacije.
- b) ... podskup populacije entiteta.
- c) ... skup različitih populacija entiteta.
- d) ... podskup jednog entiteta iz populacije.

2. U matrici programa Microsoft Excel polje s određenom oznakom moguće je odabratи...

- a) ... upisom oznake polja u prvo polje matrice.
- b) ... upisom oznake polja u traku *fx*.
- c) ... upisom oznake polja u traku *Find what* dijaloškog okvira *Find and Replace*.
- d) ... upisom oznake polja u traku *namebox*.

3. U programu Microsoft Excel hvataljka služi za...

- a) ... brisanje sadržaja polja.
- b) ... kopiranje sadržaja polja.
- c) ... pretraživanje sadržaja polja.
- d) ... hvatanje sadržaja polja

4. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Podatak može biti biće ili predmet.
- b) Podatak može biti entitet ili varijabla.
- c) Podatak može biti broj ili oznaka.
- d) Podatak može biti događaj ili pojava.

5. Koji od navedenih pojmljiva ne predstavlja vrstu uzorka entiteta?

- a) Slučajni uzorak
- b) Intervalni uzorak
- c) Diskretni uzorak
- d) Grupni uzorak

6. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Kineziološka statistika sadrži metode za grafičko prikazivanje podataka.
- b) Kineziološka statistika sadrži metode za analiziranje podataka.
- c) Kineziološka statistika sadrži metode za tiskanje podataka.
- d) Kineziološka statistika sadrži metode za uređivanje podataka.

7. Koji je od navedenih ispravan primjer apsolutne adrese, tj. oznake polja u programu Microsoft Excel?

- a) #A#5
- b) #5#A
- c) \$5\$A
- d) \$A\$5

8. U matrici podataka programa Statistica varijable je moguće...

- a) ... dodavati, upravljati, rotirati i prikriti.
- b) ... dodavati, inicirati, decimalizirati i premještati.
- c) ... dodavati, premještati, kopirati i brisati.
- d) Varijablama nije moguće upravljati ni na jedan od načina ponuđenih u odgovorima.

9. Što od navedenog može biti entitet?

- a) Nogometna utakmica
- b) Broj kaznenih udaraca
- c) 5:2
- d) Ništa od navedenog

10. Koji je od navedenih primjer ispravno unesene formule u matrici programa Microsoft Excel?

- a) v2/BML\*100
- b) =SDM/V2/V7\*0,5
- c) =\$H\$1/b1\*C\$16\*15
- d) b1\*c2\*21/h4

11. U matrici programa Microsoft Excel polje u 3. stupcu i 4. retku ima oznaku...

- a) ... 4C
- b) ... D3
- c) ... 3D
- d) ... C4

12. U programu Statistica pri kreiranju nove matrice podataka s 3 stupca i 5 redaka u polje *number of cases* potrebno je unijeti...

- a) ... 3
- b) ... 5
- c) ... 15
- d) ... 3\*5

# 1. Osnovni statistički pojmovi

## Pitanja i zadaci

13. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Intervalne varijable su kvantitativne.
- b) Omjerne varijable kvantitativne.
- c) Nominalne varijable su kvalitativne.
- d) Ordinalne varijable su kvantitativne.

14. Varijabla tjelesna masa je...

- a) ... diskretna i omjerna.
- b) ... kontinuirana i intervalna.
- c) ... diskretna i intervalna.
- d) ... kontinuirana i omjerna.

15. Koji je od navedenih primjer ispravno unesene Spreadsheet formule u programu Statistica?

- a)  $(SDM+v2);v7*0,5$
- b)  $=(SDM+V2)/V7*0,5$
- c)  $=SDM+v2:v7*0,5$
- d)  $(SDM+v2)/v27*0,5$

16. Podatak je...

- a) ... jedinka nekog skupa događaja koji su opisani određenim obilježjima.
- b) ... jedinka nekog skupa pojava koje su opisane određenim obilježjima.
- c) ... numerička ili nenumerička vrijednost kojom je opisano određeno obilježje ispitanika.
- d) ... tablica koja sadrži vrijednosti kojima je opisano određeno obilježje ispitanika.

17. Uzorak varijabli je...

- a) ... skup svih varijabli iz neke populacije.
- b) ... skup različitih populacija varijabli.
- c) ... podskup populacije varijabli.
- d) ... podskup jedne varijable iz populacije.

18. U programu Microsoft Excel promjena boje pozadine označenog dijela matrice može se izvršiti putem dijaloškog okvira...

- a) ... *Format Cells*.
- b) ... *Customize*.
- c) ... *Tab Color*.
- d) ... *Background Color*.

19. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) U retku matrice podataka nalaze se rezultati više entiteta.
- b) U stupcu matrice podataka nalaze se rezultati jednog entiteta.
- c) U retku matrice podataka nalaze se rezultati svih entiteta.
- d) U retku matrice podataka nalaze se rezultati jednog entiteta.

20. Što je od navedenog nominalna varijabla?

- a) Čovjek
- b) Spol
- c) Tjelesna visina izražena u centimetrima
- d) Nogometna utakmica

21. Tjelesna temperatura na Celzijevoj ljestvici je...

- a) ... ordinalna varijabla.
- b) ... omjerna varijabla.
- c) ... nominalna varijabla.
- d) ... intervalna varijabla.

22. U matrici podataka programa Statistica prilikom unosa imena varijabli nije moguće...

- a) ... koristiti specijalne znakove u kombinaciji s brojevima i razmacima.
- b) ... umetnuti sliku kao simbol varijable.
- c) ... koristiti numerički dio tipkovnice.
- d) ... započeti ime brojem.

23. U programu Microsoft Excel novi radni list može se kreirati pomoću opcije...

- a) ... *Insert*, kontekstnog izbornika za radne liste.
- b) ... *Cells*, padajućeg izbornika *Insert*.
- c) ... *List*, padajućeg izbornika *Data*.
- d) ... *Insert*, kontekstnog izbornika za označeno polje matrice podataka.

24. Koja je od navedenih varijabli diskretna?

- a) Maksimalan broj zgibova nathvatom
- b) Tjelesna visina
- c) Skok udalj s mjesta
- d) Tjelesna temperatura na Celzijevoj ljestvici

# 1. Osnovni statistički pojmovi

## Pitanja i zadaci

25. U programu Microsoft Excel promjena broja prikazanih decimalnih mesta označenog dijela matrice može se izvršiti putem dijaloškog okvira...

- a) ... *Customize*.
- b) ... *Decimal*.
- c) ... *Number format*.
- d) ... *Format Cells*.

26. Što od navedenog može biti varijabla?

- a) Broj kaznenih udaraca
- b) Nogometna utakmica
- c) Nogometna lopta
- d) Ništa od navedenog

27. Populacija entiteta je...

- a) ... skup entiteta nužno jednakih prema svim obilježjima.
- b) ... skup svih entiteta sa zajedničkim općim obilježjima.
- c) ... skup svih jedinki uzorka entiteta.
- d) ... skup svih jedinki uzorka varijabli.

28. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Entitet može biti osoba, biće, predmet, događaj i pojava.
- b) Niz entiteta čini jednu varijablu.
- c) Entiteti se razlikuju prema varijablama.
- d) Entitet je jedinka populacije entiteta.

29. Program Statistica omogućava unošenje opisa varijable...

- a) ... u polje *namebox* dijaloškog okvira za formatiranje varijabli.
- b) ... u polje *long name* dijaloškog okvira za formatiranje varijabli.
- c) ... u polje *cases* dijaloškog okvira za formatiranje varijabli.
- d) ... u polje *fx* dijaloškog okvira za formatiranje varijabli.

30. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Varijabla je niz podataka.
- b) Varijabla je obilježje entiteta.
- c) Varijabla je jedinka populacije varijabli.
- d) Varijabla je skup entiteta.

1

# 2

## *Inicijalni statistički postupci*

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

## 2. Inicijalni statistički postupci

### Sadržaj poglavlja

#### TEORIJSKE OSNOVE

##### *Provjera ispravnosti podataka*

##### *Kodiranje podataka*

##### *Grupiranje kvalitativnih podataka*

- frekvencija
- relativna frekvencija
- jednodimenzionalno grupiranje
- višedimenzionalno grupiranje
- grafikon stupaca
- strukturni krug

##### *Sortiranje entiteta*

##### *Grupiranje kvantitativnih podataka*

- interval razreda
- kumulativna frekvencija
- relativna kumulativna frekvencija
- histogram frekvencija
- poligon frekvencija
- kumulativni poligon frekvencija
- višestruki poligon frekvencija

#### MICROSOFT EXCEL

##### *Provjera ispravnosti podataka*

- provjera za vrijeme unosa podataka

##### *Pretraživanje i izmjena podataka*

##### *Grupiranje kvalitativnih podataka*

- prebrojavanje podataka funkcijom Countif
- izračunavanje proporcije
- izračunavanje postotka
- grafikon stupaca
- strukturni krug

##### *Sortiranje entiteta*

##### *Grupiranje kvantitativnih podataka*

- linijski grafikon

#### STATISTICA

##### *Provjera ispravnosti podataka*

- provjera nakon unosa podataka

##### *Kodiranje podataka*

##### *Pretraživanje i izmjena podataka*

##### *Grupiranje kvalitativnih podataka*

- jednodimenzionalno grupiranje
- izračunavanje frekvencije
- izračunavanje relativne frekvencije
- grafikon stupaca
- strukturni krug
- višedimenzionalno grupiranje

##### *Sortiranje entiteta*

##### *Grupiranje kvantitativnih podataka*

- jednodimenzionalno grupiranje
- izračunavanje frekvencije
- izračunavanje relativne frekvencije
- izračunavanje kumulativne frekvencije
- izračunavanje relativne kumulativne frekvencije
- histogram frekvencija
- poligon frekvencija

## 2. Inicijalni statistički postupci

### Provjera ispravnosti za vrijeme unosa podataka

- ▶ Da bi se smanjila mogućnost pogreške prilikom unosa podataka preporuča se:
  - Podatke unositi optimalnom brzinom.
  - Pri unosu numeričkih vrijednosti obvezno koristiti numerički dio tipkovnice.
  - Pri unosu nominalnih varijabli obvezno koristiti kodiranje.
  - Po mogućnosti podatke unositi u dvoje pri čemu jedan čita, a drugi unosi podatke i provjerava ispravnost na zaslonu ekrana.
  - Izabrati decimalnu oznaku u skladu s korištenim programom.
  - Koristiti alate za provjeru ispravnosti unosa podataka.

### Provjera ispravnosti nakon unosa podataka

- ▶ Nakon unosa podataka preporuča se:
  - Numeričke podatke provjeriti pregledom minimalne i maksimalne vrijednosti.
  - Nominalne varijable provjeriti pregledom tablica frekvencija.
  - Opcijama za pretraživanje podataka provjeriti ispravnost decimalnih oznaka.
  - Koristiti alate za naknadnu provjeru ispravnosti podataka.

### Kodiranje podataka

- ▶ U svrhu bržeg i točnijeg unosa podatke je moguće kodirati. Kodiranje je pridruživanje skraćene označke ili broja odgovarajućoj kategoriji. Za prepoznavanje kodova potrebno je izraditi kodnu listu.

**Tablice:** Matrica s kodiranim podacima i kodna lista za tumačenje kodova

	SPOL	POZ	OKI	Kratko ime varijable	Dugo ime varijable	Oblici (vrijednosti) varijable	Kod
AV	M	B	4	SPOL	Spol	Muškarci	M
EM	M	B	3			Žene	Z
KV	M	B	4	POZ	Pozicija u igri	Bek	B
MD	M	B	3			Krilo	K
MM	M	K	3			Centar	C
NM	M	K	2			Vrlo slaba kvaliteta	1
NK	M	K	3			Slaba kvaliteta	2
SA	M	K	3	OKI	Ocjena kvalitete igrača	Dobra kvaliteta	3
SS	M	C	2			Vrlo dobra kvaliteta	4
VM	M	C	3			Izvrsna kvaliteta	5

### Grupiranje kvalitativnih podataka

- ▶ **Grupiranje podataka** je statistički postupak razvrstavanja entiteta s istim oblikom obilježja u određen broj disjunktnih podskupova.

## 2. Inicijalni statistički postupci

- ▶ **Frekvencija** je broj entiteta koji imaju isti oblik obilježja, odnosno broj entiteta u određenoj grupi (klasi, kategoriji, razredu).
- ▶ **Relativna frekvencija** je omjer između frekvencije određene kategorije i zbroja frekvencija svih kategorija (ukupan broj entiteta). Relativna frekvencija može se izraziti u postotku ili proporciji, a izračunava se na sljedeći način:

$$p_g = \frac{f_g}{n} \quad \%_g = \frac{f_g}{n} \cdot 100$$

gdje je

- $p_g$  - proporcija grupe  $g$  ( $g = 1, \dots, k$ )
- $f_g$  - frekvencija grupe  $g$
- $\%_g$  - postotak grupe  $g$  ( $g = 1, \dots, k$ )
- $n$  - ukupan broj entiteta, a  $k$  - broj kategorija (grupa).

- ▶ **Jednodimenzionalno grupiranje** je grupiranje entiteta po jednom obilježju (varijabli).

**Primjer:** Praktičnom dijelu ispita iz KM-a pristupilo je 40 studenata; 15 ih je položilo, a 25 nije.

USPJEH NA ISPITU	FREKVENCIJA	%
NISU POLOŽILI	25	62,5
POLOŽILI	15	37,5
UKUPNO	40	100

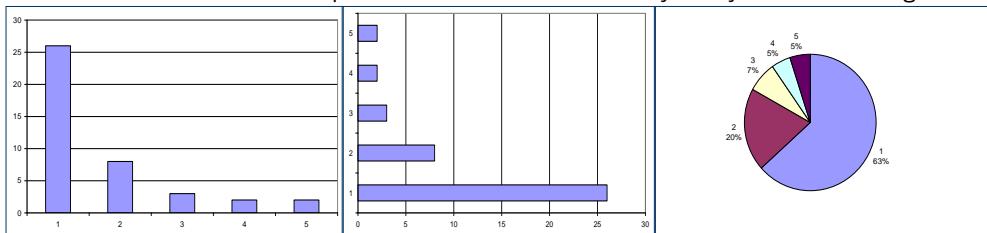
- ▶ **Višedimenzionalno grupiranje** je grupiranje entiteta po više obilježja (varijabli).

**Primjer:** Od 26 studenata koji su pristupili praktičnom dijelu ispita iz KM-a položilo ih je 10, a od 14 studentica položilo ih je 5.

	NISU POLOŽILI	POLOŽILI	UKUPNO
MUŠKARCI	16	10	26
ŽENE	9	5	14
UKUPNO	25	15	40

- ▶ Grupiranje kvalitativnih podataka najčešće se prikazuje pomoću grafikona stupaca (vertikalne ili horizontalne orientacije) i strukturnog kruga.

**Prikaz:** Grafikoni stupaca vertikalne i horizontalne orientacije i strukturni krug



## 2. Inicijalni statistički postupci

### Sortiranje entiteta

- **Sortiranje entiteta** je nizanje entiteta prema redoslijedu zavisnom o rezultatu u varijabli prema kojoj se vrši sortiranje. Entitete je moguće sortirati:
- *uzlazno* - ako se podaci nižu od najmanjeg do najvećeg
  - *silazno* - ako se podaci nižu od najvećeg do najmanjeg

**Primjer:** Broj osobnih pogrešaka (OP) 18 košarkaša (entiteti) na jednoj košarkaškoj utakmici - matrica podataka prije i nakon sortiranja

ENTITETI	OP
ANZU-V	4
BADZ-M	3
BLAS-M	3
ERJA-M	2
GIRI-G	4
KRST-V	1
KRUN-D	3
MALI-M	3
MILA-D	5
MILL-M	3
NORI-M	1
NOVO-K	4
SAMA-A	2
SUBO-S	3
VANJ-M	5
VOLO-D	3
VUJH	2

ENTITETI	OP
KRST-V	1
NORI-M	1
ERJA-M	2
SAMA-A	2
VUJH	2
BADZ-M	3
BLAS-M	3
KRUN-D	3
MALI-M	3
MILL-M	3
SUBO-S	3
VOLO-D	3
ANZU-V	4
GIRI-G	4
NOVO-K	4
MILA-D	5
VANJ-M	5

### Grupiranje kvantitativnih podataka

- Ako diskretna varijabla ima veliki broj pojavnih oblika ili se radi o kontinuiranoj varijabli onda se podaci grupiraju u manji broj razreda. Za uspješno grupiranje potrebno je odrediti prikladan **broj razreda** i njihovu veličinu - **interval razreda**.

**Primjer:** Grupiranje 60 dječaka judaša u 5 razreda prema varijabli Skok udalj s mjesta

Interval razreda	f	rf (%)
120<x<=140	1	1,67
140<x<=160	12	20,00
160<x<=180	26	43,33
180<x<=200	16	26,67
200<x<=220	5	8,33

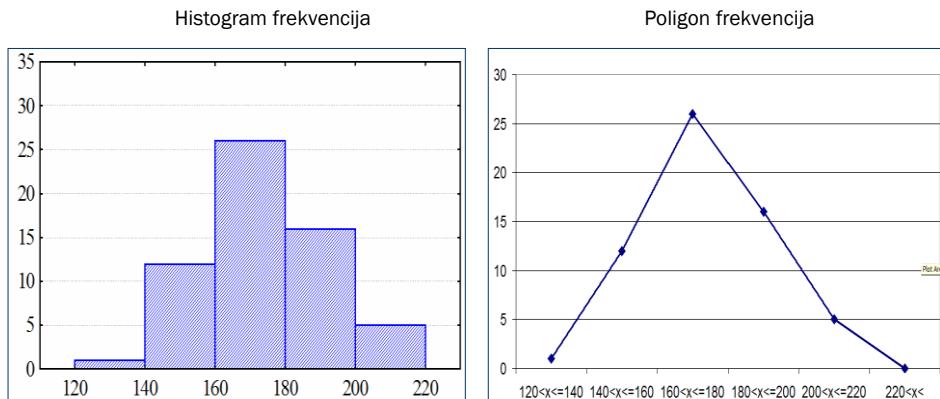
## 2. Inicijalni statistički postupci

- Ako se frekvencije (apsolutne ili relativne) svakog sljedećeg razreda zbroje sa sumom frekvencija prethodnih razreda dobiju se tzv. **kumulativne frekvencije**.

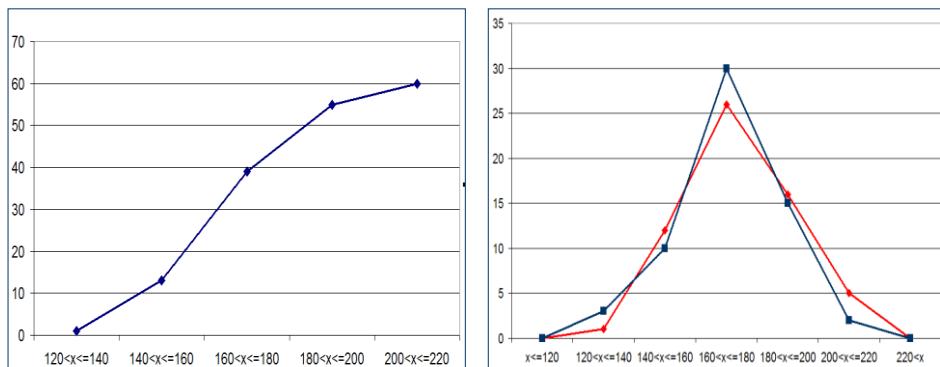
Interval razreda	f	cf	crf (%)
120<=x<=140	1	1	1,67
140<=x<=160	12	13	21,67
160<=x<=180	26	39	65,00
180<=x<=200	16	55	91,67
200<=x<=220	5	60	100,00

- Grupirani kvantitativni podaci grafički se prikazuju pomoću histograma i poligona frekvencija.

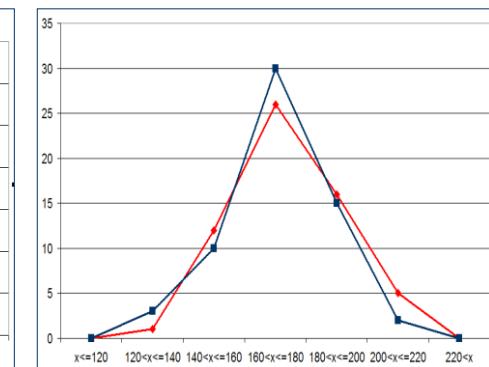
Prikaz: Histogram i poligon frekvencija



Kumulativni poligon frekvencija



Poligon frekvencija dviju grupa



## 2. Inicijalni statistički postupci

### Microsoft Excel

#### Postupci:

- ▶ **Provjera ispravnosti za vrijeme unosa podataka:** Uvjeti za provjeru ispravnosti za vrijeme unosa podataka postavljaju se putem dijaloškog okvira *Data Validation* koji se pokreće odabirom opcije *Validation...* padajućeg izbornika *Data*.
- ▶ **Pretraživanje i izmjena podataka:** Pretraživanje i izmjena podataka vrši se putem dijaloškog okvira *Find and Replace* koji se pokreće kombinacijom tipki *Ctrl+F*, a omogućava brzu zamjenu kodova originalnim vrijednostima.
- ▶ **Prebrojavanje podataka:** Utvrđivanje frekvencije pojedine kategorije vrši se prebrojavanjem pomoću funkcije *Countif*. Funkcija se unosi u označeno polje matrice odabirom opcije *Function...* padajućeg izbornika *Insert*.
- ▶ **Grafikon stupaca i strukturni krug:** IsCRTavanje grafikona stupaca vertikalne orientacije (*Column*), grafikona stupaca horizontalne orientacije (*Bar*) i struktornog kruga (*Pie*) vrši se odabirom opcije *Chart...* padajućeg izbornika *Insert*.
- ▶ **Sortiranje:** Sortiranje se vrši odabirom opcije *Sort...* padajućeg izbornika *Data*. Opcija *Ascending* označava uzlazno sortiranje, a *Descending* silazno sortiranje).
- ▶ **Linijski grafikon:** IsCRTavanje linijskog grafikona (*Line*) vrši se odabirom opcije *Chart...* padajućeg izbornika *Insert*.

---

#### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.xls* postavite uvjet da vrijednost u varijabli *ATV* ne može biti izvan raspona od 1200 - 1500!
  - ▶ U datoteci *Ucenici-OS.xls* postavite uvjet da se u varijablu *Kraj* ne može upisati ništa osim *Gore* i *More!*
  - ▶ U varijabli *Spol* datoteke *Ucenici-OS.xls* zamjenite sve kodove *Z* s originalnom oznakom *Žensko* te kodove *M* s *Muško!*
  - ▶ U datoteci *Ucenici-OS.xls* utvrđite frekvencije i relativne frekvencije (u postotku) za pojedine kategorije varijable *RAZRED!* Iskoristite funkciju *Countif!*
  - ▶ Na temelju frekvencija utvrđenih u prethodnom zadatku iscrtajte grafikone stupaca horizontalne i vertikalne orientacije te struktorni krug!
  - ▶ U datoteci *Ucenici-OS.xls* silazno sortirajte učenike prema rezultatu u testu *MSDM - Skok udalj s mjesta!*
  - ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* uz pomoć programa *STATISTICA* utvrđite relativne frekvencije i kumulativne relativne frekvencije razreda za varijablu *MSDM* te iscrtajte poligon frekvencija i poligon kumulativnih frekvencija pomoću programa *Microsoft Excel!*
-

## 2. Inicijalni statistički postupci



### STATISTICA

#### Postupci:

- ▶ **Provjera ispravnosti nakon unosa podataka:** Uvjeti za naknadnu provjeru ispravnosti unosa podataka postavljaju se opcijama dijaloškog okvira *Verify Data* koji se pokreće putem padajućeg izbornika *Data*. Uvjete se definira na sljedeći način: npr. *Valid if: spol="z" or spol="m"*.
- ▶ **Kodiranje podataka:** Definiranje pripadajućih kodova za originalne vrijednosti vrši se odabirom opcije *Text Labels...* u dijaloškom okviru za formatiranje varijabli. Ista opcija omogućava trenutnu zamjenu prikazanih kodova originalnim vrijednostima.
- ▶ **Pretraživanje i izmjena podataka:** Pretraživanje i izmjena podataka vrši se putem dijaloškog okvira *Replace* koji se pokreće kombinacijom tipki *Ctrl+H*, a omogućava brzu zamjenu kodova originalnim vrijednostima.
- ▶ **Jednodimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka:** Jednodimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Frequency Tables* → *Advanced* → *All distinct values*.
- ▶ **Grafikon stupaca i strukturni krug:** IsCRTavanje grafikona stupaca izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Graphs* → *2D Graphs* → *Bar/Column Plots*. IsCRTavanje strukturnog kruga izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Graphs* → *2D Graphs* → *Pie Charts*.
- ▶ **Višedimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka:** Višedimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Tables and banners*. Odabirom opcije *Specify Tables (select variables)* potrebno je odabrati varijable prema kojima će se izvršiti grupiranje.
- ▶ **Sortiranje entiteta:** Sortiranje se vrši odabirom opcije *Sort...* padajućeg izbornika *Data*. Opcija *Ascending* označava uzlazno sortiranje, a opcija *Descending* silazno sortiranje.
- ▶ **Jednodimenzionalno grupiranje kvantitativnih podataka:** Izbornik za jednodimenzionalno grupiranje kvantitativnih podataka pokreće se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Frequency Tables* → *Advanced*. Moguće je definirati: točan broj razreda (*No. of exact intervals*), približan broj razreda uz uvjet zaokruženih granica razreda ("Neat" intervals, approximate no.) i točan interval razreda (*Step size*).
- ▶ **Histogram frekvencija i poligon frekvencija:** IsCRTavanje histograma frekvencija izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Graphs* → *2D Graphs* → *Histograms*. IsCRTavanje poligona frekvencija izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Graphs* → *2D Graphs* → *Line Plots (Variables)*. Pri isCRTavanju poligona frekvencija ulazni podaci moraju biti frekvencije razreda, a ne originalni rezultati entiteta.

---

#### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* pronađite sve entitete čija je vrijednost u varijabli *ATV* izvan raspona od 1200 - 1500!
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* pronađite sve entitete koji u varijabli *Kraj* imaju oznaku *Gore* i u varijabli *Spol* oznaku *Z*!

## 2. Inicijalni statistički postupci

- ▶ U varijabli *Razred* datoteke *Ucenici-OS.sta* zamijenite sve kodove *I* s originalnom vrijednošću *prvi*, *II* s *drugi*, *III* s *treći* i *IV* s *četvrti!*
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* utvrđite frekvencije i relativne frekvencije (u postotku) za pojedine kategorije varijable *RAZRED!*
- ▶ Na temelju frekvencija utvrđenih u prethodnom zadatku iscrtajte grafikone stupaca horizontalne i vertikalne orientacije te strukturni krug!
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* grupirajte učenike istovremeno prema varijabli *SPOL* i varijabli *RAZRED!* Utvrđite frekvencije i relativne frekvencije kategorija!
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* silazno sortirajte učenike prema rezultatu u varijabli *ATT!* U datoteci *Ucenici-OS.sta* utvrđite apsolutne i relativne frekvencije i kumulativne frekvencije 7 razreda prema varijabli *MSDM!* Isprobajte različite opcije!
- ▶ Na temelju grupiranja podataka provedenog u prethodnom zadatku iscrtajte histogram frekvencija i poligon frekvencija!

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006.). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 50-62.
- ▶ Petz, B. (2002.). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 67-78.
- ▶ Langer, M. (2004.). *Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows*. Zagreb: Miš, str. 75-103, 153-181.

## 2. Inicijalni statistički postupci

### Pitanja i zadaci

1. Kodiranje je...

- a) ... pridruživanje skraćene oznake ili broja odgovarajućoj kategoriji.
- b) ... pretraživanje kodova.
- c) ... pretraživanje matrice podataka.
- d) ... pridruživanje smanjenog broja entiteta odgovarajućoj varijabli.

2. Grupiranje podataka je...

- a) ... razvrstavanje varijabli s istim oblikom obilježja u određen broj disjunktnih skupova.
- b) ... slučajan odabir podataka u uzorak.
- c) ... razvrstavanje entiteta s istim oblikom obilježja u određen broj disjunktnih skupova.
- d) ... slučajan odabir entiteta u uzorak.

3. Pokrenite datoteku *Judo.sta!* Izvrši grupiranje entiteta u točno 5 razreda prema varijabli *CUC!* Koliki je postotak entiteta u razredu s najmanjom frekvencijom?

- a) 26,67
- b) 8,33
- c) 6,67
- d) 5,21

4. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Kumulativna frekvencija nekog razreda je broj entiteta koji imaju manji rezultat od donje granice intervala sljedećeg razreda.
- b) Kumulativna frekvencija nekog razreda je broj entiteta koji imaju manji rezultat od donje granice intervala tog razreda.
- c) Kumulativna frekvencija nekog razreda je broj entiteta koji imaju veći rezultat od donje granice intervala sljedećeg razreda.
- d) Ništa od navedenog nije točno.

5. Od trideset judeša u prvoj grupi su sedmorica, u drugoj grupi ih je osamnaest, a u trećoj pet. Kolika je frekvencija druge grupe?

- a) 0,6
- b) 18
- c) 60%
- d) 25

6. Uz ordinatu grafikona stupaca vertikalne orientacije upisuju se...

- a) ... grupe.
- b) ... frekvencije.
- c) ... intervali razreda.
- d) ... pojavnii oblici obilježja.

7. Pokrenite datoteku *SKOLA.sta!* Ako želite izvršiti grupiranje entiteta prema rezultatima u varijabli *TAPI* na način da interval razreda bude 10 koristite opciju...

- a) ... No. of exact intervals.
- b) ... „Neat“ intervals; approximate no.
- c) ... Step size.
- d) ... All distinct values.

8. Pokrenite datoteku *Ucenici-OS.xls!* Ako rang 1 označava ispitanika s najvećim rezultatom, koliki je rezultat petnaestog ispitanika po rangu u varijabli *MSDM*?

- a) 127
- b) 172
- c) 80
- d) 15

9. Funkcija *Countif* u programu Microsoft Excel može se iskoristiti za...

- a) ... zbrajanje podataka.
- b) ... prebrojavanje varijabli.
- c) ... prebrojavanje matrice.
- d) ... utvrđivanje frekvencija.

10. Frekvencija nije...

- a) ... broj entiteta u određenoj grupi.
- b) ... broj kategorija u određenoj varijabli.
- c) ... broj entiteta u određenom razredu.
- d) ... broj entiteta u određenoj kategoriji.

11. Interval razreda izračunava se kao...

- a) ... totalni raspon podijeljen s brojem entiteta.
- b) ... razlika totalnog raspona i minimalnog rezultata.
- c) ... totalni raspon podijeljen s brojem razreda.
- d) ... razlika maksimalnog rezultata i totalnog raspona.

## 2. Inicijalni statistički postupci

### Pitanja i zadaci

12. Provjeru ispravnosti unosa kvantitativnih podataka moguće je vršiti...

- a) ... putem opcije *Find Error*.
- b) ... pregledom minimalne i maksimalne vrijednosti.
- c) ... pregledom veličine uzorka varijabli.
- d) ... putem opcije *Find Fault*.

13. 5% je jednako...

- a) ... 0,05.
- b) ... 0,5.
- c) ... 5.
- d) ... 500.

14. Izvršeno je grupiranje prema rezultatima u nekom motoričkom testu i dobiveni su sljedeći rezultati: frekvencija prvog razreda je 1, frekvencija drugog razreda je 2, frekvencija trećeg razreda je 3, frekvencija četvrtog razreda je 4 i frekvencija petoga razreda je 5. Kolika je kumulativna frekvencija četvrtog razreda?

- a) 9
- b) 10
- c) 0,27
- d) 27%

15. Proporcija grupe nije...

- a) ... omjer broja entiteta u grupi i zbroja frekvencija svih grupa.
- b) ... omjer broja entiteta u grupi i frekvencije grupe.
- c) ... omjer broja entiteta u grupi i ukupnog broja entiteta.
- d) ... omjer između frekvencije grupe i zbroja frekvencija svih grupa.

16. U programu Microsoft Excel opcija za pretraživanje podataka pokreće se kombinacijom tipki...

- a) ... *Ctrl* i *G*
- b) ... *Alt* i *Tab*
- c) ... *Ctrl* i *A*
- d) ... *Ctrl* i *F*

17. Veličina razreda je sinonim za...

- a) ... frekvenciju razreda.
- b) ... broj entiteta u razredu.
- c) ... interval razreda.
- d) ... gornju granicu razreda.

18. Pokrenite datoteku *SKOLA.sta!* Izvrši grupiranje entiteta u točno 5 razreda prema varijabli *SDAL!* Koliki je kumulativni postotak entiteta u razredu s najvećom frekvencijom?

- a) 54
- b) 58
- c) 98
- d) 2

19. Sortiranje je...

- a) ... grupiranje entiteta u određeni broj disjunktnih podskupova zavisno o rezultatu u varijabli prema kojoj se vrši sortiranje.
- b) ... nizanje entiteta prema redoslijedu zavisnom o rezultatu u varijabli prema kojoj se vrši sortiranje.
- c) ... nizanje entiteta u grupe zavisno o rezultatu prema kojem se vrši sortiranje.
- d) ... grupiranje entiteta zavisno o redoslijedu disjunktnog skupa koji se sortira.

20. Dvodimenzionalno grupiranje je...

- a) ... grupiranje entiteta u ravnini.
- b) ... grupiranje entiteta u dvije kategorije.
- c) ... grupiranje entiteta u parove.
- d) ... grupiranje entiteta prema dvije varijable.

21. Dijaloški okvir *Data Validation* u programu Microsoft Excel omogućava...

- a) ... provjeru ispravnosti nakon unosa podataka.
- b) ... provjeru ispravnosti prije, za vrijeme i nakon unosa podataka.
- c) ... provjeru ispravnosti prije unosa podataka.
- d) ... provjeru ispravnosti za vrijeme unosa podataka.

## 2. Inicijalni statistički postupci

### Pitanja i zadaci

22. Kodna lista je...

- a) ... popis varijabli i odgovarajućih entiteta.
- b) ... popis podataka i odgovarajućih varijabli.
- c) ... popis entiteta i odgovarajućih podataka.
- d) ... popis podataka i odgovarajućih kodova.

23. U programu *Statistica 7* opcija za pretraživanje i izmjenu podataka pokreće se kombinacijom tipki...

- a) ... *Ctrl* i *G*
- b) ... *Ctrl* i *H*
- c) ... *Ctrl* i *F*
- d) ... *Ctrl* i *A*

24. U koliko polja matrice podataka *Ucenici-OS.xls* je upisan broj 84?

- a) 7
- b) 1
- c) 5
- d) 3

25. Relativna frekvencija nije...

- a) ... omjer broja entiteta u kategoriji i zbroja frekvencija svih kategorija.
- b) ... omjer broja entiteta u kategoriji i frekvencije kategorije.
- c) ... omjer broja entiteta u kategoriji i ukupnog broja entiteta.
- d) ... omjer između frekvencije kategorije i zbroja frekvencija svih kategorija.

26. Pokrenite datoteku *Judo.sta!* Kolika je frekvencija entiteta koji u varijabli *CUC* postižu rezultat 150?

- a) 23
- b) 5
- c) 38,33
- d) 3

27. Koliko je 15% od 20% od 10% od 300?

- a) 0,9%
- b) 0,9
- c) 0,1
- d) 1%

28. Dijaloški okvir *Verify Data* u programu *Statistica* omogućava...

- a) ... provjeru ispravnosti nakon unosa podataka.
- b) ... provjeru ispravnosti za vrijeme unosa podataka.
- c) ... provjeru ispravnosti prije, za vrijeme i nakon unosa podataka.
- d) ... provjeru ispravnosti prije unosa podataka.

29. Pokrenite datoteku *SKOLA.sta!* Ako rang 1 označava ispitanika s najmanjim rezultatom, koliki je rezultat šestog ispitanika po rangu u varijabli *TAPI*?

- a) 35
- b) 25
- c) 20
- d) 40

30. Koji od navedenih postupaka nije ispravan?

- a) Grupiranje pri kojem svaka vrijednost diskretne varijable s malim brojem pojavnih oblika predstavlja zasebnu kategoriju.
- b) Grupiranje pri kojem svaka vrijednost nominalne varijable s velikim brojem pojavnih oblika predstavlja zasebnu kategoriju.
- c) Grupiranje pri kojem svaka vrijednost diskretne varijable s velikim brojem pojavnih oblika predstavlja zasebnu kategoriju.
- d) Grupiranje pri kojem svaka vrijednost nominalne varijable s malim brojem pojavnih oblika predstavlja zasebnu kategoriju.

**1**  
**2**

# **3**

*Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije*

**4**  
**5**  
**6**  
**7**  
**8**  
**9**  
**10**  
**11**  
**12**  
**13**  
**14**  
**15**  
**16**  
**17**  
**18**  
**19**  
**20**

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

#### Mjere centralne tendencije

- aritmetička sredina
- mod
- medijan

#### Mjere varijabilnosti

- minimum
- maksimum
- totalni raspon
- varijanca
- standardna devijacija
- koeficijent varijabilnosti

#### Mjere asimetrije i izduženosti distribucije

- skewness
- pozitivno i negativno asimetrična distribucija
- kurtosis
- platikurtična, mezokurtična i leptokurtična distribucija

#### Empirijske i teoretske distribucije

- distribucija frekvencija
- empirijske distribucije
- teoretske distribucije
- normalna ili Gaussova distribucija

### MICROSOFT EXCEL

#### Izračunavanje deskriptivnih pokazatelja

- funkcija Mean
- funkcija Mode
- funkcija Median
- funkcija Min
- funkcija Max
- funkcija Stdev
- funkcija Var
- funkcija Skew
- funkcija Kurt

### STATISTICA

#### Izračunavanje deskriptivnih pokazatelja

- korištenje dijaloškog okvira  
*Descriptive statistics*

### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

#### Deskriptivni pokazatelji

- ▶ **Deskriptivni pokazatelji** se koriste za opis varijabli, a dijele se na:
  - mjere centralne tendencije ili središnje mjere
  - mjere varijabilnosti ili disperzije
  - mjere asimetrije i zakrivljenosti distribucije rezultata.

#### Mjere centralne tendencije ili središnje mjere

- ▶ Svaki od centralnih parametara predstavlja jednu vrijednost koja bi trebala biti dobra zamjena za skup svih pojedinačnih vrijednosti, odnosno njihov najbolji reprezentant.
- ▶ Mjere centralne tendencije se razlikuju prema načinu utvrđivanja i mogućnostima primjene. U kineziologiji se najčešće koriste:
  - aritmetička sredina
  - mod
  - medijan.

#### Aritmetička sredina

- ▶ **Aritmetička sredina** je najčešće korištena mjeru centralne tendencije. Izračunava se kao omjer zbroja svih vrijednosti neke varijable i ukupnog broja entiteta. Označava se simbolom  $\bar{x}$  kada se izračunava na uzorku entiteta, odnosno simbolom  $\mu$  kada se izračunava na populaciji entiteta.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

gdje je

- $x_i$  – rezultat ispitanika  $i$
- $i = 1, \dots, n$
- $n$  - broj entiteta.

**Primjer:** 10 entiteta je postiglo sljedeće rezultate u nekom motoričkom testu: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5.

Aritmetička sredina je

$$\bar{x} = \frac{1+2+2+3+3+3+3+4+4+5}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

- Aritmetička sredina se računa samo za kvantitativne podatke i ima sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned} \rightarrow & \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \\ \rightarrow & \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min \\ \rightarrow & x_{\min} \leq \bar{x} \leq x_{\max} \end{aligned}$$

#### Mod ili dominantna vrijednost

- Mod ili dominantna vrijednost** ( $\mu_0$ ) je vrijednost kvalitativne ili kvantitativne varijable koja se najčešće pojavljuje, odnosno koja ima najveću frekvenciju.

**Primjer:** 10 entiteta je postiglo sljedeće rezultate u nekom motoričkom testu: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5.

Ocjena	f
1	1
2	2
3	4
4	2
5	1

Iz prikazane tablice može se uočiti da je mod jednak 3.

#### Medijan ili centralna vrijednost

- Medijan ili centralna vrijednost** ( $\mu_e$ ) je vrijednost koja se nalazi na sredini uređenog niza podataka (uzlazno ili silazno sortiranog), odnosno vrijednost koja uređeni niz podataka dijeli na dva jednakobrojna dijela.

**Primjer:** 15 entiteta (neparan niz) je izmjereno nekim motoričkim testom. Rezultati su uzlazno sortirani:

X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>	X <sub>10</sub>	X <sub>11</sub>	X <sub>12</sub>	X <sub>13</sub>	X <sub>14</sub>	X <sub>15</sub>
1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5

Iz prikazane tablice može se uočiti da je medijan jednak 3.

Ako je broj entiteta paran onda je medijan jednak aritmetičkoj sredini dvaju središnjih rezultata sortiranog niza podataka.

### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

**Primjer:** 16 entiteta (paran niz) je izmjereno nekim motoričkim testom. Rezultati su uzlazno sortirani:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16
1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5

Medijan se izračuna na sljedeći način:  $\mu_e = (x_8 + x_9)/2 = (3+3)/2 = 3$

- ▶ Medijan i mod, za razliku od aritmetičke sredine, nisu pod utjecajem ekstremno visokih ili niskih rezultata te su zato bolja mjera centralne tendencije za asimetrično distribuirane varijable.

#### Mjere varijabilnosti ili disperzije

- ▶ Mjere varijabilnosti ili disperzije ukazuju na veličinu međusobnog razlikovanja rezultata entiteta u nekoj varijabli. U kinezijologiji se najčešće koriste:
  - totalni raspon
  - varijanca
  - standardna devijacija
  - koeficijent varijabilnosti.

#### Totalni raspon

- ▶ **Totalni raspon** ( $R_{tot}$ ) je razlika između maksimalne ( $x_{max}$ ) i minimalne ( $x_{min}$ ) vrijednosti.

$$R_{tot} = x_{max} - x_{min}$$

- ▶ Raspon je nesigurna mjera varijabilnosti jer i jedan ekstremni rezultat može znatno povećati njegovu vrijednost. Povećenjem broja entiteta u uzorku obično se povećava i totalni raspon jer se povećava vjerojatnost uključivanja entiteta s ekstremnim (maksimalnim i minimalnim) vrijednostima.

#### Varijanca i standardna devijacija

- ▶ Da bi se izbjegao isključiv utjecaj minimalne i maksimalne vrijednosti, različite mjere varijabilnosti izračunavaju se na temelju svih rezultata. Procjena stupnja disperzije nije moguća putem prosječnog odstupanja rezultata od aritmetičke sredine jer je

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

**Primjer:** 10 entiteta je postiglo sljedeće rezultate u nekom motoričkom testu: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5.

$$\bar{d} = \frac{(1-3) + (2-3) + (2-3) + (3-3) + (3-3) + (3-3) + (3-3) + (4-3) + (4-3) + (5-3)}{10} = \frac{0}{10} = 0$$

- ▶ **Varijanca** ( $s^2$ ) je prosječno kvadratno odstupanje rezultata entiteta od aritmetičke sredine.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- ▶ **Standardna devijacija** (s) je drugi korijen iz varijance.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

**Primjer:** 10 entiteta je postiglo sljedeće rezultate u nekom motoričkom testu: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5.

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	-2	4
2	-1	1
2	-1	1
3	0	0
3	0	0
3	0	0
3	0	0
4	1	1
4	1	1
5	2	4
$\Sigma$	30	0
		12

$$\bar{x} = \frac{30}{10} = 3$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{1,33} = 1,15$$

#### Koeficijent varijabilnosti

- ▶ **Koeficijent varijabilnosti** (V) pokazuje koliki postotak vrijednosti aritmetičke sredine iznosi standardna devijacija, a koristi se za usporedbu varijabiliteta različitih varijabli.

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

gdje je

- $\bar{x}$  - standardna devijacija
- $\bar{x}$  - aritmetička sredina.

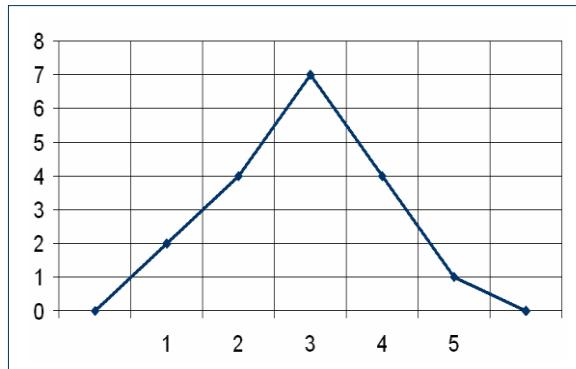
### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

#### Empirijske i teoretske distribucije

- ▶ **Distribucija frekvencija** je uređeni niz kvantitativnih vrijednosti s pripadajućim frekvencijama.
- ▶ **Empirijske distribucije** su raspodjele eksperimentalno prikupljenih podataka.
- ▶ **Teoretske distribucije** su matematičke funkcije koje omogućavaju utvrđivanje vjerojatnosti nekog slučajnog događaja u zadanim uvjetima.

**Primjer:** Tablični i grafički prikaz distribucije broja osobnih pogrešaka (BOP) igrača neke košarkaške ekipe na jednoj utakmici (empirijska distribucija)

BOP	f
1	2
2	4
3	7
4	4
5	1



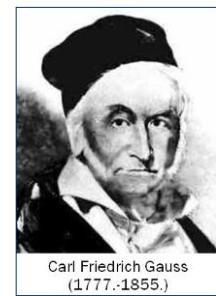
#### Normalna ili Gaussova distribucija

- ▶ Distribucije velikog broja antropoloških karakteristika (empirijske distribucije) vrlo su slične teoretskoj distribuciji koja se prema matematičaru koji ju je definirao naziva **Gaussova ili normalna distribucija**.
- ▶ Za slučajnu kontinuiranu varijablu  $x$  kaže se da ima normalnu distribuciju s parametrima  $\mu$  i  $\sigma^2$  ako je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

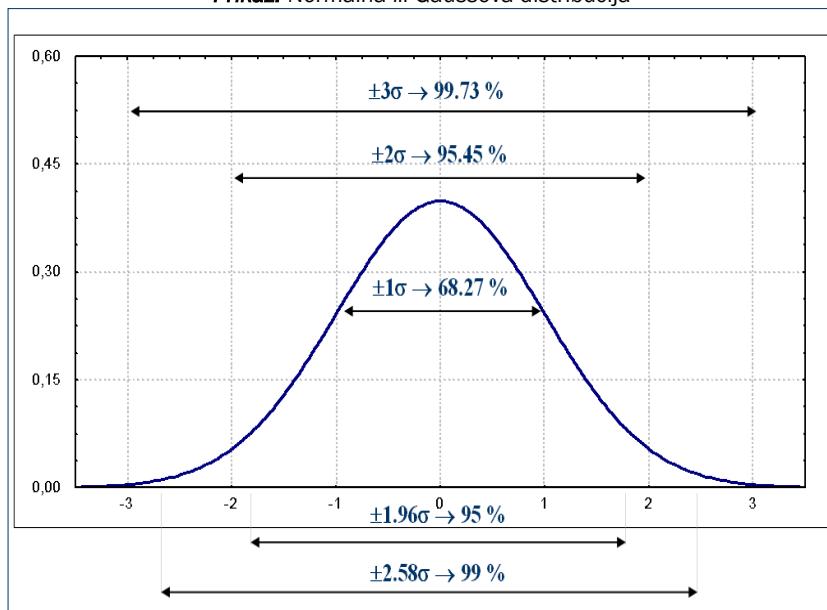
gdje je

- $\mu$  - aritmetička sredina
- $\sigma$  - standardna devijacija
- $\pi = 3,14159$
- $e$  - baza prirodnog logaritma ( $e = 2,71828$ ).



### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

Prikaz: Normalna ili Gaussova distribucija



- ▶ Normalitet distribucija varijabli tj. sličnost empirijskih distribucija s normalnom distribucijom je uvjet za korištenje mnogih statističkih metoda.
- ▶ Veličina odstupanja empirijske distribucije od normalne distribucije može se testirati statističkim postupcima kao što su Kolmogorov-Smirnovljev test i Shapiro-Wilksov W test.
- ▶ Oblik empirijske distribucije može se opisati mjerama asimetrije i izduženosti distribucije.

#### Mjere asimetrije i izduženosti distribucije

- ▶ **Skewness ( $a_3$ )** je koeficijent asimetrije distribucije, a izračunava se kao omjer trećeg momenta oko sredine ( $m_3$ ) i standardne devijacije podignute na treći potenciju ( $\sigma^3$ ).

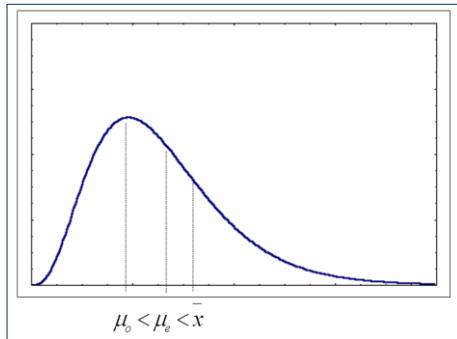
$$a_3 = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

$$\text{gdje je } m_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n} \quad \text{treći moment oko sredine.}$$

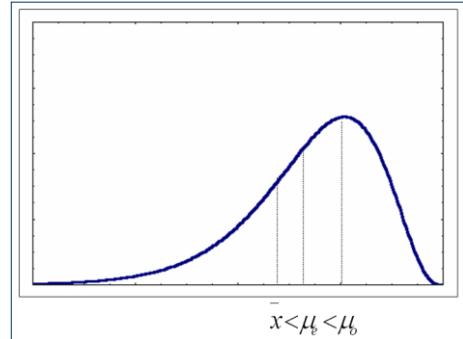
### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

- Ako je koeficijent asimetrije  $a_3 > 0$  distribucija je **pozitivno asimetrična**. Ako je koeficijent asimetrije  $a_3 < 0$  distribucija je **negativno asimetrična**.

**Prikaz:** Pozitivno asimetrična distribucija



**Prikaz:** Negativno asimetrična distribucija

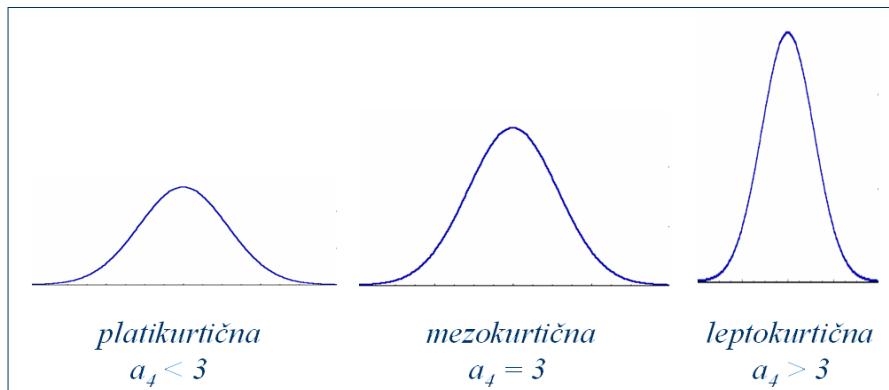


- Kurtosis** ( $a_4$ ) je stupanj spljoštenosti odnosno izduženosti distribucije, a izračunava se kao omjer četvrtog momenta oko sredine ( $m_4$ ) i standardne devijacije podignite na četvrtu potenciju ( $\sigma^4$ ).

$$a_4 = \frac{m_4}{\sigma^4}$$

gdje je  $m_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n}$  četvrti moment oko sredine.

**Prikaz:** Tipovi distribucije s obzirom na kurtosis



### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

#### Microsoft Excel

##### Postupci:

- ▶ **Izračunavanje deskriptivnih pokazatelja:** Izračunavanje deskriptivnih pokazatelja vrši se pomoću funkcija: *Average* (aritmetička sredina), *Mode* (mod), *Median* (medijan), *Min* (minimum), *Max* (maksimum), *Stdev* (standardna devijacija), *Var* (varijanca), *Skew* (skewness) i *Kurt* (kurtosis). Funkcija se unosi u označeno polje matrice odabirom opcije *Function...* padajućeg izbornika *Insert*.

---

##### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.xls* izračunajte aritmetičku sredinu, mod, medijan, minimum, maksimum, raspon, varijancu, standardnu devijaciju, koeficijent varijabilnosti, skewness i kurtosis za sve kvantitativne varijable!

StatSoft

#### STATISTICA

##### Postupci:

- ▶ **Izračunavanje deskriptivnih pokazatelja:** Izračunavanje deskriptivnih pokazatelja izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Descriptive statistics* → *Advanced* → *Mean* (aritmetička sredina), *Mode* (mod), *Median* (medijan), *Minimum & maximum*, *Range* (raspon), *Standard Deviation* (standardna devijacija), *Variance* (varijanca), *Coefficient of variation* (koeficijent varijabilnosti), *Skewness* i *Kurtosis*.

---

##### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* izračunajte aritmetičku sredinu, mod, medijan, minimum, maksimum, raspon, varijancu, standardnu devijaciju, koeficijent varijabilnosti, skewness i kurtosis za sve kvantitativne varijable!

---

#### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006.). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, 63-113.
- ▶ Petz, B. (2002.). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jastrebarsko: Naklada Slap, 45-66, 79-96.
- ▶ Langer, M. (2004.). *Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows*. Zagreb: Miš d.o.o., 75-103

### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

#### Pitanja i zadaci

1. Koja od ponuđenih tvrdnji nije točna?

- a) Aritmetička sredina je središnji parametar.
- b) Varijanca je mjera varijabilnosti.
- c) Mod je mjera disperzije.
- d) Medijan je mjera centralne tendencije.

2. Standardna devijacija nije...

- a) ... kvadrirana vrijednost varijance.
- b) ... drugi korijen iz varijance.
- c) ... mjera varijabilnosti rezultata.
- d) ... mjera disperzije rezultata.

3. Učenici su na nekom testu dobili sljedeće ocjene: 3, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 5, 5, 1, 2, 2. Kolika je modalna vrijednost?

- a) 1
- b) 3
- c) 2
- d) 4

4. U programu Microsoft Excel aritmetička sredina se izračunava pomoću funkcije...

- a) ... Aritm
- b) ... Mean
- c) ... Amean
- d) ... Average

5. Tko je definirao normalnu distribuciju?

- a) Karl Pearson
- b) Charles Darwin
- c) Carl Friedrich Gauss
- d) Francis Galton

6. Koliki je koeficijent asimetrije distribucije varijable BML datoteke Judo.xls?

- a) -0,01
- b) 0,05
- c) -0,07
- d) 0,08

7. Ako je Kurtosis  $a_4=7$ , opravdano je zaključiti da je distribucija...

- a) ... pozitivno asimetrična.
- b) ... negativno asimetrična.
- c) ... leptokurtična.
- d) ... platikurtična.

8. Statistička značajnost odstupanja empirijske distribucije od Gaussove distribucije može se utvrditi...

- a) ... Kolmanojev-Samsonovljevim testom.
- b) ... Kolmofenov-Sigfriedovim testom.
- c) ... Kolmasanov-Surjevljevim testom.
- d) ... Kolmogorov-Smirnovljevim testom.

9. Mod je...

- a) ... vrijednost koja se u nekom nizu podataka najčešće ponavlja.
- b) ... vrijednost koja se nalazi na sredini nekog uzlazno ili silazno sortiranog niza podataka.
- c) ... razlika između minimalne i maksimalne vrijednosti.
- d) ... zbroj svih vrijednosti nekog niza podataka podijeljen s brojem entiteta.

10. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Aritmetička sredina je dobra mjera centralne tendencije pozitivno asimetrično distribuiranih rezultata.
- b) Aritmetička sredina je najčešće korištena mjera centralne tendencije.
- c) Mod je dobra mjera centralne tendencije negativno asimetrično distribuiranih rezultata.
- d) Mod je vrijednost koja se u nizu rezultata najčešće ponavlja.

11. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Distribucija tjelesne visine u populaciji sportaša je empirijska distribucija.
- b) Empirijske distribucije su raspodjele eksperimentalno prikupljenih podataka.
- c) Empirijska distribucija je uvijek jednaka nekoj teoretskoj distribuciji.
- d) Teoretske distribucije su matematičke funkcije koje omogućavaju utvrđivanje nekog slučajnog događaja u zadanim uvjetima.

### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

#### Pitanja i zadaci

12. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Ako je broj entiteta paran onda je medijan jednaku rasponu vrijednosti dvaju središnjih članova uzlazno sortiranog niza podataka.
- b) Medijan dijeli uzlazno sortirani niz podataka na dva jednakobrojna dijela.
- c) Medijan se također naziva i centralna vrijednost.
- d) Medijan je vrijednost koja se nalazi na sredini silazno sortiranog niza podataka.

13. Učenici su na nekom testu dobili sljedeće ocjene: 3, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 5, 5, 1, 2, 2. Koliko iznosi aritmetička sredina?

- a) 2,14
- b) 2,83
- c) 2,52
- d) 2,31

14. Deskriptivni pokazatelji se dijele na mjere...

- a) ... centralne varijabilnosti, središnje simetrije te disperzije distribucije rezultata.
- b) ... centralne zakrivljenosti, asimetrije disperzije te varijabilnosti i zakrivljenosti distribucije rezultata.
- c) ... centralne tendencije, varijabilnosti te asimetrije i izduženost distribucije rezultata.
- d) ... centralne simetrije, izduženosti disperzije te asimetrije i varijabilnosti distribucije rezultata.

15. Aritmetička sredina neke varijable iznosi 6, mod iznosi 5, medijan iznosi 5,5, varijanca iznosi 1,96 , standardna devijacija iznosi 1,4 , totalni raspon iznosi 11. Koliko iznosi koeficijent varijabilnosti?

- a) 23,33%
- b) 428,57%
- c) 32,67%
- d) 45,45%

16. U programu Microsoft Excel standardna devijacija se izračunava pomoću funkcije...

- a) ... Standev
- b) ... Sdev
- c) ... Stdev
- d) ... Sd

17. Koliki je totalni raspon varijable MKUS datoteke Ucenici-OS.xls?

- a) 444
- b) 41,84
- c) 1750,20
- d) 386

18. Koji od navedenih pojmove ne predstavlja mjeru centralne tendencije?

- a) Kurtosis
- b) Aritmetička sredina
- c) Mod
- d) Medijan

19. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Normalna distribucija je teoretska distribucija.
- b) Normalna distribucija je platikurtična distribucija.
- c) Normalna distribucija je simetrična distribucija.
- d) Normalna distribucija je kontinuirana distribucija.

20. Koliki je koeficijent izduženosti distribucije varijable MKUS datoteke Ucenici-OS.xls

- a) 2,75
- b) 11,57
- c) 41,84
- d) 14,72

21. Ako je Skewness  $a_3=7$ , distribucija je...

- a) ... negativno asimetrična.
- b) ... platikurtična.
- c) ... pozitivno asimetrična.
- d) ... leptokurtična.

22. Koja je od navedenih relativna mjeru disperzije?

- a) Standardna devijacija
- b) Varijanca
- c) Relevanca
- d) Koeficijent varijabilnosti

### 3. Deskriptivni pokazatelji, Empirijske i teoretske distribucije

#### Pitanja i zadaci

23. Skewness je koeficijent...

- a) ... disperzije rezultata.
- b) ... asimetrije distribucije rezultata.
- c) ... centralne tendencije rezultata.
- d) ... izduženosti distribucije rezultata.

24. Učenici su na nekom testu dobili sljedeće ocjene: 3, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 5, 5, 1, 2, 2. Koliko iznosi standardna devijacija?

- a) 1,4
- b) 2,5
- c) 3,5
- d) 0

25. Učenici su na nekom testu dobili sljedeće ocjene: 3, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 5, 5, 1, 2, 2. Koliko iznosi medijan?

- a) 3
- b) 2,5
- c) 1,4
- d) 3,5

26. Kolika je aritmetička sredina varijable TRB koja se nalazi u datoteci *Judo.sta*?

- a) 38,35
- b) 35,38
- c) 33,00
- d) 30,00

27. Učenici su na nekom testu dobili sljedeće ocjene: 3, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 5, 5, 1, 2, 2, 4, 5, 5, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 4, 5, 4, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 5, 3, 2, 4, 5, 1, 2, 3, 4. Koliko iznosi suma odstupanja ocjena od aritmetičke sredine?

- a) 1,4
- b) 2,5
- c) 0
- d) 3,5

28. Kurtosis pokazuje da li je distribucija rezultata...

- a) ... negativno asimetrična, simetrična ili pozitivno asimetrična.
- b) ... platikurtična, mezokurtična ili leptokurtična.
- c) ... unimodalna, bimodalna ili polimodalna.
- d) ... niskofrekventna, srednjofrekventna ili visokofrekventna.

29. Totalni raspon...

- a) ... uvijek se nalazi između maksimalne i minimalne vrijednosti.
- b) ... je razlika između maksimalne i minimalne vrijednosti.
- c) ... je omjer maksimalne i minimalne vrijednosti.
- d) ... uvijek se nalazi između minimalne i maksimalne vrijednosti.

30. Koji od navedenih pojmova ne predstavlja mjeru disperzije rezultata?

- a) Standardna devijacija
- b) Varijanca
- c) Skewness
- d) Totalni raspon

1  
2  
3

# 4

## *Transformacije podataka*

5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

---

## 4. Transformacije podataka

### Sadržaj poglavlja

#### TEORIJSKE OSNOVE

##### Rangiranje

- rangiranje
- rang
- normalno i obrnuto skalirane varijable
- postupak rangiranja

##### Centili

- centil
- postupak izračunavanja centila

##### Standardizacija podataka

- standardizacija podataka
- z-vrijednost
- tumačenje z-vrijednosti
- obilježja standardizirane varijable
- utvrđivanje vjerojatnosti putem normalne distribucije
- promjena predznaka obrnuto skaliranih varijabli
- kondenzacija rezultata aritmetičkom sredinom
- usporedba rezultata entiteta u različitim varijablama putem grafičkog prikaza z-vrijednosti

##### Ostale transformacije podataka

- transformacija z-vrijednosti na skalu školskih ocjena
- transformacija z-vrijednosti na skalu T-skorova
- transformacija z-vrijednosti na skalu ocjena od 0-10
- transformacija podataka na skalu s proizvoljno određenom minimalnom i maksimalnom vrijednošću

#### MICROSOFT EXCEL

##### Utvrđivanje rangova

##### Izračunavanje centila

##### Standardizacija podataka

- izračunavanje z-vrijednosti
- promjena predznaka rezultata
- kondenzacija rezultata aritmetičkom sredinom

#### STATISTICA

##### Utvrđivanje rangova

##### Izračunavanje centila

##### Standardizacija podataka

- izračunavanje z-vrijednosti
- promjena predznaka rezultata
- kondenzacija rezultata aritmetičkom sredinom
- korištenje dijaloškog okvira *Probability Distribution Calculator*

## 4. Transformacije podataka

### Rangiranje

- ▶ **Rangiranje** je transformacija kvantitativne (intervalne ili omjerne) varijable u ordinalnu, odnosno zamjena rezultata odgovarajućim rangovima.
- ▶ **Rangovi** su redni brojevi entiteta određeni nakon sortiranja entiteta prema njihovim rezultatima u nekoj kvantitativnoj varijabli. Uobičajeno je da se najbolji rezultat zamjenjuje rangom 1. Sukladno tome rang se entiteta u normalno skaliranim varijablama utvrđuje silaznim sortiranjem, a u obrnuto skaliranim varijablama uzlaznim sortiranjem.
- ▶ **Normalno skalirana varijabla** je varijabla u kojoj najveća numerička vrijednost predstavlja najbolji rezultat (npr. Skok u vis).
- ▶ **Obrnuto skalirana varijabla** je varijabla u kojoj najmanja numerička vrijednost predstavlja najbolji rezultat (npr. Sprint 100 metara).

**Primjer:** 10 sportaša je izmjereno testom *Skok udalj s mesta*. Rangiranje je izvršeno sljedećim postupkom:

The diagram illustrates the ranking process through three tables and two arrows:

- Initial Data:** A table showing 10 sportsmen with their SDM (Skok udalj s mesta) values. The values are: D.P. (315), J.K. (260), B.V. (330), G.I. (265), I.M. (240), T.K. (290), D.R. (295), S.J. (235), Z.P. (270), and J.P. (270).
- Descending Sorting:** An arrow labeled "silazno sortiranje" points from the initial data to this table. The sorted values are: B.V. (330), D.P. (315), D.R. (295), T.K. (290), Z.B. (275), D.S. (275), I.K. (270), Z.P. (270), G.I. (265), and J.K. (260).
- Final Ranking:** An arrow labeled "utvrđivanje rangova" points from the sorted data to this table. The ranks are assigned as follows: B.V. (1), D.P. (2), D.R. (3), T.K. (4), Z.B. (5), D.S. (5), I.K. (7), Z.P. (7), G.I. (9), and J.K. (10).

### Centili

- ▶ **Centil ili percentil** je relativni rang, a izračunava se kao postotni udio ranga nekog entiteta u ukupnom broju entiteta u uzorku. Centil nekog rezultata pokazuje koliko posto entiteta u uzorku ima jednak ili lošiji rezultat.

$$CENTIL = \frac{n+1 - RANG}{n} \cdot 100$$

gdje je

- *RANG* - rang entiteta
- *n* - broj entiteta u uzorku.

## 4. Transformacije podataka

**Primjer:** 10 sportaša je izmjereno testom Skok udalj s mesta. Utvrđivanje centila je izvršeno sljedećim postupkom:

	SDM
D.P.	315
J.K.	260
B.V.	330
G.I.	265
I.M.	240
T.K.	290
D.R.	295
I.K.	270
S.J.	235
Z.P.	270

rangiranje

	SDM
B.V.	1
D.P.	2
D.R.	3
T.K.	4
Z.B.	5
D.Š.	5
I.K.	7
Z.P.	7
G.I.	9
J.K.	10

računanje centila

	SDM
B.V.	100
D.P.	90
D.R.	80
T.K.	70
Z.B.	60
D.Š.	60
I.K.	40
Z.P.	40
G.I.	20
J.K.	10

### Standardizacija podataka (z-vrijednosti)

- ▶ **Standardizacija podataka** je transformacija originalnih rezultata u z-vrijednosti.
- ▶ **Standardizirani rezultat ili z-vrijednost** je odstupanje rezultata entiteta od aritmetičke sredine izraženo u dijelovima standardne devijacije. Standardizacija podataka provodi se pomoću formule:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$$

gdje je

- $z_i$  - standardizirani rezultat entiteta  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ )
- $x_i$  - originalna vrijednost entiteta  $i$
- $\bar{x}$  - aritmetička sredina
- $\sigma$  - standardna devijacija.

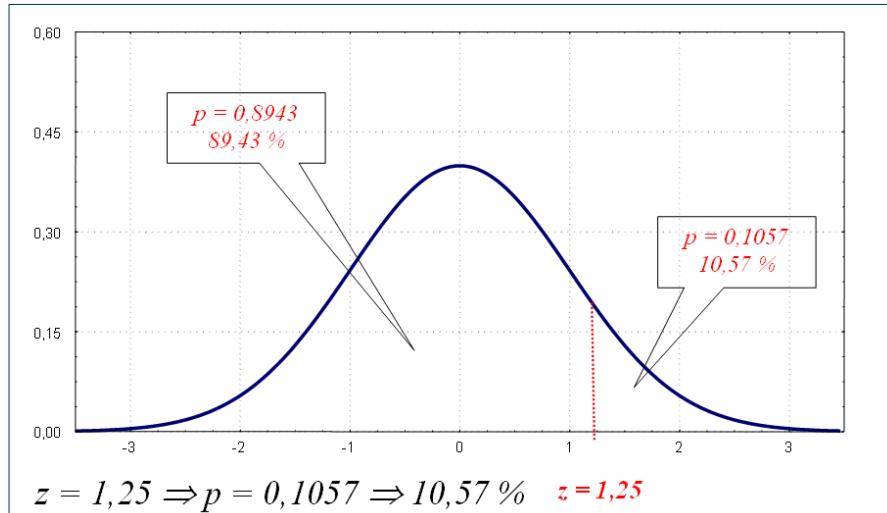
**Primjer:** 257 dječaka je izmjereno testom za procjenu eksplozivne snage Skok udalj s mesta. Aritmetička sredina iznosi 215 cm, a standardna devijacija 12 cm. Učenik XY postigao je rezultat 230 cm. Potrebno je procijeniti postotak (%) i broj učenika koji postižu lošije i bolje rezultate od učenika XY.

Standardizirani rezultat učenika XY izračuna se na sljedeći način:

$$z_{XY} = \frac{230 - 215}{12} = \frac{15}{12} = 1,25$$

## 4. Transformacije podataka

Prikaz: Vjerovatnost postizanja lošijeg, odnosno boljeg rezultata od učenika XY



Na temelju procijenjene vjerovatnosti može se izračunati broj ispitanika s boljim odnosno lošijim rezultatom

$$d = p \cdot n = 0,1057 \cdot 257 = 27,16 \approx 27 \quad \text{i} \quad 257 - 27 = 30$$

jer je  $p = \frac{d}{n}$ , odnosno  $\% = \frac{d}{n} \cdot 100$

gdje je

- $p$  - proporcija ( $p=0,1057$ )
- $d$  - dio cjeline (broj učenika s boljim rezultatom od  $z=1,25$ )
- $n$  - cjelina (ukupan broj učenika  $n=257$ ).

**Primjer:** Deset učenika natjecalo se u tri atletske discipline: skok udalj (SD), trčanje na 100 metara (T100m) i bacanje kugle (BK) te je postiglo rezultate navedene u tablici. Potrebno je utvrditi ukupan poredak ovog natjecanja.

Učenik	SD	T100m	BK
AB	359	13,6	561
DF	321	13,9	550
JG	346	13,7	538
KL	332	14,0	490
DD	450	12,2	518
ED	314	14,1	551
TB	410	12,5	589
ZN	425	12,3	602
RG	369	13,5	547
EN	378	13,8	510

## 4. Transformacije podataka

**Prvi korak:** Izračunati aritmetičke sredine i standardne devijacije za svaku varijablu (disciplinu).

	SD	T100m	BK
$\bar{x}$	370,4	13,36	545,6
$\sigma$	45,66	0,73	34,21

**Dруги корак:** Transformirati originalne rezultate u z-vrijednosti.

$$z_{AB,SD} = \frac{359 - 370,4}{45,66} = \frac{-11,4}{45,66} = -0,25$$

Učenik	SD	T100m	BK
AB	-0,25	0,33	0,45
DF	-1,08	0,74	0,13
JG	-0,53	0,46	-0,22
KL	-0,84	0,87	-1,63
DD	1,74	-1,58	-0,81
ED	-1,24	1,01	0,16
TB	0,87	-1,17	1,27
ZN	1,20	-1,44	1,65
RG	-0,03	0,19	0,04
EN	0,17	0,60	-1,04

**Treći korak:** Prije kondenzacije rezultata varijable koje su obrnuto skalirane pomnožiti s -1, odnosno rezultatima promijeniti predznake.

Učenik	SD	T100m	BK
AB	-0,25	-0,33	0,45
DF	-1,08	-0,74	0,13
JG	-0,53	-0,46	-0,22
KL	-0,84	-0,87	-1,63
DD	1,74	1,58	-0,81
ED	-1,24	-1,01	0,16
TB	0,87	1,17	1,27
ZN	1,20	1,44	1,65
RG	-0,03	-0,19	0,04
EN	0,17	-0,60	-1,04

**Četvrti korak:** Standardizirane vrijednosti kondenzirati putem aritmetičke sredine.

$$\begin{aligned} \bar{z}_{AB} &= \frac{z_{AB,SD} + z_{AB,T100} + z_{AB,BK}}{3} = \\ &= \frac{-0,25 + (-0,33) + 0,45}{3} = -0,04 \end{aligned}$$

## 4. Transformacije podataka

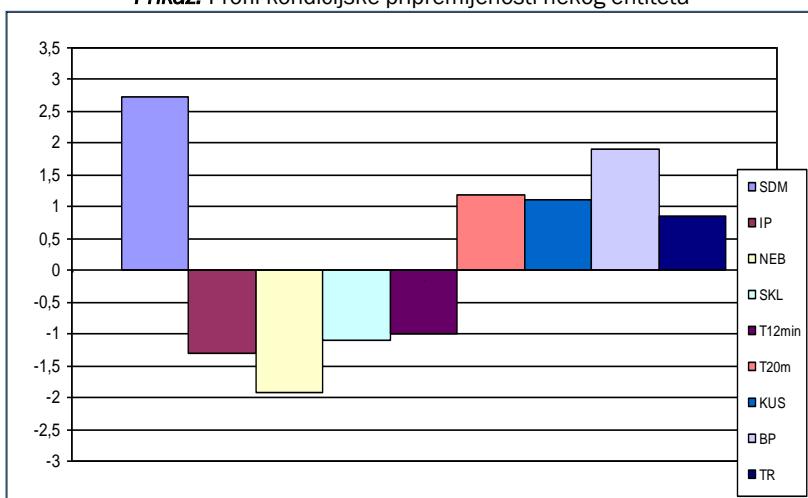
Učenik	SD	T100m	BK	$\bar{z}$
AB	-0,25	-0,33	0,45	-0,04
DF	-1,08	-0,74	0,13	-0,56
JG	-0,53	-0,46	-0,22	-0,41
KL	-0,84	-0,87	-1,63	-1,11
DD	1,74	1,58	-0,81	0,84
ED	-1,24	-1,01	0,16	-0,70
TB	0,87	1,17	1,27	1,10
ZN	1,20	1,44	1,65	1,43
RG	-0,03	-0,19	0,04	-0,06
EN	0,17	-0,60	-1,04	-0,49

**Petи korak:** Silazno sortirati učenike po izračunatoj prosječnoj z-vrijednosti i pridružiti im odgovarajuće rangove.

Učenik	RANG	$\bar{z}$
ZN	1	1,43
TB	2	1,10
DD	3	0,84
AB	4	-0,04
RG	5	-0,06
JG	6	-0,41
EN	7	-0,49
DF	8	-0,56
ED	9	-0,70
KL	10	-1,11

- ▶ Standardizacija podataka može se iskoristiti i u svrhu grafičkog prikazivanja rezultata entiteta u većem broju varijabli (npr. antropološki profil).

**Prikaz:** Profil kondicijske pripremljenosti nekog entiteta



## 4. Transformacije podataka

### Ostale transformacije podataka

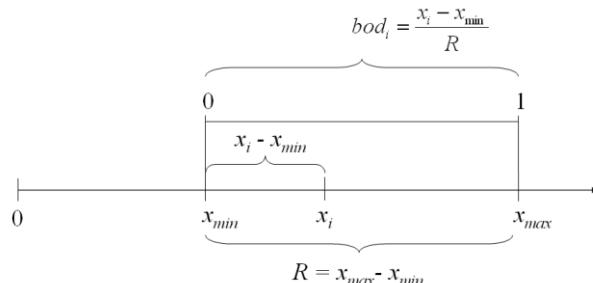
- Standardizirane rezultate je moguće transformirati na različite načine, zavisno o potrebi. Najčešće se transformiraju u vrijednosti na sljedećim skalamama:

- skala školskih ocjena (1-5)  $\rightarrow$   $ocjena = 3 + 0,83 \cdot z$
- skala T-skorova (0-100)  $\rightarrow$   $T - skor = 50 + 10 \cdot z$
- skala ocjena (0-10)  $\rightarrow$   $ocjena = 5 + z$

- Ako se rezultati ispitanika žele transformirati na skalu s proizvoljno određenom minimalnom i maksimalnom vrijednošću, odnosno proizvoljno određenim totalnim rasponom moguće je iskoristiti sljedeći postupak:

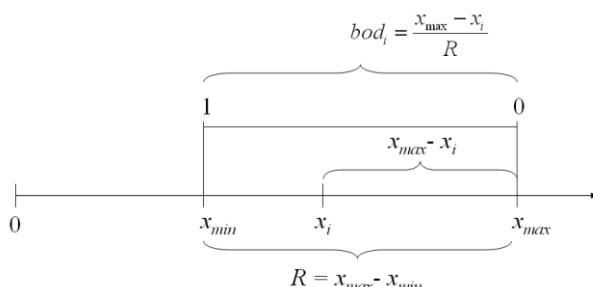
- normalno skalirane varijable  $\rightarrow bod_i = \frac{x_i - x_{\min}}{R}$

gdje je



- i obrnuto skalirane varijable  $\rightarrow bod_i = \frac{x_{\max} - x_i}{R}$

gdje je



pri čemu je

- $bod_i$  - transformirani rezultat ispitanika  $i$  u rasponu od 0 do 1
- $x_i$  - originalni rezultat ispitanika  $i$
- $x_{\min}$  - minimalna vrijednost varijable originalnih rezultata
- $x_{\max}$  - maksimalna vrijednost varijable originalnih rezultata
- $R$  - raspon varijable originalnih rezultata.

## 4. Transformacije podataka

- Opisanim se postupcima rezultati ispitanika transformiraju u relativne vrijednosti u odnosu na totalni raspon pri čemu 0 predstavlja najlošiji, a 1 najbolji rezultat.
- Izračunati bodovi transformiraju se na skalu s proizvoljno određenom minimalnom i maksimalnom vrijednošću sljedećom formulom:

$$bod'_i = x'_{\min} + (x'_{\max} - x'_{\min}) \cdot bod_i$$

odnosno

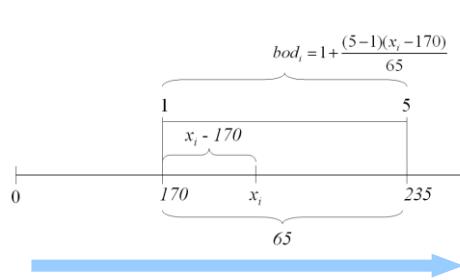
- za normalno skalirane varijable  $\rightarrow bod'_i = x'_{\min} + \frac{(x'_{\max} - x'_{\min})(x_i - x_{\min})}{R}$
- i
- za obrnuto skalirane varijable  $\rightarrow bod'_i = x'_{\min} + \frac{(x'_{\max} - x'_{\min})(x_{\max} - x_i)}{R}$

gdje je

- $bod'_i$  - transformirani rezultat ispitanika  $i$  u proizvoljno određenom rasponu
- $bod_i$  - transformirani rezultat ispitanika  $i$  u rasponu od 0 do 1
- $x_i$  - originalni rezultat ispitanika  $i$
- $x'_{\min}$  - proizvoljno određena minimalna vrijednost varijable transformiranih rezultata
- $x'_{\max}$  - proizvoljno određena maksimalna vrijednost varijable transformiranih rezultata
- $x_{\min}$  - minimalna vrijednost varijable originalnih rezultata
- $x_{\max}$  - maksimalna vrijednost varijable originalnih rezultata
- $R$  - totalni raspon varijable originalnih rezultata.

**Primjer:** U tablici su navedeni rezultati desetorice učenika u testu skok udalj s mjeseta (SDM). Potrebno je transformirati originalne rezultate učenika na skalu rezultata od 1 do 5. Transformacija se vrši sljedećim postupkom:

Učenik	SDM
AB	215
DF	195
JG	235
KL	220
DD	190
ED	170
TB	215
ZN	220
RG	190
EN	205



Učenik	bod
AB	3,77
DF	2,54
JG	5,00
KL	4,08
DD	2,23
ED	1,00
TB	3,77
ZN	4,08
RG	2,23
EN	3,15

## 4. Transformacije podataka

### Microsoft Excel

#### Postupci:

- ▶ **Utvrđivanje rangova:** Utvrđivanje ranga vrši se pomoću funkcije *Rank*. Funkcija se unosi u označeno polje matrice odabirom opcije *Function...* padajućeg izbornika *Insert*. U traku *Order* dijaloškog okvira za unos ove funkcije potrebno je upisati *1* ako se utvrđuje rang u obrnuto skaliranoj varijabli.
- ▶ **Izračunavanje centila:** Prije izračunavanja centila potrebno je utvrditi rangove entiteta pomoću funkcije *Rank* i broj entiteta u uzorku. Nakon toga se u prazno polje matrice unosi formula za izračunavanje centila.
- ▶ **Izračunavanje z-vrijednosti:** Izračunavanje z-vrijednosti vrši se pomoću funkcije *Standardize*. Funkcija se unosi u označeno polje matrice odabirom opcije *Function...* padajućeg izbornika *Insert*. Prethodno je potrebno izračunati aritmetičku sredinu (funkcija *Average*) i standardnu devijaciju (funkcija *Stdev*) varijable.

#### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Judo.xls* utvrdite rangove judeša na temelju rezultata u varijabli *BML* (*Bacanje medicinke iz ležanja na leđima!*)! Iskoristite funkciju *Rank!*
- ▶ U datoteci *Judo.xls* utvrdite centile judeša na temelju rezultata u varijabli *BML* (*Bacanje medicinke iz ležanja na leđima!*)!
- ▶ U datoteci *Judo.xls* izvršite standardizaciju varijabli, kondenzirajte ih aritmetičkom sredinom i utvrdite rangove ispitanika prema kondenziranom rezultatu!



### STATISTICA

#### Postupci:

- ▶ **Utvrđivanje rangova:** Utvrđivanje ranga vrši se putem dijaloškog okvira *Rank Order Values* koji se pokreće odabirom opcije *Rank...* padajućeg izbornika *Data*. U dijaloškom okviru potrebno je odabrati opcije *Type of ranks – regular* i *Ranks for ties – low* te za normalno skalirane varijable *Assign rank 1 to – largest value*, odnosno za obrnuto skalirane varijable *Assign rank 1 to –smallest value*.
- ▶ **Izračunavanje centila:** Prije izračunavanja centila potrebno je utvrditi rangove entiteta. Nakon toga se u traku *Long name* dijaloškog okvira za formatiranje varijabli unese *Spreadsheet formula* za izračunavanje centila (npr. Ako u uzorku ima 60 entiteta, a *BML* je naziv varijable u kojoj se nalaze prethodno utvrđeni rangovi entiteta onda *Spreadsheet formula* za izračunavanje centila treba glasiti:  $=(60+1-BML)/60*100$  ).
- ▶ **Izračunavanje z-vrijednosti:** Izračunavanje z-vrijednost izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Edit → Fill/Standardize Block → Standardize Columns*.

## 4. Transformacije podataka

- ▶ **Kondenzacija rezultata aritmetičkom sredinom:** Kondenzacija rezultata aritmetičkom sredinom izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Statistics of Block Data* → *Block Rows* → *Means*. Prije oba postupka potrebno je u matrici podataka označiti željene varijable.
- ▶ **Utvrđivanje vjerojatnosti putem normalne distribucije:** Izračunavanje površina ispod normalne distribucije vrši se pomoću dijaloskog okvira *Probability Distribution Calculator* koji se pokreće slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Probability Calculator* → *Distributions* → *Z (Normal)*.

---

### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Judo.sta* utvrdite rangove judaša na temelju rezultata u varijabli *BML* (*Bacanje medicinke iz ležanja na leđima*)!
  - ▶ U datoteci *Judo.sta* utvrdite centile judaša na temelju rezultata u varijabli *BML* (*Bacanje medicinke iz ležanja na leđima*)! Iskoristite *Spreadsheet formulu*!
  - ▶ U datoteci *Judo.sta* izvršite standardizaciju varijabli, kondenzirajte ih aritmetičkom sredinom i utvrdite rangove ispitanika prema kondenziranom rezultatu!
  - ▶ Aritmetička sredina svih službenih skokova udalj nekog atletičara iznosi 8,5 metara, a standardna devijacija 0,1 metar. Putem normalne distribucije procijenite kolika je vjerojatnost da ovaj atletičar na natjecanju izvede skok dalji od 9 metara!
- 

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006.). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 114-123.
- ▶ Petz, B. (2002.). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 97-110.
- ▶ Langer, M. (2004.). *Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows*. Zagreb: Miš, str. 75-103.

## 4. Transformacije podataka

### Pitanja i zadaci

1. Z-vrijednost izračunava se na temelju...

- a) ... rezultata i broja entiteta u uzorku.
- b) ... rezultata, standardne devijacije i aritmetičke sredine.
- c) ... ranga i aritmetičke sredine.
- d) ... ranga, totalnog raspona i aritmetičke sredine.

2. Kojom se formulom vrši transformacija z-vrijednosti u T-skor?

- a)  $T\text{-skor}=3+0,83z$
- b)  $T\text{-skor}=5+z$
- c)  $T\text{-skor}=50+10z$
- d)  $T\text{-skor}=1+3z$

3. Rang je...

- a) ... postotak entiteta utvrđen sortiranjem prema nekoj kvalitativnoj varijabli.
- b) ... broj entiteta utvrđen sortiranjem prema nekoj omjernoj varijabli.
- c) ... redni broj entiteta utvrđen sortiranjem prema nekoj kvantitativnoj varijabli.
- d) ... udio entiteta utvrđen sortiranjem prema nekoj intervalnoj varijabli.

4. Pokrenite datoteku *Judo.sta!* Koliki je standardizirani rezultat trećeg ispitanika (prema rednom broju u matrici podataka) u varijabli CUC?

- a) 0,72
- b) -0,54
- c) -0,28
- d) 0,51

5. Ako je z-vrijednost nekog ispitanika 0, to znači da je on u toj varijabli...

- a) ... ispodprosječan
- b) ... iznadprosječan.
- c) ... najlošiji.
- d) ... prosječan.

6. Ako je centil nekog ispitanika 100, to znači da on u toj varijabli ima...

- a) ... najbolji rezultat
- b) ... ispodprosječan rezultat.
- c) ... stoti rezultat.
- d) ... najlošiji rezultat.

7. Sportaši su na nekom testu postigli sljedeće rezultate: 3, 1, 3, 2, 3, 2, 4, 5, 5, 1, 2, 2. Koliki je rang ispitanika koji je dobio ocjenu 4 ako je varijabla obrnuto skalirana?

- a) 3
- b) 10
- c) 2
- d) 4

8. Centil se izračunava na temelju...

- a) ... rezultata i aritmetičke sredine.
- b) ... rezultata, aritmetičke sredine i standardne devijacije.
- c) ... ranga i broja entiteta u uzorku.
- d) ... ranga i totalnog raspona.

9. Na testiranju fleksibilnosti testom *Pretklon raskoračno* prisustvovalo je 90 sportaša. Da li se rezultat sportaša koji u testu ima 95. centil nalazi među 90 posto najboljih rezultata na testiranju?

- a) Ne.
- b) Navedeno nije moguće utvrditi na temelju prikazanih podataka.
- c) Ne, osim u 10% ovakvih testiranja.
- d) Da.

10. Ako je z-vrijednost nekog ispitanika -0,2, to znači da je on u toj varijabli...

- a) ... jako ispodprosječan.
- b) ... malo ispodprosječan.
- c) ... jako iznadprosječan.
- d) ... malo iznadprosječan.

11. U programu Microsoft Excel rang ispitanika moguće je utvrditi pomoću funkcije...

- a) ... Rang.
- b) ... Sort.
- c) ... Rank.
- d) ... Rk.

## 4. Transformacije podataka

### Pitanja i zadaci

12. Pokrenite datoteku *Judo.xls*! Koji originalni rezultat u varijabli *NEB* (varijabla je normalno skalirana) odgovara rangu 17?

- a) 11
- b) 36
- c) 10
- d) 26

13. Na nekom testiranju prisustvovalo je 430 sportaša. Z-vrijednost sportaša G.V. iznosi 3,6, aritmetička sredina 3,6 i standardna devijacija 0,71. Za sportaša G.V. ispravno je tvrditi da je na testiranju bio...

- a) ... prosječan.
- b) ... među 1% najlošijih.
- c) ... među 0,71% prosječnih.
- d) ... među 1% najboljih.

14. Ako je Markov rezultat u nekom testu 210, rang 4, aritmetička sredina 180, standardna devijacija 10, totalni raspon 70 i broj entiteta u uzorku 70, u koju z-vrijednost možemo transformirati njegov originalni rezultat?

- a) 3
- b) 0,43
- c) 4
- d) 7,2

15. Ako je Šimin rang u nekom testu 35, aritmetička sredina 180, standardna devijacija 10, totalni raspon 200 i broj entiteta u uzorku 200, u koji centil možemo transformirati njegov originalni rezultat?

- a) -14,85
- b) 35
- c) 65
- d) 83

16. Obrnuto skalirana varijabla je...

- a) ... varijabla u kojoj veća numerička vrijednost predstavlja bolji rezultat.
- b) ... varijabla u kojoj su rezultati sortirani od najvećeg prema najmanjem.
- c) ... varijabla u kojoj veća numerička vrijednost predstavlja lošiji rezultat.
- d) ... varijabla u kojoj su rezultati sortirani od najmanjeg prema najvećem.

17. Standardizirani rezultat je...

- a) ... odstupanje rezultata od aritmetičke sredine izraženo u dijelovima standardne devijacije.
- b) ... odstupanje ranga od aritmetičke sredine izraženo u dijelovima totalnog raspona.
- c) ... odstupanje rezultata od standardne devijacije izraženo u dijelovima aritmetičke sredine.
- d) ... odstupanje ranga od totalnog raspona izraženo u dijelovima aritmetičke sredine.

18. Ako je Perin rezultat u nekom testu 30, rang 12, aritmetička sredina 25, standardna devijacija 3, totalni raspon 20 i broj entiteta u uzorku 320, koliki je postotak ispitanika koji postižu bolje rezultate od Pere?

- a) 4,89
- b) 4,33
- c) 4,67
- d) 4,78

19. Ako je z-vrijednost nekog ispitanika 100, to znači da je on u toj varijabli...

- a) ... prosječan.
- b) ... iznadprosječan.
- c) ... najbolji.
- d) ... najlošiji.

20. U programu Microsoft Excel z-vrijednost moguće je izračunati pomoću funkcije...

- a) ... Z-value.
- b) ... Stdev.
- c) ... Z-score.
- d) ... Standardize.

## 4. Transformacije podataka

### Pitanja i zadaci

21. Kojom se formulom vrši transformacija z-vrijednosti u školsku ocjenu?

- a) ocjena=50+10z
- b) ocjena=1+z
- c) ocjena=3+0,83z
- d) ocjena=1+3z

22. Pokrenite datoteku *Škola.xls!* Koliki je centil prvog ispitanika (prema rednom broju u matrici podataka) u varijabli *IZVI* (varijabla je normalno skalirana)?

- a) 40
- b) 12
- c) 29
- d) 17

23. Na testiranju fleksibilnosti testom *Pretklon raskoračno* sudjelovalo je 160 učenica. Ako je Marijina z-vrijednost u testu -1,78, koliko je učenica na testiranju imalo lošiji rezultat od Marije?

- a) Približno 6.
- b) Približno 9.
- c) Približno 11.
- d) Približno 13.

24. Centil nekog rezultata ukazuje na to koliko posto entiteta ima...

- a) ... jednak ili bolji rezultat od tog rezultata.
- b) ... jednak ili lošiji rezultat od tog rezultata.
- c) ... bolji rezultat od tog rezultata.
- d) ... bolji ili lošiji rezultat od tog rezultata.

25. Ispravan primjer obrnuto skalirane varijable je...

- a) ... varijabla rezultata u bacanju kugle.
- b) ... varijabla dob.
- c) ... varijabla spol.
- d) ... varijabla rezultata u utrci na 1500 metara.

26. Normalno skalirana varijabla je...

- a) ... varijabla u kojoj veća numerička vrijednost predstavlja lošiji rezultat.
- b) ... varijabla u kojoj veća numerička vrijednost predstavlja bolji rezultat.
- c) ... varijabla u kojoj su rezultati sortirani od najvećeg prema najmanjem.
- d) ... varijabla u kojoj su rezultati sortirani od najmanjeg prema najvećem.

27. Sportaši su na nekom testu postigli sljedeće rezultate: 3, 1, 3, 2, 3, 2, 4, 5, 5, 1, 2, 2. Koliki je rang ispitanika koji je dobio ocjenu 4 ako je varijabla normalno skalirana?

- a) 2
- b) 4
- c) 10
- d) 3

28. Pokrenite datoteku *Judo.sta!* Koliki je centil prvog ispitanika (prema rednom broju u matrici podataka) u varijabli *SKL* (varijabla je normalno skalirana)?

- a) 17
- b) 51
- c) 83
- d) 9

29. Standardizacija podataka je transformacija podataka u...

- a) ... centile.
- b) ... standardne devijacije.
- c) ... rangove.
- d) ... z-vrijednosti.

30. Pokrenite datoteku *Judo.sta!* Koliki je rang petog ispitanika (prema rednom broju u matrici podataka) u varijabli *BML* (varijabla je normalno skalirana)?

- a) 37
- b) 27
- c) 30
- d) 20

1  
2  
3  
4

# 5

*Procjena aritmetičke sredine populacije*

6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

---

## 5. Procjena aritmetičke sredine populacije

### Sadržaj poglavlja

#### TEORIJSKE OSNOVE

- deskriptivna statistika
- inferencijalna statistika
- zaključivanje s uzorka entiteta na populaciju entiteta
- reprezentativnost uzorka entiteta
- obilježja varijable aritmetičkih sredina slučajnih uzoraka entiteta
- standardna pogreška aritmetičke sredine
- utjecaj veličine uzorka na standardnu pogrešku aritmetičke sredine
- utjecaj varijabilnosti obilježja na standardnu pogrešku aritmetičke sredine
- izračunavanje intervala u kojem se nalazi aritmetička sredina populacije
- pogreška statističkog zaključka
- t-vrijednost
- određivanje broja stupnjeva slobode pri procjeni aritmetičke sredine populacije
- obilježja Studentove t-distribucije
- odnos normalne distribucije i Studentove t-distribucije

#### MICROSOFT EXCEL

##### *Utvrđivanje t-vrijednosti*

- korištenje funkcije *Tinv*

#### STATISTICA

##### *Utvrđivanje t-vrijednosti*

- korištenje dijaloškog okvira *Probability Distribution Calculator*

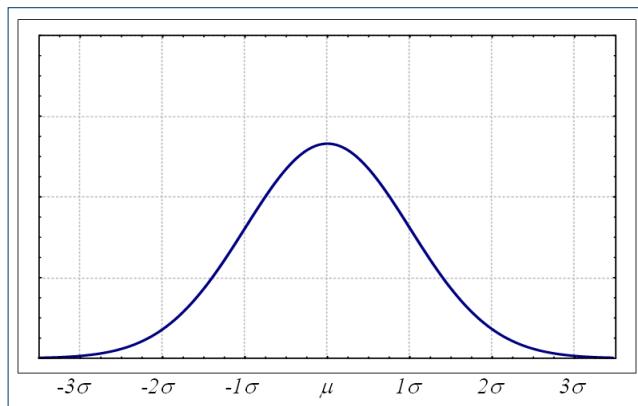
##### *Procjena aritmetičke sredine populacije*

- izračunavanje intervala u kojem se nalazi aritmetička sredina populacije putem dijaloškog okvira *Descriptive statistics*
- određivanje pogreške statističkog zaključka pri procjeni aritmetičke sredine populacije

## 5. Procjena aritmetičke sredine populacije

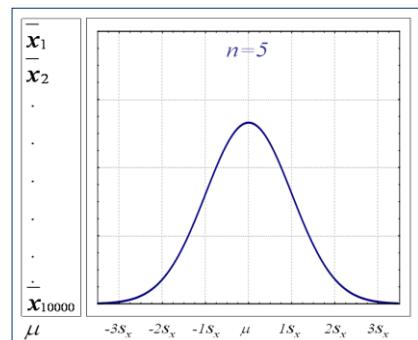
- ▶ Statističke metode dijele se na:
  - **metode deskriptivne statistike**, tj. postupke za utvrđivanje statističkih parametara koji se odnose isključivo na promatrani uzorak entiteta i
  - **metode inferencijalne statistike**, tj. postupke kojima se na temelju statističkih parametara utvrđenih na uzorku entiteta zaključci proširuju na populaciju koje je promatrani uzorak reprezentant.
- ▶ Reprezentativnost uzorka utječe na pogrešku s kojom se zaključci generaliziraju na populaciju, a zavisi o načinu odabira entiteta u uzorak i veličini, tj. broju entiteta u uzorku. Generalizacija zaključaka s uzorka na populaciju bit će ispravna samo ako se uzorak bira na način da svi entiteti iz populacije imaju jednaku vjerojatnost da budu izabrani u uzorak, odnosno ako se radi o slučajnom uzorku.
- ▶ Prepostavimo da iz neke konačne populacije ( $N=10000$ ) izračunamo aritmetičku sredinu ( $\mu$ ) i standardnu devijaciju ( $\sigma$ ) neke varijable  $X$  koja je normalno distribuirana.

Prikaz: Distribucija varijable  $X$



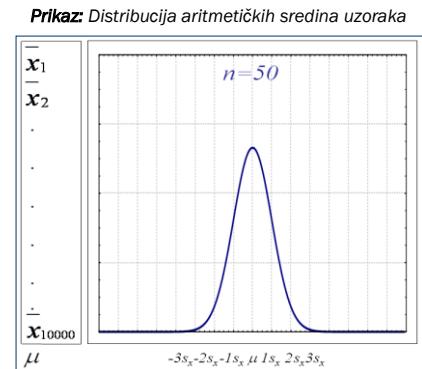
Prikaz: Distribucija aritmetičkih sredina uzoraka

- ▶ Prepostavimo da iz prethodno opisane populacije formiramo veliki broj slučajnih uzoraka (npr. 10000) veličine 5 entiteta te izračunamo aritmetičku sredinu svakog uzorka. Da li su sve aritmetičke sredine jednake? Kako su distribuirane aritmetičke sredine slučajnih uzoraka?



## 5. Procjena aritmetičke sredine populacije

- ▶ Na temelju prethodno izračunatih aritmetičkih sredina uzoraka moguće je zaključiti sljedeće:
  - aritmetičke sredine slučajnih uzoraka variraju
  - aritmetička sredina aritmetičkih sredina slučajno odabralih uzoraka jednake veličine tendirat će aritmetičkoj sredini populacije
  - distribucija aritmetičkih sredina slučajno odabralih uzoraka iste veličine bit će normalna, tj. Gaussova.
  
- ▶ Pretpostavimo da iz iste populacije formiramo 10000 slučajnih uzoraka veličine 50 entiteta te izračunamo aritmetičku sredinu svakog uzorka. Da li aritmetičke sredine uzoraka veličine 50 entiteta variraju više ili manje od aritmetičkih sredina uzoraka veličine 5 entiteta?
  
- ▶ Usporedbom varijabli aritmetičkih sredina uzoraka veličine 5 entiteta i uzoraka veličine 50 entiteta moguće je zaključiti da je standardna devijacija aritmetičkih sredina slučajnih uzoraka manja što je broj entiteta u uzorku veći.
  
- ▶ Osim o broju entiteta u uzorku, standardna devijacija aritmetičkih sredina slučajnih uzoraka zavisi i o varijabilnosti mјerenog obilježja (varijable) u populaciji. Što je varijabilnost obilježja u populaciji veća, to će i aritmetičke sredine slučajnih uzoraka više varirati.
  
- ▶ Standardna devijacija aritmetičkih sredina slučajnih uzoraka naziva se **standardna pogreška aritmetičke sredine**, označava se simbolom  $s_{\bar{x}}$ , a izračunava se formulom



gdje je

- $s$  - standardna devijacija uzorka
- $n$  - broj entiteta u uzorku.

- ▶ Interval u kojem se s određenom vjerojatnošću nalazi aritmetička sredina populacije moguće je procijeniti formulom

$$\bar{x} - t_p \cdot s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_p \cdot s_{\bar{x}}$$

## 5. Procjena aritmetičke sredine populacije

gdje je

- $\bar{x}$  - aritmetička sredina uzorka
- $s_{\bar{x}}$  - standardna pogreška aritmetičke sredine
- $t_p$  - vrijednost koja se za pogrešku  $p$  (u statističkom zaključivanju najčešće se koriste pogreške 0,01 ili 1%, i 0,05 ili 5%) i određeni broj stupnjeva slobode ( $df=n-1$ ) odredi na temelju Studentove t-distribucije.

**Primjer:** Na slučajno odabranom uzorku veličine 100 entiteta izračunata je aritmetička sredina  $\bar{x} = 180 \text{ cm}$  i standardna devijacija  $s = 10 \text{ cm}$ . Potrebno je procijeniti interval u kojem se s vjerojatnošću od 0,95 nalazi aritmetička sredina populacije.

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1 \text{ cm} \quad {}_{99}t_{0,05} = 1,98$$

$$\bar{x} - 1,98 \cdot 1 < \mu < \bar{x} + 1,98 \cdot 1 \quad 178,02 < \mu < 181,98$$



### Microsoft Excel

Postupci:

- ▶ **Utvrđivanje t-vrijednosti:** Utvrđivanje t-vrijednosti vrši se pomoću funkcije *Tinv*. Funkcija se unosi u označeno polje matrice odabirom opcije *Function...* padajućeg izbornika *Insert*. U traku *Probability* dijaloškog okvira za unos ove funkcije potrebno je upisati pogrešku  $p$ , a u traku *Deg\_freedom* broj stupnjeva slobode. Utvrđena t-vrijednost može se iskoristiti u svrhu procjene aritmetičke sredine populacije.

Zadaci:

- ▶ Parametri uzorka su:  $n=150$ ,  $\bar{x}=210 \text{ cm}$  i  $s=15 \text{ cm}$ . Uz pogrešku  $p<0,01$  izračunajte interval u kojem se nalazi aritmetička sredina populacije!

## 5. Procjena aritmetičke sredine populacije



STATISTICA

### Postupci:

- ▶ **Utvrđivanje t-vrijednosti:** Izračunavanje površina ispod Studentove *t-distribucije* vrši se pomoću dijaloškog okvira *Probability Distribution Calculator* koji se pokreće slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Probability Calculator* → *Distributions* → *t (Student)*. Za izračunavanje *t-vrijednosti* potrebno je označiti opcije *Inverse*, *Two-tailed* i *(1-Cumulative p)*, u traku *p* upisati pogrešku *p*, a u traku *df* broj stupnjeva slobode.
- ▶ **Procjena aritmetičke sredine populacije:** Procjena intervala u kojem se nalazi aritmetička sredina populacije izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Descriptive statistics* → *Advanced* → *Conf. limits for means*. U traku *Interval* potrebno je upisati vjerojatnost  $(1 - p)$ .

---

### Zadaci:

- ▶ Izračunajte koliko iznosi t-vrijednost ako je broj stupnjeva slobode  $df=22$ , a pogreška  $p=0,05$ ?
  - ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* uz pogrešku  $p=5\%$  procijenite interval u kojem se nalazi aritmetička sredina populacije za sve kvantitativne varijable!
- 

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 107-108, 124-134.
- ▶ Petz, B. (2002). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 111-126.
- ▶ Langer, M. (2004). *Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows*. Zagreb: Miš, str. 75-103.

## 5. Procjena aritmetičke sredine populacije

### Pitanja i zadaci

1. Studentova t-distribucija tendirat će normalnoj distribuciji...

- a) ... povećanjem broja stupnjeva slobode.
- b) ... povećanjem pogreške statističkog zaključka.
- c) ... povećanjem aritmetičkih sredina slučajnih uzoraka.
- d) ... povećanjem standardnih devijacija slučajnih uzoraka.

2. U programu Microsoft Excel t-vrijednost je moguće izračunati pomoću funkcije...

- a) ... *Ttest*.
- b) ... *Tvalue*.
- c) ... *Tscore*.
- d) ... *Tinv*.

3. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Što je broj entiteta u uzorku manji to će interval procjene aritmetičke sredine populacije biti manji.
- b) Što je pogreška statističkog zaključka veća to će interval procjene aritmetičke sredine populacije biti manji.
- c) Što je varijabilnost obilježja manja to će interval procjene aritmetičke sredine populacije biti veći.
- d) Što je standardna pogreška aritmetičke sredine manja to će interval procjene aritmetičke sredine populacije biti veći.

4. Na slučajno odabranom uzorku veličine 30 entiteta izračunati su sljedeći parametri: aritmetička sredina je 100, a standardna pogreška aritmetičke sredine je 2. Uz pogrešku  $p=0,01$  procijenite donju granicu intervala aritmetičke sredine populacije! Rješenje zadatka je:

- a) 94,49
- b) 98,99
- c) 96,60
- d) 99,38

5. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Što je varijabilnost obilježja veća to će interval procjene aritmetičke sredine populacije biti manji.
- b) Što je standardna pogreška aritmetičke sredine veća to će interval procjene aritmetičke sredine populacije biti manji.
- c) Što je broj entiteta u uzorku veći to će interval procjene aritmetičke sredine populacije biti manji.
- d) Što je pogreška statističkog zaključka manja to će interval procjene aritmetičke sredine populacije biti manji.

6. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Aritmetička sredina slučajnih uzoraka bit će manja što su uzorci manji.
- b) Aritmetičke sredine slučajnih uzoraka variraju.
- c) Aritmetička sredina aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka jednake veličine tendirat će aritmetičkoj sredini populacije.
- d) Distribucija aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka iste veličine bit će normalna.

7. Koliko iznosi t-vrijednost za 88 stupnjeva slobode i pogrešku  $p=1\%$ ?

- a) 2,63
- b) 1,66
- c) 2,37
- d) 1,29

8. U datoteci *Judo.sta* uz pogrešku  $p=0,05$  procijenite gornju granicu intervala u kojem se nalazi aritmetička sredina populacije za varijablu *SKL*. Rješenje zadatka je:

- a) 13,545
- b) 15,567
- c) 19,589
- d) 18,838

9. Standardna pogreška aritmetičke sredine bit će veća što je...

- a) ... reprezentativnost uzorka veća.
- b) ... varijabilnost obilježja veća.
- c) ... broj entiteta u uzorku veći.
- d) ... reprezentativnost obilježja veća.

## 5. Procjena aritmetičke sredine populacije

### Pitanja i zadaci

10. Deskriptivna statistika je...

- a) ... skup postupaka za utvrđivanje statističkih parametara na temelju kojih se može zaključivati isključivo o jednom entitetu.
- b) ... skup postupaka kojima se na temelju statističkih parametara utvrđenih na uzorku entiteta zaključci proširuju na populaciju koje je promatrani uzorak reprezentant.
- c) ... skup postupaka za utvrđivanje statističkih parametara na temelju kojih se može zaključivati isključivo o promatranom uzorku entiteta.
- d) ... skup postupaka kojima se na temelju statističkih parametara utvrđenih na jednom entitetu zaključci proširuju na populaciju koje je promatrani entitet reprezentant.

11. Koja je oznaka za broj stupnjeva slobode?

- a)  $bf$
- b)  $df$
- c)  $gf$
- d)  $pf$

12. Broj entiteta u uzorku je 35, aritmetička sredina uzorka je 220, a standardna devijacija uzorka je 10. Ako se na temelju ovih parametara vrši procjena aritmetičke sredine populacije uz pogrešku  $p=0,05$ , koliko iznosi odgovarajuća vrijednost?

- a) 2,73
- b) 0,68
- c) 2,03
- d) 2,26

13. Na slučajno odabranom uzorku veličine 56 entiteta izračunati su sljedeći parametri: aritmetička sredina je 100, a standardna devijacija 0. Uz pogrešku  $p=0,05$  procijenite donju granicu intervala aritmetičke sredine populacije! Rješenje zadatka je:

- a) 105
- b) 95
- c) 100
- d) 99

14. Standardna pogreška aritmetičke sredine bit će veća što je...

- a) ... broj entiteta u uzorku veći.
- b) ... aritmetička sredina uzorka sličnija aritmetičkoj sredini populacije.
- c) ... aritmetička sredina uzorka različitija od aritmetičke sredine populacije.
- d) ... broj entiteta u uzorku manji.

15. Standardna pogreška aritmetičke sredine je...

- a) ... aritmetička sredina svih mogućih slučajnih uzoraka određene veličine.
- b) ... standardna devijacija aritmetičkih sredina svih mogućih slučajnih uzorka određene veličine.
- c) ... aritmetička sredina standardnih devijacija svih mogućih prigodnih uzoraka određene veličine.
- d) ... standardna devijacija aritmetičkih sredina svih mogućih prigodnih uzoraka određene veličine.

16. Na slučajno odabranom uzorku veličine 36 entiteta izračunata je aritmetička sredina 300 cm i standardna devijacija 24 cm. Uz pogrešku  $p=0,05$  procijenite donju granicu intervala aritmetičke sredine populacije! Rješenje zadatka je:

- a) 289,1
- b) 292,1
- c) 288
- d) 281,91

17. Inferencijalna statistika je...

- a) ... skup postupaka za utvrđivanje statističkih parametara na temelju kojih se može zaključivati isključivo o promatranom uzorku entiteta.
- b) ... skup postupaka za utvrđivanje statističkih parametara na temelju kojih se može zaključivati isključivo o jednom entitetu.
- c) ... skup postupaka kojima se na temelju statističkih parametara utvrđenih na uzorku entiteta zaključci proširuju na populaciju koje je promatrani uzorak reprezentant.
- d) ... skup postupaka kojima se na temelju statističkih parametara utvrđenih na jednom entitetu zaključci proširuju na populaciju koje je promatrani entitet reprezentant.

## 5. Procjena aritmetičke sredine populacije

### Pitanja i zadaci

18. Što je broj entiteta u uzorku veći to će reprezentativnost uzorka biti...

- a) ... veća.
- b) ... manja.
- c) ... homogenija.
- d) ... varijabilnija.

19. Postupak procjene intervala aritmetičke sredine populacije je...

- a) ... metoda deskriptivne statistike.
- b) ... metoda parcijalne statistike.
- c) ... metoda sekvencialne statistike.
- d) ... metoda inferencijalne statistike.

20. Koliko iznosi standardna pogreška aritmetičke sredine ako je standardna devijacija u populaciji 0?

- a) 1
- b) 0
- c) plus beskonačno
- d) 100

21. Broj entiteta u uzorku je 100, aritmetička sredina uzorka je 25, a standardna devijacija uzorka je 7. Ako u svrhu procjene aritmetičke sredine populacije određujete t-vrijednost koliko će iznositi odgovarajući broj stupnjeva slobode?

- a) 75
- b) 93
- c) 24
- d) 99

22. Oblik t-distribucije određen je...

- a) ... aritmetičkom sredinom.
- b) ... standardnom devijacijom.
- c) ... brojem stupnjeva slobode.
- d) ... standardnom pogreškom aritmetičke sredine.

23. U datoteci *Ucenici-OS.sta* uz pogrešku  $p=1\%$  procijenite donju granicu intervala u kojem se nalazi aritmetička sredina populacije za varijablu *MPOL*. Rješenje zadatka je:

- a) 234,711
- b) 246,43
- c) 222,999
- d) 243,602

24. Standardna pogreška aritmetičke sredine zavisi o...

- a) ... broju entiteta u uzorku i aritmetičkoj sredini uzorka.
- b) ... aritmetičkoj sredini uzorka i standardnoj devijaciji uzorka.
- c) ... standardnoj devijaciji uzorka i aritmetičkoj sredini populacije.
- d) ... broju entiteta u uzorku i standardnoj devijaciji uzorka.

25. Postupak izračunavanja aritmetičke sredine uzorka ispitanika je...

- a) ... metoda inferencijalne statistike.
- b) ... metoda deskriptivne statistike.
- c) ... metoda parcijalne statistike.
- d) ... metoda sekvencialne statistike.

26. Reprezentativnost uzorka ispitanika zavisi o...

- a) ... načinu odabira entiteta u uzorak i veličini uzorka.
- b) ... rasponu uzorka i standardnoj devijaciji uzorka.
- c) ... standardiziranom rezultatu većine entiteta u uzorku.
- d) ... ničemu od navedenog.

27. Na slučajno odabranom uzorku veličine 100 entiteta izračunata je aritmetička sredina 50 cm i standardna devijacija 10 cm. Kolika je standardna pogreška aritmetičke sredine?

- a) 0,01
- b) 0,05
- c) 1
- d) 5

28. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) t-vrijednost je manja što je broj stupnjeva slobode manji.
- b) t-vrijednost ne zavisi o broju stupnjeva slobode.
- c) t-vrijednost je manja što broj stupnjeva slobode više tendira prema nuli.
- d) t-vrijednost je manja što je broj stupnjeva slobode veći.

## 5. Procjena aritmetičke sredine populacije

29. Izmjereni su svi entiteti neke konačne populacije veličine 500 entiteta. Aritmetička sredina populacije iznosi 12,43, a standardna devijacija 0,2. Uz pogrešku p=5% procijenite gornju granicu intervala aritmetičke sredine populacije!

Rješenje zadatka je:

- a) 12,45
- b) 12,43
- c) 12,82
- d) 12,66

30. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Aritmetička sredina svakog reprezentativnog uzorka jednaka je aritmetičkoj sredini populacije.
- b) Aritmetičke sredine nekih reprezentativnih uzoraka jednake su aritmetičkoj sredini populacije.
- c) Aritmetička sredina njednog reprezentativnog uzorka nije jednaka aritmetičkoj sredini populacije.
- d) Niti jedna od navedenih tvrdnji nije točna.

1  
2  
3  
4  
5

# 6 Studentov *t* - test

7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

---

## 6. Studentov $t$ - test

### Sadržaj poglavlja

#### TEORIJSKE OSNOVE

- statistička značajnost razlike
- t-test za nezavisne uzorke
- t-test za zavisne uzorke
- nulta hipoteza
- alternativna hipoteza
- obilježja varijable „slučajnih“ razlika između aritmetičkih sredina
- utjecaj veličine uzorka na standardnu pogrešku razlika aritmetičkih sredina
- utjecaj varijabilnosti obilježja na standardnu pogrešku razlika aritmetičkih sredina
- izračunavanje standardne pogreške razlika aritmetičkih sredina u t-testu za nezavisne uzorke
- izračunavanje standardne pogreške razlika aritmetičkih sredina u t-testu za zavisne uzorke
- t-omjer, tj. t-vrijednost
- kritična t-vrijednost
- određivanje broja stupnjeva slobode u t-testu za nezavisne uzorke
- određivanje broja stupnjeva slobode u t-testu za zavisne uzorke
- testiranje hipoteza

#### MICROSOFT EXCEL

##### Utvrđivanje kritične t-vrijednosti

- korištenje funkcije  $Tinv$

##### t-test

- korištenje funkcije  $Ttest$  u svrhu t-testa za nezavisne uzorke
- korištenje funkcije  $Ttest$  u svrhu t-testa za zavisne uzorke

#### STATISTICA

##### Utvrđivanje t-vrijednosti

- korištenje dijaloškog okvira *Probability Distribution Calculator*

##### t-test za nezavisne uzorke

- korištenje dijaloškog okvira *Difference tests: r, %, means*
- korištenje dijaloškog okvira *T-test for Independent Samples by Groups*

##### t-test za zavisne uzorke

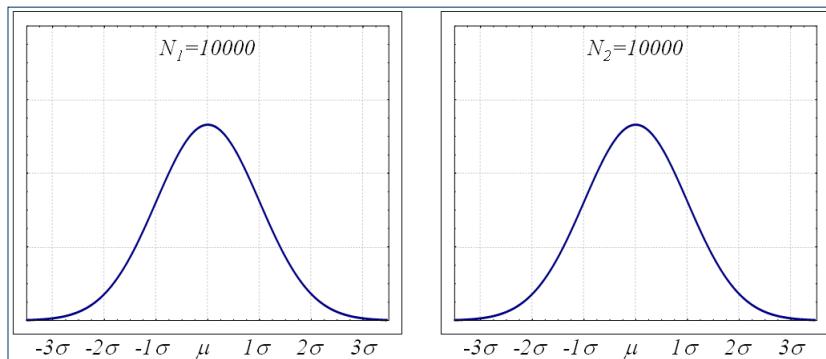
- korištenje dijaloškog okvira *T-test for Dependent Samples*

## 6. Studentov $t$ - test

- ▶  **$t$ -test** je statistički postupak koji je osmislio Wiliam Sealy Gosset - Student, a kojim se utvrđuje statistička značajnost razlike između dviju aritmetičkih sredina.
- ▶ **Statistički značajna razlika** je razlika utvrđena na uzorku entiteta, a za koju s visokim stupnjem sigurnosti (95% ili 99%) možemo tvrditi da se nije dogodila slučajno (kao posljedica slučajnog variranja aritmetičkih sredina uzoraka u odnosu na aritmetičku sredinu populacije).
- ▶  **$t$ -test za nezavisne uzorke** je postupak kojim se utvrđuje statistička značajnost razlike između aritmetičkih sredina dvaju uzoraka (dvaju nezavisnih skupova entiteta). Pri tome je moguće postaviti sljedeću nultu ( $H_0$ ) odnosno alternativnu ( $H_1$ ) hipotezu:
  - $H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$  - Uz pogrešku  $p$  ne možemo tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina analiziranih uzoraka statistički značajna.
  - $H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$  - Razlika između aritmetičkih sredina analiziranih uzoraka je statistički značajna uz pogrešku  $p$ .
- ▶  **$t$ -test za zavisne uzorke** je postupak kojim se utvrđuje statistička značajnost razlike između aritmetičkih sredina jednog uzorka mјerenog u dvije vremenske točke. Pri tome je moguće postaviti sljedeću nultu ( $H_0$ ) odnosno alternativnu ( $H_1$ ) hipotezu:
  - $H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$  - Uz pogrešku  $p$  ne možemo tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina prvog i drugog mјerenja statistički značajna.
  - $H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$  - Razlika između aritmetičkih sredina prvog i drugog mјerenja je statistički značajna uz pogrešku  $p$ .
- ▶ Prepostavimo da su u neke dvije konačne populacije ( $N_1=10000$  i  $N_2=10000$ ) aritmetičke sredine ( $\mu_1$  i  $\mu_2$ ) neke normalno distribuirane varijable  $X$  potpuno jednake, tj. razlika između aritmetičkih sredina ne postoji.



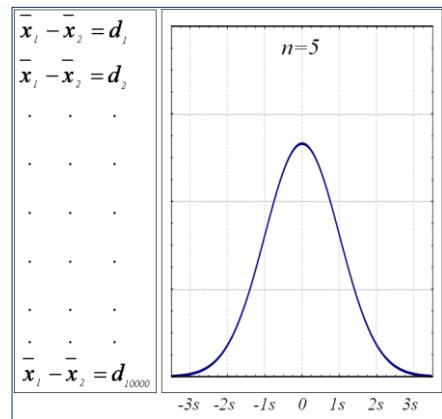
Prikaz: Distribucija varijable  $X$  u prvoj i drugoj populaciji



## 6. Studentov $t$ -test

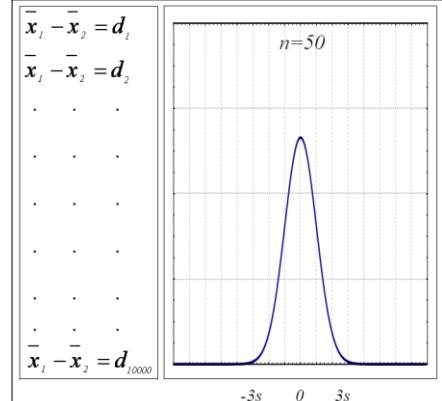
- ▶ Prepostavimo da iz prethodno opisanih populacija formiramo veliki broj parova slučajnih uzoraka (npr. 10 000) veličine 5 entiteta te izračunamo razliku između aritmetičkih sredina svakog para. Da li su sve razlike jednake nuli? Kako su distribuirane „slučajne razlike“ između aritmetičkih sredina?
- ▶ Na temelju prethodno izračunatih razlika između aritmetičkih sredina slučajnih uzoraka možemo zaključiti sljedeće:
- ako razlika između aritmetičkih sredina populacija ne postoji, razlika između aritmetičkih sredina slučajnih uzoraka nije uvijek jednaka nuli
  - razlike između aritmetičkih sredina slučajnih uzoraka variraju
  - aritmetička sredina „slučajnih razlika“ tendirat će nuli
  - distribucija „slučajnih razlika“ bit će normalna.

Prikaz: Distribucija „slučajnih razlika“



- ▶ Prepostavimo da iz istih populacija formiramo 10000 parova slučajnih uzoraka veličine 50 entiteta te izračunamo razliku između aritmetičkih sredina svakog para. Da li razlike između aritmetičkih sredina uzorka veličine 50 entiteta variraju više ili manje nego razlike između aritmetičkih sredina uzorka veličine 5 entiteta?
- ▶ Usporedbom varijabli razlika između aritmetičkih sredina parova slučajnih uzoraka veličine 5 entiteta i parova slučajnih uzoraka veličine 50 entiteta moguće je zaključiti da je standardna devijacija „slučajnih razlika“ manja što je broj entiteta u uzorku veći.
- ▶ Osim o broju entiteta u uzorku, standardna devijacija „slučajnih razlika“ zavisi i o varijabilnosti istraživanog obilježja (varijable) u populaciji. Što je varijabilnost obilježja u populaciji veća to će i „slučajne razlike“ više varirati.
- ▶ Standardna devijacija „slučajnih razlika“ naziva se **standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina**, a označava se simbolom  $s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ .

Prikaz: Distribucija „slučajnih razlika“



## 6. Studentov $t$ - test

- Standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina u ***t-testu za nezavisne uzorke*** izračunava se formulom

$$S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

gdje je

- $s_1$  - standardna devijacija prvog uzorka
- $s_2$  - standardna devijacija drugog uzorka
- $n_1$  - broj entiteta u prvom uzorku
- $n_2$  - broj entiteta u drugom uzorku.

- Standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina u ***t-testu za zavisne uzorke*** izračunava se formulom

$$S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{n} - 2 \cdot r \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{s_2}{\sqrt{n}}}$$

gdje je

- $s_1$  - standardna devijacija prvog mjerena
- $s_2$  - standardna devijacija drugog mjerena
- $n$  - broj entiteta u uzorku
- $r$  - korelacija između varijabli prvog i drugog mjerena.

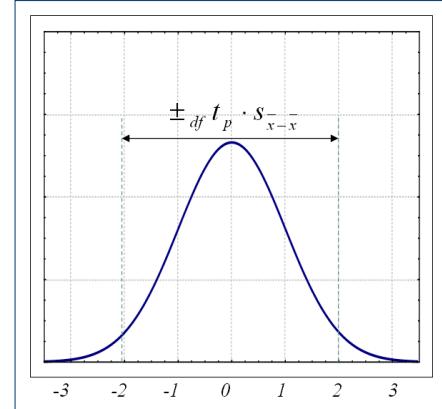
**Prikaz:** Interval u kojem se nalazi ~95% „slučajnih razlika“

- Ako je razlika između dviju aritmetičkih sredina  $\text{st} \cdot t_p$  puta veća od standardne pogreške razlika aritmetičkih sredina onda je vjerojatnost da razlika ne postoji u populaciji manja od  $p$ . Omjer razlike između dviju aritmetičkih sredina i standardne pogreške razlika naziva se ***t-omjer*** ili ***t-vrijednost***, označava se s  $t$ , a testira se putem t-distribucije.
- ***t-omjer***, tj. ***t-vrijednost*** ( $t$ ) izračunava se jednako u *t-testu za nezavisne uzorke* i u *t-testu za zavisne uzorke* i to pomoću sljedeće formule

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

gdje je

- $\bar{x}_1$  - aritmetička sredina prvog uzorka/mjerena
- $\bar{x}_2$  - aritmetička sredina drugog uzorka/mjerena
- $S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$  - standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina.



## 6. Studentov $t$ - test

- ▶ U  **$t$ -testu za nezavisne uzorke** kritična  $t$ -vrijednost ( $t_{df,p}$ ) određuje se na temelju broja stupnjeva slobode  $df=n_1-1+n_2-1$  i pogreške statističkog zaključka  $p$  (npr.  $p=0,05$  ili  $p=0,01$ ). Testiranje hipoteza vrši se na sljedeći način:
  - $|t| < t_{df,p} \Rightarrow H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$  (uz pogrešku  $p$  ne možemo tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina analiziranih uzoraka statistički značajna)
  - $|t| \geq t_{df,p} \Rightarrow H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$  (razlika između aritmetičkih sredina analiziranih uzoraka statistički je značajna uz pogrešku  $p$ )
- ▶ U  **$t$ -testu za zavisne uzorke** kritična  $t$ -vrijednost ( $t_{df,p}$ ) određuje se na temelju broja stupnjeva slobode  $df=n-1$  i pogreške statističkog zaključka  $p$  (npr.  $p=0,05$  ili  $p=0,01$ ). Testiranje hipoteza vrši se na sljedeći način:
  - $|t| < t_{df,p} \Rightarrow H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$  (uz pogrešku  $p$  ne možemo tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina prvog i drugog mjerjenja statistički značajna)
  - $|t| \geq t_{df,p} \Rightarrow H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$  (razlika između aritmetičkih sredina prvog i drugog mjerjenja statistički je značajna uz pogrešku  $p$ )

**Primjer:** Učenici 1.a i 1.b razreda testirani su na kraju školske godine testom za procjenu fleksibilnosti *Pretklon raskoračno* i dobiveni su sljedeći rezultati:

$$\begin{array}{lll} n_{1a} = 25 & \bar{x}_{1a} = 34 & s_{1a} = 10 \\ n_{1b} = 27 & \bar{x}_{1b} = 38 & s_{1b} = 18 \end{array}$$

Utvrdi da li se aritmetičke sredine 1.a i 1.b razreda statistički značajno razlikuju na razini pogreške  $p=0,01$ !

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_{1a}^2}{n_1} + \frac{s_{1b}^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{10^2}{25} + \frac{18^2}{27}} = 4$$

$$|t| = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \right| = \left| \frac{34 - 38}{4} \right| = |-1| = 1$$

$$df = n_1 - 1 + n_2 - 1 = 25 - 1 + 27 - 1 = 50$$

$$t_{df,p} = t_{50,01} = 2,68$$

$|t| < t_{df,p} \Rightarrow H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$  (na razini pogreške  $p=0,01$  ne možemo tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina 1.a i 1.b razreda statistički značajna)

## 6. Studentov t - test

### Microsoft Excel

#### Postupci:

- ▶ **Utvrđivanje t-vrijednosti:** Utvrđivanje kritične t-vrijednosti vrši se pomoću funkcije *Tinv*. Funkcija se unosi u označeno polje matrice odabirom opcije *Function...* padajućeg izbornika *Insert*. U traku *Probability* dijaloškog okvira za unos ove funkcije potrebno je upisati pogrešku  $p$ , a u traku *Deg\_freedom* broj stupnjeva slobode.
- ▶ **t-test:** Utvrđivanje minimalne pogreške s kojom je moguće zaključiti da se dvije aritmetičke sredine statistički značajno razlikuju vrši se pomoću funkcije *Ttest*. Putem traka *Array 1* i *Array 2* potrebno je definirati niz podataka prvog odnosno drugog uzorka/mjerenja, u traku *Tails* unijeti vrijednost 2, a u traku *Type* vrijednost 1 ako se provodi t-test za zavisne uzorke, odnosno 2 ako se provodi t-test za nezavisne uzorke.

#### Zadaci:

- ▶ Parametri uzoraka su:  $n_1=55$ ,  $\bar{x}_1=220$ ,  $s_1=15$ ,  $n_2=61$ ,  $\bar{x}_2=195$ ,  $s_2=10$ . Uz pogrešku  $p=0,05$  testirajte da li se aritmetičke sredine ovih uzoraka statistički značajno razlikuju!
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.xls* uz pogrešku  $p=0,01$  testirajte da li se aritmetičke sredine učenika 1. i 2. razreda u varijabli *MPOL* statistički značajno razlikuju!



### STATISTICA

#### Postupci:

- ▶ **Utvrđivanje kritične t-vrijednosti:** Izračunavanje površina ispod Studentove *t-distribucije* vrši se pomoću dijaloškog okvira *Probability Distribution Calculator* koji se pokreće slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Probability Calculator* → *Distributions* → *t (Student)*. Za izračunavanje *t-vrijednosti* potrebno je označiti opcije *Inverse*, *Two-tailed* i *(1-Cumulative p)*, u traku *p* upisati pogrešku  $p$ , a u traku *df* broj stupnjeva slobode.
- ▶ **t-test za nezavisne uzorke:**
  - t-test za nezavisne uzorke na prethodno utvrđenim deskriptivnim parametrima izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Difference tests: r, %, means* → *Difference between two means (normal distribution)*. U trake *M 1* i *M 2* potrebno je upisati aritmetičku sredinu prvog odnosno drugog uzorka, u trake *StDv 1* i *StDv 2* standardne devijacije, a u trake *N1* i *N2* veličine uzoraka.
  - t-test za nezavisne uzorke na temelju originalnih podataka izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *t-test, independent, by groups*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *Variables* potrebno je označiti selektorsku varijablu (*Grouping variable*) i jednu ili više zavisnih varijabli (*Dependent variables*).

## 6. Studentov t - test

- ▶ **t-test za zavisne uzorke:** t-test za zavisne uzorke na temelju originalnih podataka izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *t-test, dependent samples*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *Variables* potrebno je označiti varijablu prvog mjerena (*First variable list*) i varijablu drugog mjerena (*Second variable list*).

---

### Zadaci:

- ▶ Izračunajte koliko iznosi kritična t-vrijednost ako je broj stupnjeva slobode  $df=22$ , a pogreška  $p=0,05$ ?
  - ▶ Parametri uzoraka su:  $n_1=30$ ,  $\bar{x}_1=17$ ,  $s_1=1$ ,  $n_2=34$ ,  $\bar{x}_2=22$ ,  $s_2=2$ . Uz pogrešku  $p=0,05$  testirajte da li se aritmetičke sredine ovih uzoraka statistički značajno razlikuju!
  - ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* uz pogrešku  $p=0,01$  testirajte da li se aritmetičke sredine učenika 3. i 4. razreda u varijabli *MPOL* statistički značajno razlikuju!
  - ▶ U datoteci *POD.sta* uz pogrešku  $p=0,01$  testirajte da li se aritmetičke sredine prvog mjerena (*MKUS\_I*) i drugog mjerena (*MKUS\_F*) statistički značajno razlikuju!
- 

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). **Kvantitativne metode.** Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 135-149.
- ▶ Petz, B. (2002). **Osnovne statističke metode za nematematičare.** Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 126-151.
- ▶ Langer, M. (2004). **Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows.** Zagreb: Miš, str. 75-103.

## 6. Studentov t - test

### Pitanja i zadaci

1. Studentovim t-testom za zavisne uzorke utvrđuje se...

- a) ... statistička značajnost razlike između aritmetičkih sredina dviju grupa ispitanika.
- b) ... razlika između zavisnih standardnih devijacija sredina dvaju uzoraka.
- c) ... razlika između nezavisnih standardnih devijacija dvaju uzoraka.
- d) ... statistička značajnost razlike između aritmetičkih sredina dvaju mjerenja jedne te iste grupe ispitanika.

2. Nulta hipoteza označava se kraticom...

- a) ...  $O_H$
- b) ...  $H_0$
- c) ...  $N_0$
- d) ...  $O_N$

3. Studentov t-test je ...

- a) ... metoda inferencijalne statistike.
- b) ... metoda deskriptivne statistike.
- c) ... metoda parcijalne statistike.
- d) ... metoda sekvenčijalne statistike.

4. Ako se na uzorku od 30 nogometnika t-testom želi utvrditi da li postoji statistički značajna razlika između aritmetičke sredine inicijalnog i finalnog mjerjenja neke sposobnosti, koliko iznosi broj stupnjeva slobode pri određivanju kritične t-vrijednosti?

- a) 0,05
- b) 30
- c) 29
- d) 0,01

5. U programu Microsoft Excel pokrenite datoteku *Ucenici-OS.xls!* T-testom utvrdite da li se aritmetičke sredine učenika ( $spol=m$ ) i učenica ( $spol=z$ ) u varijabli *AOP* statistički značajno razlikuju! Koliko iznosi minimalna pogreška s kojom je moguće zaključiti da se aritmetičke sredine učenika i učenica statistički značajno razlikuju?

- a) 0,083
- b) 0,044
- c) 0,094
- d) 0,098

6. U Studentovom t-testu t-omjer je...

- a) ... omjer razlike između dviju aritmetičkih sredina i standarde pogreške razlike između aritmetičkih sredina.
- b) ... omjer standardne pogreške razlike između aritmetičkih sredina i zbroja dviju aritmetičkih sredina.
- c) ... omjer standardne pogreške razlike između dviju aritmetičkih sredina i statističke značajnosti razlike između dviju aritmetičkih sredina.
- d) ... omjer statističke značajnosti razlike između dviju aritmetičkih sredina i zbroja standardnih pogrešaka razlike između aritmetičkih sredina.

7. Ako se t-testom za nezavisne uzorke utvrdi da je izračunati t-omjer veći od kritične t-vrijednosti onda je ispravno...

- a) ... prihvatiti nultu hipotezu.
- b) ... prihvatiti alternativnu hipotezu.
- c) ... prihvatiti negativnu hipotezu.
- d) ... prihvatiti iterativnu hipotezu.

8. U datoteci *Ucenici-OS.xls* utvrdite da li se aritmetičke sredine učenika ( $spol=m$ ) i učenica ( $spol=z$ ) u varijabli *MPRR* statistički značajno razlikuju! Koliko iznosi minimalna pogreška s kojom je moguće zaključiti da se aritmetičke sredine učenika i učenica statistički značajno razlikuju?

- a) 0,057
- b) 0,038
- c) 0,044
- d) 0,063

9. Kritična t-vrijednost u t-testu za zavisne uzorke zavisi o...

- a) ... broju entiteta, standardnim devijacijama i korelaciji između rezultata.
- b) ... pogrešci statističkog zaključka i aritmetičkim sredinama.
- c) ... broju stupnjeva slobode i pogrešci statističkog zaključka.
- d) ... broju stupnjeva slobode, standardnim devijacijama i korelacijama između rezultata.

## 6. Studentov t - test

### Pitanja i zadaci

10. U t-testu za nezavisne uzorke standardna će pogreška razlika aritmetičkih sredina biti manja...

- a) ... što su standardne devijacije uzorka veće.
- b) ... što je korelacija među rezultatima manja.
- c) ... što je broj entiteta u uzorcima veći.
- d) ... što je korelacija među rezultatima veća.

11. Aritmetička sredina 1.a razreda je 15, standardna devijacija je 6, a broj učenika u razredu je 28. Aritmetička sredina 1.b. razreda je 12, standardna devijacija je 4, a broj učenika u razredu je 30. Koliko iznosi minimalna pogreška s kojom možemo zaključiti da se aritmetičke sredine 1.a i 1.b razreda statistički značajno razlikuju?

- a) 0,576
- b) 0,830
- c) 0,332
- d) 0,028

12. Na slučajnom uzorku od 26 košarkaša izračunati su sljedeći parametri: aritmetička sredina je 176, medijan 175, standardna devijacija je 12, a raspon je 44. Na slučajnom uzorku od 32 nogometnika izračunati su sljedeći parametri: aritmetička sredina je 180, medijan 178, standardna devijacija je 10, a raspon je 38. Koliko iznosi odgovarajuća standardna pogreška razlike aritmetičkih sredina?

- a) 3,52
- b) 2,94
- c) 2,95
- d) 1,69

13. Studentovim t-testom je utvrđeno da je razlika između dviju aritmetičkih sredina statistički značajna na razini pogreške 1%. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Razlika je statistički značajna na razini pogreške 5%.
- b) Izračunata t-vrijednost je veća od kritične t-vrijednosti za 1%.
- c) Izračunata t-vrijednost je veća od kritične t-vrijednosti za  $p=0,05$ .
- d) Izračunata t-vrijednost je manja od kritične t-vrijednosti za  $p=0,01$ .

14. U t-testu za nezavisne uzorke primjer nulte hipoteze mogao bi biti:

- a) Razlika između aritmetičkih sredina analiziranih uzorka statistički je značajna uz pogrešku 5%.
- b) Razlika između aritmetičkih sredina prvog i drugog mjerenja statistički je značajna uz pogrešku 5%.
- c) Uz pogrešku 5% ne možemo tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina učenika 1.a i učenika 1.b razreda statistički značajna.
- d) Uz pogrešku 5% ne možemo tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina inicijalnog i finalnog mjerenja učenika 1.a razreda statistički značajna.

15. Za utvrđivanje statističke značajnosti razlike između aritmetičkih sredina inicijalnog i finalnog stanja slučajnog uzorka plivača potrebno je koristiti...

- a) ... t-test za zavisne uzorke.
- b) ... t-test za nezavisne uzorke.
- c) ... t-test za zavisne i t-test za nezavisne uzorke.
- d) ... procjenu aritmetičke sredine populacije.

16. Studentov t-test je statistička metoda za...

- a) ... utvrđivanje razlike između dviju aritmetičkih sredina.
- b) ... utvrđivanje statističke značajnosti razlike između dviju aritmetičkih sredina.
- c) ... utvrđivanje statističke značajnosti razlike između dviju standardnih devijacija.
- d) ... utvrđivanje razlike između dviju standardnih devijacija.

17. U t-testu za zavisne uzorke primjer nulte hipoteze mogao bi biti:

- a) Uz pogrešku 5% ne možemo tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina učenika 1.a i učenika 1.b razreda statistički značajna.
- b) Uz pogrešku 5% ne možemo tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina inicijalnog i finalnog mjerenja učenika 1.a razreda statistički značajna.
- c) Razlika između aritmetičkih sredina prvog i drugog mjerenja statistički je značajna uz pogrešku 5%.
- d) Razlika između aritmetičkih sredina analiziranih uzorka statistički je značajna uz pogrešku 5%.

## 6. Studentov t - test

### Pitanja i zadaci

18. U t-testu za zavisne uzorke standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina biti će veća...

- a) ... što je broj entiteta u uzorku veći.
- b) ... što su standardne devijacije manje.
- c) ... što je korelacija među rezultatima manja.
- d) ... što je reprezentativnost uzorka veća.

19. Aritmetička sredina 1.a razreda je 25, a broj učenika u razredu je 30. Aritmetička sredina 1.b. razreda je 25, a standardna devijacija je 2. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Aritmetičke sredine 1.a i 1.b razreda ne razlikuju se statistički značajno na razini pogreške  $p=0,05$ .
- b) Aritmetičke sredine 1.a i 1.b razreda razlikuju se statistički značajno na razini pogreške  $p=0,05$ .
- c) Iz navedenih parametara nije moguće utvrditi da li se aritmetičke sredine uzorka statistički značajno razlikuju.
- d) Nijedna od ponuđenih tvrdnji nije točna.

20. Studentovim t-testom za nezavisne uzorke utvrđuje se...

- a) ... razlika između nezavisnih aritmetičkih sredina dvaju uzoraka.
- b) ... statistička značajnost razlike između aritmetičkih sredina dviju grupa ispitanika.
- c) ... statistička značajnost razlike između aritmetičkih sredina dvaju mjerena jedne te iste grupe ispitanika.
- d) ... razlika između standardnih devijacija dvaju nezavisnih uzoraka.

21. Razlika između aritmetičkih sredina prvog i drugog mjerena statistički je značajna uz pogrešku 5%. Prethodno navedena tvrdnja je primjer...

- a) ... nulte hipoteze.
- b) ... iterativne hipoteze.
- c) ... negativne hipoteze.
- d) ... alternativne hipoteze.

22. Aritmetička sredina 1.a razreda je 25, standardna devijacija je 6, a broj učenika u razredu je 9. Aritmetička sredina 1.b. razreda je 22, standardna devijacija je 4, a broj učenika u razredu je 12. Ako se t-testom želi utvrditi da li se aritmetičke sredine 1.a i 1.b razreda statistički značajno razlikuju uz 1% pogreške, koliko iznosi kritična t-vrijednost?

- a) 2,83
- b) 2,85
- c) 1,73
- d) 2,86

23. Aritmetička sredina inicijalnog mjerena neke sposobnosti na slučajnom uzorku entiteta je 122, aritmetička sredina finalnog mjerena je 127, odgovarajuća standardna pogreška razlike aritmetičkih sredina iznosi 2, a kritična t-vrijednost za pogrešku 1% iznosi 2,63. Studentovim t-testom utvrdite da li se aritmetičke sredine inicijalnog i finalnog mjerena statistički značajno razlikuju na razini pogreške 1%! Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Aritmetičke sredine inicijalnog i finalnog mjerena razlikuju se statistički značajno uz pogrešku 1%.
- b) Uz pogrešku 1% nije moguće tvrditi da se aritmetičke sredine inicijalnog i finalnog mjerena statistički značajno razlikuju.
- c) Aritmetičke sredine inicijalnog i finalnog mjerena se ne razlikuju.
- d) Na temelju navedenih parametara nije moguće provesti t-test.

24. U datoteci POD.sta utvrđite da li se aritmetičke sredine inicijalnog mjerena testom MDM ( $MDM_I$ ) i finalnog mjerena testom MDM ( $MDM_F$ ) statistički značajno razlikuju! Koliko iznosi minimalna pogreška s kojom je moguće zaključiti da se aritmetičke sredine inicijalnog i finalnog mjerena testom MDM statistički značajno razlikuju?

- a) 0,270
- b) 0,977
- c) 0,787
- d) 0,017

## 6. Studentov t - test

### Pitanja i zadaci

25. U programu Microsoft Excel funkcija Ttest omogućava...

- a) ... provođenje t-testa uz definiranje broja stupnjeva slobode i pogreške statističkog zaključka.
- b) ... provođenje t-testa uz definiranje jednog odnosno drugog niza podataka.
- c) ... izračunavanje kritične t-vrijednosti uz definiranje jednog odnosno drugog niza podataka.
- d) ... izračunavanje kritične t-vrijednosti uz definiranje broja stupnjeva slobode i pogreške statističkog zaključka.

26. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Razlika između aritmetičkih sredina dvaju reprezentativnih uzoraka iz iste populacije uvijek je jednaka nuli.
- b) Razlika između aritmetičkih sredina dvaju reprezentativnih uzoraka iz iste populacije uvijek je jednaka aritmetičkoj sredini populacije.
- c) Razlika između aritmetičkih sredina dvaju reprezentativnih uzoraka iz iste populacije uvijek će biti jednaka prosječnom odstupanju rezultata od aritmetičke sredine u populaciji.
- d) Razlika između aritmetičkih sredina dvaju reprezentativnih uzoraka iz iste populacije nije uvijek jednaka nuli.

27. U t-testu za nezavisne uzorke standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina zavisi o...

- a) ... broju entiteta u uzorcima i standardnim devijacijama uzorka.
- b) ... broju entiteta u uzorcima, aritmetičkim sredinama uzorka i korelaciji među rezultatima.
- c) ... aritmetičkim sredinama uzorka i standardnim devijacijama uzorka.
- d) ... standardnim devijacijama uzorka, broju entiteta u uzorcima i korelaciji među rezultatima.

28. Razlika između aritmetičkih sredina slučajnog uzorka judeša kadeta i slučajnog uzorka judeša juniora u nekom testu je 4, a kritična t-vrijednost za pogrešku 1% iznosi 2,63. Studentovim t-testom utvrdite da li se aritmetičke sredine judeša kadeta i judeša juniora statistički značajno razlikuju na razini pogreške 1%! Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Uz pogrešku 1% nije moguće tvrditi da se aritmetičke sredine judeša kadeta i judeša juniora statistički značajno razlikuju.
- b) Na temelju navedenih parametara nije moguće provesti t-test.
- c) Aritmetičke sredine judeša kadeta i judeša juniora razlikuju se statistički značajno uz pogrešku 1%.
- d) Aritmetičke sredine judeša kadeta i judeša juniora se ne razlikuju.

29. Statistički značajna razlika je...

- a) ... razlika utvrđena na uzorcima entiteta, a za koju s visokim stupnjem sigurnosti možemo tvrditi da postoji i među populacijama entiteta.
- b) ... razlika utvrđena na uzorcima entiteta uz pogrešku veću od  $p=0,05$  ili  $p=0,01$ .
- c) ... razlika utvrđena na uzorcima entiteta, a za koju s visokim stupnjem sigurnosti možemo tvrditi da ne postoji i među populacijama entiteta.
- d) ... razlika utvrđena na uzorcima entiteta uz pogrešku manju od  $p=0,05$  ili  $p=0,01$ .

30. U t-testu se izračunata t-vrijednost testira putem...

- a) ... t-rangova.
- b) ... t-distribucije.
- c) ... t-skorova.
- d) ... t-asimetrije.

1  
2  
3  
4  
5  
6

# 7

## Korelacija

8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

- Pearsonov produkt-moment koeficijent korelacijske matrice
- korelacijski dijagram
- nulta korelacija
- potpuna pozitivna korelacija
- potpuna negativna korelacija
- nepotpuna pozitivna korelacija
- nepotpuna negativna korelacija
- interpretacija koeficijenta korelacijske matrice
- odnos koeficijenta korelacijske matrice i kosinusa kuta između dvaju vektora
- vektorski prikaz nulte korelacijske matrice
- vektorski prikaz potpune pozitivne korelacijske matrice
- vektorski prikaz potpune negativne korelacijske matrice
- vektorski prikaz nepotpune pozitivne korelacijske matrice
- vektorski prikaz nepotpune negativne korelacijske matrice
- testiranje statističke značajnosti koeficijenta korelacijske matrice
- određivanje broja stupnjeva slobode pri testiranju statističke značajnosti koeficijenta korelacijske matrice
- utjecaj veličine uzorka na statističku značajnost koeficijenta korelacijske matrice
- utjecaj veličine koeficijenta korelacijske matrice na pripadajuću statističku značajnost
- obilježja korelacijske matrice

### MICROSOFT EXCEL

#### Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacijske matrice

- korištenje funkcije Pearson

### STATISTICA

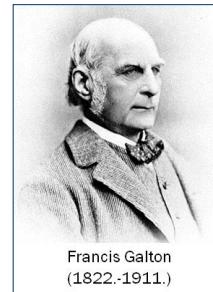
#### Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacijske matrice

#### Testiranje statističke značajnosti koeficijenta r

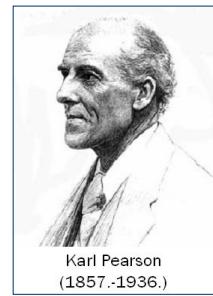
## 7. Korelacija

- ▶ Začetnikom korelacijske i regresijske analize smatra se engleski antropolog Francis Galton koji je pod utjecajem rođaka Charlesa Darwina istraživao utjecaj naslijeda na razvoj čovjekovih karakteristika.
- ▶ Surađujući s Galtonom, Karl Pearson je razvio računski postupak za utvrđivanje povezanosti između dviju varijabli i nazvao ga produkt -moment koeficijent korelacije.
- ▶ Pearsonov *produkt - moment koeficijent korelacije* ( $r$ ) predstavlja mjeru međusobne linearne povezanosti rezultata dviju standardiziranih varijabli, a izračunava se formulom

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ci} y_{ci}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{ci}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_{ci}^2}}$$



Francis Galton  
(1822-1911.)



Karl Pearson  
(1857-1936.)

gdje je

- $x_{ci} = x_i - \bar{x}$  (odstupanje rezultata entiteta  $i$  od aritmetičke sredine varijable  $x$ )
- $y_{ci} = y_i - \bar{y}$  (odstupanje rezultata entiteta  $i$  od aritmetičke sredine varijable  $y$ )

- ▶ Pearsonov koeficijent korelacije može se izračunati i iz originalnih rezultata pomoću formule

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \right)}}$$

gdje je

- $x_i$  - rezultat entiteta  $i$  u varijabli  $x$
- $y_i$  - rezultat entiteta  $i$  u varijabli  $y$
- $n$  - broj entiteta.

## 7. Korelacija

- Ako se rezultati ispitanika u varijablama  $x$  i  $y$  standardiziraju, onda formula poprima sljedeći oblik

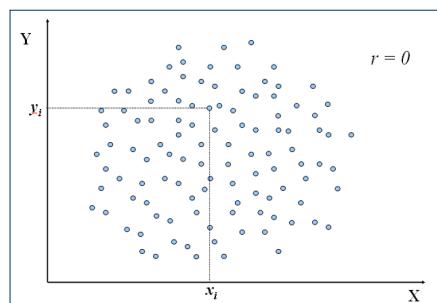
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (z_{x_i} z_{y_i})}{n}$$

gdje je

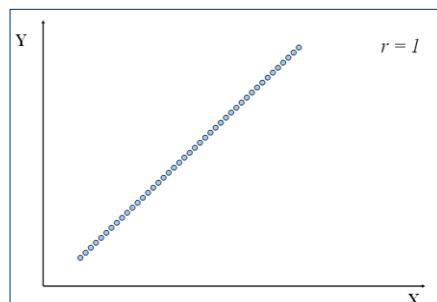
- $z_{x_i}$  - standardizirani rezultat entiteta  $i$  u varijabli  $x$
- $z_{y_i}$  - standardizirani rezultat entiteta  $i$  u varijabli  $y$
- $n$  - broj entiteta.

- Pearsonov koeficijent korelacije (izračunat bilo kojim postupkom) uvijek se nalazi u intervalu od  $-1$  do  $1$ .
- Dvodimenzionalni **koreacijski dijagram** je grafički način prikazivanja povezanosti rezultata dviju varijabli, a iscrtava se na način da se za svakog ispitanika odredi položaj u koordinatnom sustavu pri čemu se položaj na apscisi određuje sukladno rezultatu ispitanika u jednoj varijabli, a položaj na ordinati sukladno rezultatu u drugoj varijabli. Oblik koreacijskog dijagrama zavisan je o smjeru i veličini povezanosti varijabli, odnosno o predznaku i veličini koeficijenta korelacije.

- Na slici je prikazan primjer **nulte korelacije**, odnosno slučaja kada između dviju varijabli ne postoji nikakva povezanost. Nulta korelacija ( $r=0$ ) označava takav odnos između dviju varijabli u kojem svakom rezultatu u jednoj varijabli može odgovarati bilo koji rezultat u drugoj varijabli.

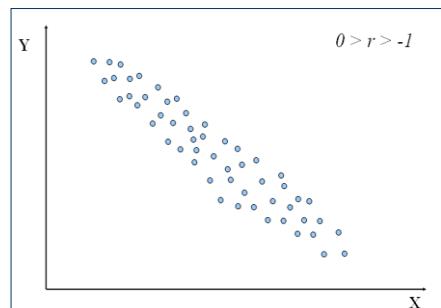
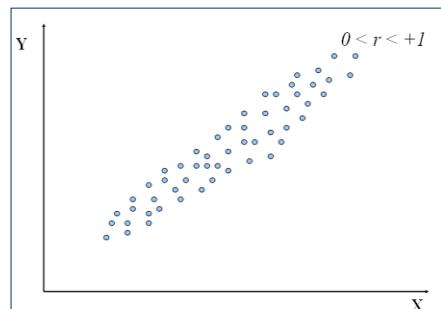
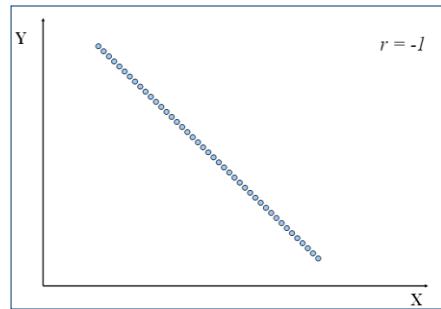


- Na slici je prikazan primjer **potpune pozitivne korelacije**, odnosno slučaja kada su rezultati dviju varijabli međusobno proporcionalni. Potpuna pozitivna korelacija ( $r=1$ ) označava takav odnos između dviju varijabli u kojem svakom iznadprosječnom rezultatu u jednoj varijabli odgovara jednako iznadprosječan rezultat u drugoj varijabli, odnosno svakom ispodprosječnom rezultatu u jednoj varijabli odgovara jednako ispodprosječan rezultat u drugoj varijabli.\*



## 7. Korelacija

- ▶ Na slici je prikazan primjer ***potpune negativne korelacije***, odnosno slučaja kada su rezultati dviju varijabli međusobno obrnuto proporcionalni. Potpuna negativna korelacija ( $r=-1$ ) označava takav odnos između dviju varijabli u kojem svakom iznadprosječnom rezultatu u jednoj varijabli odgovara jednako ispodprosječan rezultat u drugoj varijabli, odnosno svakom ispodprosječnom rezultatu u jednoj varijabli odgovara jednako iznadprosječan rezultat u drugoj varijabli.\*
- ▶ Na slici je prikazan primjer ***nepotpune pozitivne korelacije***. Nepotpuna pozitivna korelacija ( $0 < r < 1$ ) označava takav odnos između dviju varijabli u kojem svakom iznadprosječnom rezultatu u jednoj varijabli najvjerojatnije odgovara iznadprosječan rezultat u drugoj varijabli, odnosno svakom ispodprosječnom rezultatu u jednoj varijabli najvjerojatnije odgovara ispodprosječan rezultat u drugoj varijabli.\*
- ▶ Na slici je prikazan primjer ***nepotpune negativne korelacije***. Nepotpuna negativna korelacija ( $-1 < r < 0$ ) označava takav odnos između dviju varijabli u kojem svakom iznadprosječnom rezultatu u jednoj varijabli najvjerojatnije odgovara ispodprosječan rezultat u drugoj varijabli, odnosno svakom ispodprosječnom rezultatu u jednoj varijabli najvjerojatnije odgovara iznadprosječan rezultat u drugoj varijabli.\*
- ▶ Koeficijent korelacije jednak je kosinusu kuta između dvaju centriranih vektora (npr.  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ ).



\*Objašnjenja pojedinih tipova korelaciјe odnose se na standardizirane varijable.

## 7. Korelacija

- Kosinus kuta koji zatvaraju dva vektora istog reda ( $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ ) izračuna se kao omjer skalarnog produkta dvaju vektora i umnoška njihovih normi

$$\cos\alpha = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1/2} (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) (\mathbf{y}^T \mathbf{y})^{-1/2}$$

odnosno

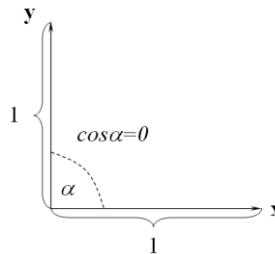
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

Ako se rezultati u varijablama centriraju  $x_{ci} = x_i - \bar{x}$ ,  $y_{ci} = y_i - \bar{y}$  tada je kosinus kuta  $\alpha$  jednak

$$\cos\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ci} y_{ci}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{ci}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_{ci}^2}}$$

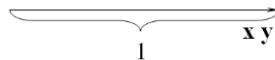
što je formula za izračunavanje koeficijenta korelacije, pa je  $r_{xy} = \cos\alpha_{xy}$ .

- Ako je korelacija između varijabli jednaka nuli ( $r_{xy}=0$ ), onda su dva normirana i centrirana vektora pod kutem od  $90^\circ$ .



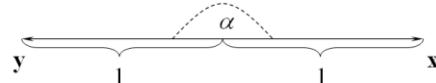
- Ako je korelacija između varijabli potpuna pozitivna ( $r_{xy}=1$ ), onda je kut između dvaju normiranih i centriranih vektora  $0^\circ$ .

$$\cos\alpha = 1$$



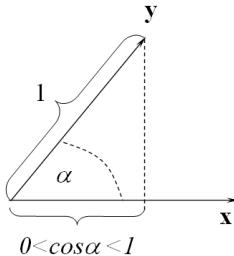
- Ako je korelacija između varijabli potpuna negativna ( $r_{xy}=-1$ ), onda je kut između dvaju normiranih i centriranih vektora  $180^\circ$ .

$$\cos\alpha = -1$$

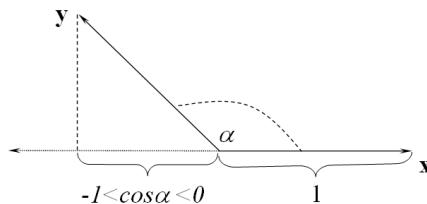


## 7. Korelacija

- Ako je korelacija nepotpuna pozitivna ( $0 < r_{xy} < 1$ ), onda je kut između dvaju normiranih i centriranih vektora veći od  $0^\circ$ , a manji od  $90^\circ$ .



- Ako je korelacija nepotpuna negativna ( $-1 < r_{xy} < 0$ ), onda je kut između dvaju normiranih i centriranih vektora veći od  $90^\circ$ , a manji od  $180^\circ$ .



- Ako se povezanost između dviju varijabli utvrđuje na uzorku ispitanika, potrebno je testirati statističku značajnost koeficijenta korelacije odnosno utvrditi vjerojatnost da se korelacija nije dogodila slučajno. Pri testiranju statističke značajnosti koeficijenta korelacije moguće je postaviti sljedeće hipoteze
  - $H_0: r=0$  - Korelacija nije statistički značajna na razini pogreške  $p$ .
  - $H_1: r \neq 0$  - Korelacija je statistički značajna na razini pogreške  $p$ .
- Statistička značajnost koeficijenta korelacije testira se putem t-distribucije pri čemu se kritična t-vrijednost određuje na temelju pogreške statističkog zaključka  $p$  i broja stupnjeva slobode  $df=n-2$ . Vrijednost koja se uspoređuje s kritičnom t-vrijednosti izračunava se formulom

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

gdje je

- $t$  - vrijednost koja se distribuira prema t-distribuciji s  $df=n-2$
- $r$  - koeficijent korelacije
- $n$  - broj entiteta.

- Iz prethodno navedene formule moguće je uočiti kako je vjerojatnost da se korelacija u uzorku dogodila slučajno iako u populaciji ne postoji manja što je broj entiteta u uzorku veći i što je apsolutna vrijednost izračunate korelacijske veća.

## 7. Korelacija

- ▶ Rezultati korelacijske analize najčešće se prikazuju pomoću **korelacijske matrice**. U dijagonali korelacijske matrice su varijance varijabli, a izvandijagonalni elementi su korelacije svake varijable sa svakom. Korelacijska matrica je simetrična što znači da se koeficijent korelacije između svake dvije varijable nalazi i s gornje i s donje strane glavne dijagonale.

**Tablica:** Formalni prikaz korelacijske matrice s četiri varijable

	v1	v2	v3	v4
v1	1	$r_{v1,v2}$	$r_{v1,v3}$	$r_{v1,v4}$
v2	$r_{v2,v1}$	1	$r_{v2,v3}$	$r_{v2,v4}$
v3	$r_{v3,v1}$	$r_{v3,v2}$	1	$r_{v3,v4}$
v4	$r_{v4,v1}$	$r_{v4,v2}$	$r_{v4,v3}$	1

**Primjer:** U korelacijskoj matrici prikazani su Pearsonovi koeficijenti korelacije između četiri motorička testa. Označene korelacije su statistički značajne na razini pogreške  $p=0,05$ .

	ONT	OUZ	NEB	SKL
ONT	1	0,66*	-0,36*	-0,35*
OUZ	0,66*	1	-0,21	-0,62*
NEB	-0,36*	-0,21	1	0,15
SKL	-0,35*	-0,62*	0,15	1

### Microsoft Excel

#### Postupci:

- ▶ **Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije:** Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije vrši se pomoću funkcije *Pearson*. Putem traka *Array1* i *Array2* potrebno je definirati niz podataka prve, odnosno druge varijable.

#### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Judo.xls* izračunajte koliki je Pearsonov koeficijent korelacije između varijabli *SDM* i *BML* i testirajte statističku značajnost korelacije uz pogrešku  $p=0,01$ !

## 7. Korelacija



STATISTICA

### Postupci:

- ▶ **Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije:** Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Correlation matrices*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *One variable list* potrebno je označiti dvije ili više varijabli na temelju kojih se želi izračunati korelacijska matrica.
- ▶ **Testiranje statističke značajnosti koeficijenta r:** Testiranje statističke značajnosti Pearsonovog koeficijenta korelacije izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Correlation matrices* → *Options*. U traku *p-level for highlighting* potrebno je upisati željenu proporciju pogreške statističkog zaključka. Sve korelacije koje su statistički značajne na razini upisane pogreške u korelacijskoj matrici bit će označene crvenom bojom.

---

### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Judo.sta* izračunajte korelacijsku matricu na temelju svih varijabli.
  - ▶ U datoteci *Judo.sta* testirajte statističku značajnost korelacije između varijabli *SDM* i *BML* uz 1% pogreške!
- 

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 160-179.
- ▶ Petz, B. (2002). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 181-191, 195-197, 211-217.
- ▶ Langer, M. (2004). *Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows*. Zagreb: Miš, str. 75-103.

## 7. Korelacija

### Pitanja i zadaci

1. Pri testiranju statističke značajnosti Pearsonovog koeficijenta korelacije primjer alternativne hipoteze bi mogao biti...

- a) Uz 5% pogreške ne možemo tvrditi da je korelacija između varijabli  $V$  i  $M$  statistički značajna.
- b) Uz 5% pogreške možemo tvrditi da je korelacija između grupa  $V$  i  $M$  statistički značajna.
- c) Uz 5% pogreške možemo tvrditi da je korelacija između varijabli  $V$  i  $M$  statistički značajna.
- d) Uz 5% pogreške ne možemo tvrditi da je korelacija između grupa  $V$  i  $M$  statistički značajna.

2. Učenici 3.a razreda izmjereni su s dva testa motorike. Učenik Dino u jednom testu ima standardizirani rezultat 0 i u drugom testu standardizirani rezultat 0. Učenik Šime u jednom testu ima standardizirani rezultat -3 i u drugom testu standardizirani rezultat -3. Koja je od navedenih tvrdnji sigurno netočna?

- a) Pearsonov koeficijent korelacije izračunat na rezultatima svih učenika toga 3.a razreda iznosi 1.
- b) Pearsonov koeficijent korelacije izračunat na rezultatima svih učenika toga 3.a razreda iznosi -0,4.
- c) Pearsonov koeficijent korelacije izračunat na rezultatima svih učenika toga 3.a razreda iznosi 0,9.
- d) Pearsonov koeficijent korelacije izračunat na rezultatima svih učenika toga 3.a razreda iznosi -3.

3. Svakom rezultatu u jednoj varijabli može odgovarati bilo koji rezultat u drugoj varijabli. Navedena tvrdnja opisuje Pearsonov koeficijent korelacije...

- a) ... -1.
- b) ... 0.
- c) ... 1.
- d) ... -3.

4. Testiranje statističke značajnosti Pearsonovog koeficijenta korelacije je...

- a) ... metoda deskriptivne statistike.
- b) ... metoda parcijalne statistike.
- c) ... metoda sekvencijalne statistike.
- d) ... metoda inferencijalne statistike.

5. Učenici 3.a razreda izmjereni su s dva testa motorike. Učenik Pero u jednom testu ima standardizirani rezultat 3 i u drugom testu standardizirani rezultat 3. Učenik Matko u jednom testu ima standardizirani rezultat -1 i u drugom testu standardizirani rezultat -1. Koja je od navedenih tvrdnji sigurno netočna?

- a) Pearsonov koeficijent korelacije izračunat na rezultatima svih učenika toga 3.a razreda iznosi -1.
- b) Pearsonov koeficijent korelacije izračunat na rezultatima svih učenika toga 3.a razreda iznosi 1.
- c) Pearsonov koeficijent korelacije izračunat na rezultatima svih učenika toga 3.a razreda iznosi 0.
- d) Pearsonov koeficijent korelacije izračunat na rezultatima svih učenika toga 3.a razreda iznosi 0,5.

6. Svakom iznadprosječnom rezultatu u jednoj varijabli odgovara jednak iznadprosječan rezultat u drugoj varijabli odnosno svakom ispodprosječnom rezultatu u jednoj varijabli odgovara jednak ispodprosječan rezultat u drugoj varijabli. Navedena tvrdnja opisuje Pearsonov koeficijent korelacije...

- a) ... 0.
- b) ... 1.
- c) ... -1.
- d) ... 3.

7. Karl je u prvom testu dobio ocjenu 5, a u drugom testu ocjenu 5. Dražan je u prvom testu dobio ocjenu 4, a u drugom testu ocjenu 4. Darko je u prvom testu dobio ocjenu 3, a u drugom testu ocjenu 3. Željko je u prvom testu dobio ocjenu 1, a u drugom testu ocjenu 1. Koliko iznosi Pearsonov koeficijent korelacije između navedenih ocjena u ova dva testa?

- a) 1%
- b) 1
- c) 0
- d) 3

## 7. Korelacija

### Pitanja i zadaci

8. Koja od navednih tvrdnji nije točna?

- a) U dijagonali korelacijske matrice nalaze se jedinice.
- b) Korelacijska matrica rezultat je testiranja statističke značajnosti korelacije.
- c) Korelacijska matrica zrcalno je simetrična.
- d) Korelacijska matrica ima jednak broj redaka i stupaca.

9. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Koeficijenti korelacije izračunati na dva reprezentativna uzorka iz iste populacije ne mogu biti jednaki.
- b) Koeficijenti korelacije izračunati na dva reprezentativna uzorka iz iste populacije uvijek su jednaki.
- c) Koeficijenti korelacije izračunati na dva reprezentativna uzorka iz iste populacije nisu uvijek jednaki.
- d) Koeficijenti korelacije izračunati na dva reprezentativna uzorka iz iste populacije moraju biti jednaki 0.

10. Pearsonov koeficijent korelacije -1 označava...

- a) ... potpunu negativnu korelaciju.
- b) ... nepotpunu negativnu korelaciju.
- c) ... jediničnu razliku korelacije između dviju varijabli.
- d) ... najmanju moguću povezanost između dviju varijabli.

11. Karl je u prvom testu dobio ocjenu 5, a u drugom testu ocjenu 1. Dražan je u prvom testu dobio ocjenu 2, a u drugom testu ocjenu 4. Darko je u prvom testu dobio ocjenu 4, a u drugom testu ocjenu 2. Željko je u prvom testu dobio ocjenu 3, a u drugom testu ocjenu 3. Koliko iznosi Pearsonov koeficijent korelacije između navedenih ocjena u ova dva testa?

- a) -3
- b) 0
- c) -1%
- d) -1

12. Ako se na uzorku od 30 nogometića želi utvrditi da li je Pearsonov koeficijent korelacije između varijabli inicijalnog i finalnog mjerjenja neke sposobnosti statistički značajan, koliko iznosi broj stupnjeva slobode pri određivanju kritične vrijednosti?

- a) 29
- b) 31
- c) 32
- d) 28

13. Karl je u prvom testu dobio ocjenu 5, a u drugom testu ocjenu 3. Dražan je u prvom testu dobio ocjenu 2, a u drugom testu ocjenu 3. Darko je u prvom testu dobio ocjenu 4, a u drugom testu ocjenu 4. Željko je u prvom testu dobio ocjenu 3, a u drugom testu ocjenu 1. Koliko iznosi Pearsonov koeficijent korelacije između navedenih ocjena u ova dva testa?

- a) 0,23
- b) 0,37
- c) 0,19
- d) 0,31

14. Izračunajte Pearsonov koeficijent korelacije između varijabli *OZU* i *BML* datoteke *Judo.sta!* Koliko iznosi minimalna pogreška s kojom je moguće zaključiti da je izračunati koeficijent korelacije statistički značajan?

- a) 0,007
- b) 0,022
- c) 0,031
- d) 0,019

15. Korelacija između varijabli *DALJM* i *DALJZ* datoteke *TESTZ.sta* je...

- a) ... nepotpuna negativna.
- b) ... nulta.
- c) ... potpuna pozitivna.
- d) ... nepotpuna pozitivna.

16. Grafički prikaz korelacije između dviju varijabli naziva se...

- a) ... korelacijski histogram.
- b) ... korelacijski dijagram.
- c) ... korelacijska matrica.
- d) ... korelacijski nomogram.

## 7. Korelacija

### Pitanja i zadaci

17. Vjerojatnost da je Pearsonov koeficijent korelacije statistički značajan je...

- a) ... manja što je broj entiteta u uzorku veći i manja što je apsolutna vrijednost izračunate korelacije veća.
- b) ... veća što je broj entiteta u uzorku veći i manja što je apsolutna vrijednost izračunate korelacije veća.
- c) ... veća što je broj entiteta u uzorku veći i veća što je apsolutna vrijednost izračunate korelacije veća.
- d) ... manja što je broj entiteta u uzorku veći i veća što je apsolutna vrijednost izračunate korelacije veća.

18. Svakom iznadprosječnom rezultatu u jednoj varijabli odgovara jednakost ispodprosječan rezultat u drugoj varijabli odnosno svakom ispodprosječnom rezultatu u jednoj varijabli odgovara jednakost iznadprosječan rezultat u drugoj varijabli. Navedena tvrdnja opisuje Pearsonov koeficijent korelacije...

- a) ... -1.
- b) ... 0.
- c) ... 1.
- d) ... -3.

19. Statistički značajna korelacija je...

- a) ... korelacija utvrđena na više uzoraka entiteta, a za koju s visokim stupnjem sigurnosti možemo tvrditi da ne postoji i u populaciji entiteta.
- b) ... korelacija utvrđena na uzorku entiteta, a za koju s visokim stupnjem sigurnosti možemo tvrditi da postoji i u populaciji entiteta.
- c) ... korelacija utvrđena na uzorku entiteta, a za koju s visokim stupnjem sigurnosti možemo tvrditi da ne postoji i u populaciji entiteta.
- d) ... korelacija utvrđena na više uzoraka entiteta, a za koju s visokim stupnjem sigurnosti možemo tvrditi da ne postoji u jednom uzorku entiteta.

20. Testiranje statističke značajnosti Pearsonovog koeficijenta korelacije vrši se putem...

- a) ... t-distribucije.
- b) ... P-distribucije.
- c) ... normalne distribucije.
- d) ... f-distribucije.

21. Pearsonov koeficijent korelacije je...

- a) ... mjera međusobne linearne povezanosti rezultata dviju standardiziranih varijabli.
- b) ... mjera međusobne linearne povezanosti rezultata dviju grupa ispitanika.
- c) ... mjera statističke značajnosti povezanosti rezultata dviju standardiziranih varijabli.
- d) ... mjera statističke značajnosti povezanosti rezultata dviju grupa ispitanika.

22. Korelacija između varijabli SKL i ONT datoteke Judo.xls je...

- a) ... nulta.
- b) ... nepotpuna negativna.
- c) ... potpuna pozitivna.
- d) ... nepotpuna pozitivna.

24. Statistička značajnost koeficijenta korelacije zavisi o...

- a) ... broju entiteta u uzorku i veličini koeficijenta korelacije.
- b) ... pogrešci statističkog zaključka i standardnoj devijaciji uzorka.
- c) ... broju entiteta u uzorku i razlici između aritmetičkih sredina varijabli.
- d) ... razlici između aritmetičkih sredina varijabli i standardnoj devijaciji uzorka.

23. Pri testiranju statističke značajnosti Pearsonovog koeficijenta korelacije kritična t-vrijednost zavisi o...

- a) ... broju stupnjeva slobode i koeficijentu korelacije.
- b) ... broju stupnjeva slobode i pogrešci statističkog zaključka.
- c) ... broju entiteta u uzorku i koeficijentu korelacije.
- d) ... pogrešci statističkog zaključka i koeficijentu korelacije.

25. Pearsonov koeficijent korelacije 0,99 označava...

- a) ... nepotpunu maksimalnu korelaciju.
- b) ... nepotpunu pozitivnu korelaciju.
- c) ... potpunu pozitivnu korelaciju.
- d) ... maksimalnu pozitivnu korelaciju.

## 7. Korelacija

### Pitanja i zadaci

26. Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije je...

- a) ... metoda inferencijalne statistike.
- b) ... metoda deskriptivne statistike.
- c) ... metoda parcijalne statistike.
- d) ... metoda sekvencijalne statistike.

27. Koliko iznosi Pearsonov koeficijent korelacije između varijabli *SKL* i *TRB* datoteke *Judo.xls*?

- a) 0,27
- b) 0,24
- c) 0,33
- d) 0,31

28. Pearsonov koeficijent korelacije naziva se još i...

- a) ... sumacijski-moment koeficijent korelacije.
- b) ... kvocijent-moment koeficijent korelacije
- c) ... diferencijalni-moment koeficijent korelacije.
- d) ... produkt-moment koeficijent korelacije.

29. Pearsonov koeficijent korelacije 1 nužno označava...

- a) ... proporcionalnost rezultata dviju varijabli.
- b) ... jediničnu razliku korelacije između dviju varijabli.
- c) ... jedinični porast korelacije između dviju varijabli.
- d) ... jednakost originalnih rezultata dviju varijabli.

30. Koliko iznosi Pearsonov koeficijent korelacije između varijabli *VISI* i *TEZI* datoteke *TESTZ.sta*?

- a) 0,93
- b) 0,85
- c) 0,72
- d) 0,75

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7

# 8

## *Deskriptivna analiza promjena*

9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

---

## 8. Deskriptivna analiza promjena

### Sadržaj poglavlja

#### TEORIJSKE OSNOVE

- grupne promjene
- individualne promjene

#### Deskriptivna analiza grupnih promjena

- varijabla razlika između dvaju stanja, odnosno varijabla promjena
- aritmetička sredina varijable promjena
- standardna devijacija varijable promjena
- minimum, maksimum i raspon varijable promjena
- korelacija varijable početnog stanja i varijable promjena
- korelacijski dijagram varijable početnog stanja i varijable promjena

#### Deskriptivna analiza individualnih promjena

- analiza vremenskih nizova
- vremenski niz
- svrha analize vremenskih nizova
- pokazatelji dinamike s promjenjivom bazom
- pokazatelji dinamike sa stalnom bazom
- absolutna stopa promjene s promjenjivom bazom
- verižni indeks
- relativna stopa promjene s promjenjivom bazom
- prikaz promjena stanja kroz vrijeme putem linijskog grafikona
- prikaz variranja absolutne stope promjene s promjenjivom bazom kroz vrijeme
- absolutna stopa promjene sa stalnom bazom
- bazni indeks
- relativna stopa promjene sa stalnom bazom

#### MICROSOFT EXCEL

##### Deskriptivna analiza grupnih promjena

- izračunavanje varijable promjena
- izračunavanje deskriptivnih parametara
- izračunavanje korelacije  $r$

##### Deskriptivna analiza individualnih promjena

- izračunavanje apsolutnih i relativnih stopa promjene s promjenjivom i stalnom bazom
- izračunavanje verižnog i baznog indeksa

#### STATISTICA

##### Deskriptivna analiza grupnih promjena

- izračunavanje varijable promjena
- izračunavanje deskriptivnih parametara
- izračunavanje korelacije  $r$

## 8. Deskriptivna analiza promjena

- ▶ **Deskriptivna analiza promjena** je skup postupaka za analizu grupnih ili individualnih promjena putem deskriptivnih statističkih parametara.
- ▶ **Grupne promjene** podrazumijevaju razlike u razini jedne ili više karakteristika grupe entiteta u dvije ili više vremenskih točaka.
- ▶ **Individualne promjene** podrazumijevaju razlike u razini jedne ili više karakteristika jednog entiteta u dvije ili više vremenskih točaka.

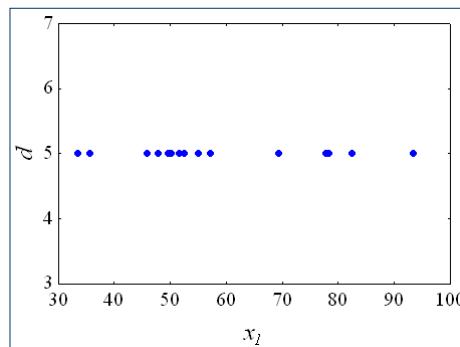
### Deskriptivna analiza grupnih promjena

- ▶ **Primjeri 1-3:** Na nekoj grupi polaznika fitnes centra primijenjen je tromjesečni program za povećanje mišićne mase. Korisnicima programa je izmjerena tjelesna masa prije početka programa ( $x_1$ ) i po završetku provođenja programa ( $x_2$ ) te je za svakog ispitanika izračunata razlika između inicijalnog i finalnog stanja tjelesne mase ( $d$ ). Izračunati su sljedeći deskriptivni parametri:
  - aritmetička sredina ( $\bar{x}$ )
  - standardna devijacija ( $s$ )
  - minimum ( $min$ )
  - maksimum ( $max$ )
  - totalni raspon ( $R$ )
  - korelacija varijabli inicijalnog i finalnog stanja ( $r_{x_1,x_2}$ )
  - korelacija varijabli inicijalnog stanja i promjene stanja ( $r_{x_1,d}$ ).

**Primjer 1:** Tjelesna masa svakog od sudionika programa povećala se za 5 kilograma. Program je bio primjereno za povećanje tjelesne mase svih ispitanika.

$x_1$	$x_2$	$d$
82,61	87,61	5,00
93,51	98,51	5,00
78,46	83,46	5,00
55,14	60,14	5,00
49,65	54,65	5,00
45,82	50,82	5,00
50,21	55,21	5,00
51,65	56,65	5,00
69,45	74,45	5,00
57,32	62,32	5,00
35,62	40,62	5,00
47,95	52,95	5,00
33,65	38,65	5,00
52,69	57,69	5,00
77,95	82,95	5,00

	$\bar{x}$	$s$	$min$	$max$	$R$	$r_{x_1,x_2}$	$r_{x_1,d}$
$x_1$	58,77	17,63	33,65	93,51	59,86		
$x_2$	63,77	17,63	38,65	98,51	59,86		
$d$	5	0	5	5	0	1	0



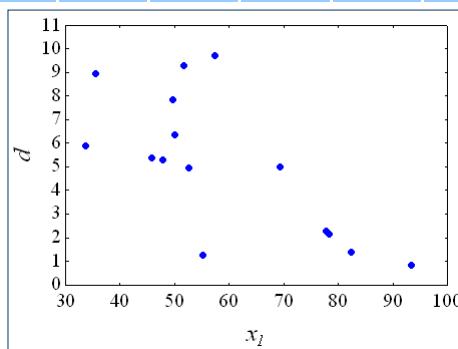
Grafikon: Odnos inicijalnog stanja subjekta ( $x_1$ ) i učinka programa ( $d$ ) prikazan putem korelacijskog dijagrama

## 8. Deskriptivna analiza promjena

**Primjer 2:** Tjelesna masa sudionika programa u prosjeku se povećala za 5,08 kilograma. Program je imao veći učinak na povećanje tjelesne mase ispitanika manje početne tjelesne mase.

$x_1$	$x_2$	$d$
82,61	83,98	1,37
93,51	94,31	0,80
78,46	80,62	2,16
55,14	56,36	1,22
49,65	57,47	7,82
45,82	51,19	5,37
50,21	56,54	6,33
51,65	60,91	9,26
69,45	74,45	5,00
57,32	67,00	9,68
35,62	44,56	8,94
47,95	53,24	5,29
33,65	39,51	5,86
52,69	57,64	4,95
77,95	80,21	2,26

	$\bar{x}$	$s$	$min$	$max$	$R$	$r_{x_1,x_2}$	$r_{x_1,d}$
$x_1$	58,77	17,63	33,65	93,51	59,86		
$x_2$	63,86	15,67	39,51	94,31	54,80	0,99	
$d$	5,08	3,01	0,80	9,68	8,88		-0,7

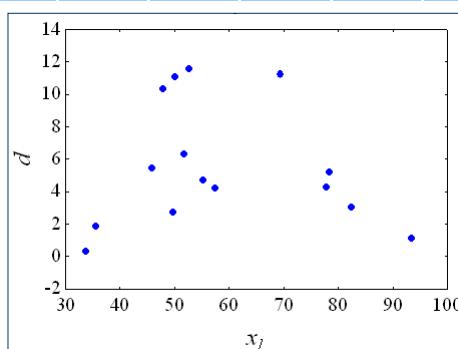


Grafikon: Odnos inicijalnog stanja subjekta ( $x_1$ ) i učinka programa ( $d$ ) prikazan putem korelacijskog dijagrama

**Primjer 3:** Tjelesna masa sudionika programa u prosjeku se povećala za 5,54 kilograma. Program je imao neravnomjeren učinak na povećanje tjelesne mase ispitanika.

$x_1$	$x_2$	$d$
82,61	85,65	3,04
93,51	94,62	1,11
78,46	83,65	5,19
55,14	59,84	4,70
49,65	52,34	2,69
45,82	51,26	5,44
50,21	61,24	11,03
51,65	57,95	6,30
69,45	80,65	11,20
57,32	61,53	4,21
35,62	37,45	1,83
47,95	58,31	10,36
33,65	33,95	0,30
52,69	64,25	11,56
77,95	82,21	4,26

	$\bar{x}$	$s$	$min$	$max$	$R$	$r_{x_1,x_2}$	$r_{x_1,d}$
$x_1$	58,77	17,63	33,65	93,51	59,86		
$x_2$	64,32	17,73	33,95	94,62	60,67	0,98	
$d$	5,54	3,79	0,30	11,56	11,26		-0,1



Grafikon: Odnos inicijalnog stanja subjekta ( $x_1$ ) i učinka programa ( $d$ ) prikazan putem korelacijskog dijagrama

## 8. Deskriptivna analiza promjena

- ▶ Nakon uzlaznog sortiranja entiteta prema rezultatima inicijalnog stanja lakše je uočiti eventualnu zavisnost učinka programa o inicijalnom stanju subjekta.

**Tablica:** Inicijalno stanje ( $x_1$ ), finalna stanja ( $x_2$ ) i varijable promjena ( $d$ ) 1., 2. i 3. grupe

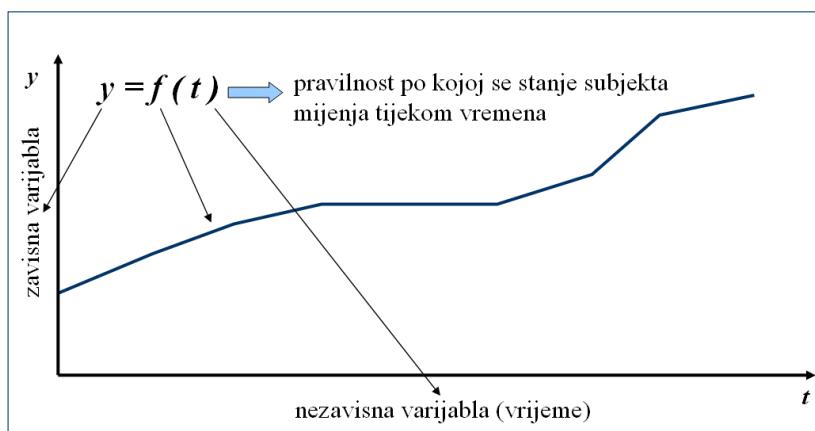
$x_1$	$1x_2$	$2x_2$	$3x_2$	$1d$	$2d$	$3d$
33,65	38,65	39,51	33,95	5,00	5,86	0,30
35,62	40,62	44,56	37,45	5,00	8,94	1,83
45,82	50,82	51,19	51,26	5,00	5,37	5,44
47,95	52,95	53,24	58,31	5,00	5,29	10,36
49,65	54,65	57,47	52,34	5,00	7,82	2,69
50,21	55,21	56,54	61,24	5,00	6,33	11,03
51,65	56,65	60,91	57,95	5,00	9,26	6,30
52,69	57,69	57,64	64,25	5,00	4,95	11,56
55,14	60,14	56,36	59,84	5,00	1,22	4,70
57,32	62,32	67,00	61,53	5,00	9,68	4,21
69,45	74,45	74,45	80,65	5,00	5,00	11,20
77,95	82,95	80,21	82,21	5,00	2,26	4,26
78,46	83,46	80,62	83,65	5,00	2,16	5,19
82,61	87,61	83,98	85,65	5,00	1,37	3,04
93,51	98,51	94,31	94,62	5,00	0,80	1,11

- ▶ Aritmetička sredina varijable razlika između dvaju stanja ( $\bar{x}_d$ ) opisuje efikasnost primijenjenog programa.
- ▶ Standardna devijacija razlika između dvaju stanja ( $s_d$ ) opisuje variranje učinka primijenjenog programa među ispitanicima. Ako je cilj grupnih programa ravnomjeran napredak svih sudionika, velika standardna devijacija može upućivati na slabu primjerenošć programa pojedinim sudionicima. U interpretaciji variranja učinaka programa korisno je pregledati i minimalnu i maksimalnu vrijednost promjene stanja.
- ▶ Ako je korelacija inicijalnog stanja i varijable razlika između dvaju stanja ( $r_{x1,d}$ ) jednaka nuli to upućuje na zaključak da je primijenjeni program bio primijeren svim ispitanicima, nezavisno o njihovom inicijalnom stanju.
- ▶ Što je korelacija bliža 1, to je primijenjeni program primjereniji ispitanicima s višim rezultatima inicijalnog stanja. Što je korelacija bliža -1, to je primijenjeni program primjereniji ispitanicima s nižim rezultatima inicijalnog stanja.
- ▶ OPREZ kod analize obrnuto skaliranih varijabli!!!

## 8. Deskriptivna analiza promjena

### Deskriptivna analiza individualnih promjena

- ▶ Promjene stanja jednog subjekta analiziraju se putem analize vremenskih nizova.
- ▶ **Dinamička analiza** ili **analiza vremenskih nizova** služi za analizu promjena stanja subjekta kroz određeno vremensko razdoblje. Pri tome se utvrđuje zavisnost stanja subjekta (zavisna varijabla) o vremenu provođenja programa (nezavisna varijabla).
- ▶ **Vremenski niz** je niz podataka o određenoj karakteristici subjekta prikupljenih u uzastopnim vremenskim točkama (npr. inicijalno stanje, prvo tranzitivno stanje, drugo tranzitivno stanje, finalno stanje).
- ▶ Svrha analize vremenskih nizova je:
  - praćenje vremenskog razvoja neke karakteristike subjekta
  - utvrđivanje zakonitosti razvoja promatrane karakteristike
  - predviđanje daljnog razvoja promatrane karakteristike.



- ▶ Vremenski niz se može analizirati putem pokazatelja dinamike s promjenjivom bazom ili pokazatelja dinamike sa stalnom bazom.
- ▶ **Pokazatelji dinamike s promjenjivom bazom** izražavaju odstupanje stanja subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na stanje u prethodnoj vremenskoj točki.
- ▶ **Pokazatelji dinamike sa stalnom bazom** izražavaju odstupanje stanja subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na početno stanje.

## 8. Deskriptivna analiza promjena

### Pokazatelji dinamike s promjenjivom bazom

- **Apsolutna stopa promjene** ( $\Delta y$ ) s promjenjivom bazom izražava razliku rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki od rezultata u prethodnoj vremenskoj točki, a izračunava se formulom

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

gdje je

- $y_i$  - rezultat subjekta u vremenskoj točki  $i$
- $i = 2, \dots, k$
- $k$  - broj vremenskih točaka.

- **Verižni indeks** ( $V_t$ ) pokazuje koliko puta je rezultat subjekta u određenoj vremenskoj točki veći od rezultata u prethodnoj vremenskoj točki, a izračunava se formulom

$$V_t = \frac{y_t}{y_{t-1}}$$

gdje je

- $y_t$  - rezultat subjekta u vremenskoj točki  $t$
- $t = 2, \dots, k$
- $k$  - broj vremenskih točaka.

- **Relativna stopa promjene** ( $S_t$ ) s promjenjivom bazom izražava postotak promjene rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na rezultat u prethodnoj vremenskoj točki, a izračunava se formulom

$$S_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \cdot 100 - 100 \quad \text{ili} \quad S_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \cdot 100$$

gdje je

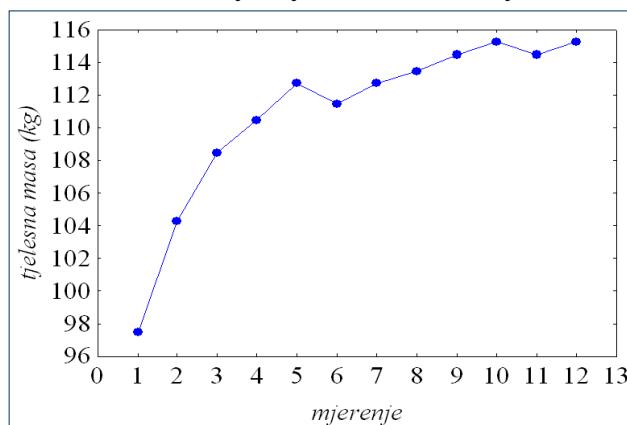
- $y_t$  - rezultat subjekta u vremenskoj točki  $t$
- $t = 2, \dots, k$
- $k$  - broj vremenskih točaka.

**Primjer:** Na nekom sportašu primijenjen je program za povećanje mišićne mase. Kroz vremenski period od 11 mjeseci praćeno je stanje sportaša pri čemu je tjelesna masa izmjerena prije početka programa (inicijalno stanje), svakih mjesec dana tijekom provođenja programa (10 tranzitivnih stanja) i po završetku programa (finalno stanje). Izračunati su absolutni i relativni pokazatelji dinamike s promjenjivom bazom. Rezultati su prikazani u tablici.

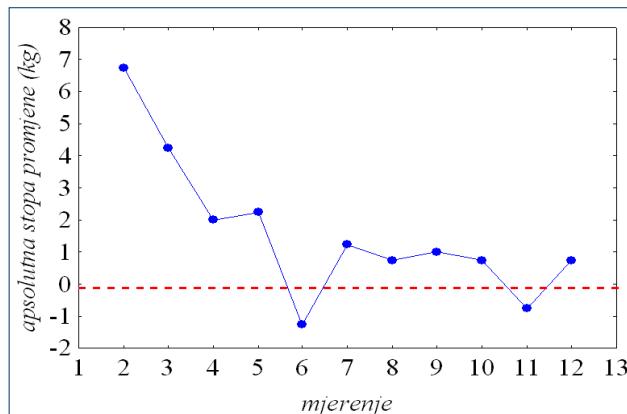
## 8. Deskriptivna analiza promjena

datum	mjerenje	tjelesna masa (kg)	apsolutna stopa promjene	verižni indeks	relativna stopa promjene
01.01.2007.	1	97,5			
01.02.2007.	2	104,25	6,75	1,07	6,92
01.03.2007.	3	108,5	4,25	1,04	4,08
01.04.2007.	4	110,5	2	1,02	1,84
01.05.2007.	5	112,75	2,25	1,02	2,04
01.06.2007.	6	111,5	-1,25	0,99	-1,11
01.07.2007.	7	112,75	1,25	1,01	1,12
01.08.2007.	8	113,5	0,75	1,01	0,67
01.09.2007.	9	114,5	1	1,01	0,88
01.10.2007.	10	115,25	0,75	1,01	0,66
01.11.2007.	11	114,5	-0,75	0,99	-0,65
01.12.2007.	12	115,25	0,75	1,01	0,66

Grafikon: Promjene tjelesne mase kroz vrijeme



Grafikon: Variranje absolutne stope promjene s promjenjivom bazom kroz vrijeme



## 8. Deskriptivna analiza promjena

### Pokazatelji dinamike sa stalnom bazom

- **Apsolutna stopa promjene** ( $\Delta y$ ) sa stalnom bazom izražava razliku rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki od rezultata u početnoj vremenskoj točki, a izračunava se formulom

$$\Delta y_i = y_i - y_1$$

gdje je

- $y_i$  - rezultat subjekta u vremenskoj točki  $i$
- $i = 2, \dots, k$
- $k$  - broj vremenskih točaka.

- **Bazni indeks** ( $I_t$ ) pokazuje koliko puta je rezultat subjekta u određenoj vremenskoj točki veći od rezultata u početnoj vremenskoj točki, a izračunava se formulom

$$I_t = \frac{y_t}{y_1}$$

gdje je

- $y_t$  - rezultat subjekta u vremenskoj točki  $t$
- $t = 2, \dots, k$
- $k$  - broj vremenskih točaka.

- **Relativna stopa promjene** ( $S_t$ ) sa stalnom bazom izražava postotak promjene rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na rezultat u početnoj vremenskoj točki, a izračunava se formulom

$$S_t = \frac{y_t}{y_1} \cdot 100 - 100 \quad \text{ili} \quad S_t = \frac{y_t - y_1}{y_1} \cdot 100$$

gdje je

- $y_t$  - rezultat subjekta u vremenskoj točki  $t$
- $t = 2, \dots, k$
- $k$  - broj vremenskih točaka.

**Primjer:** Na nekom sportašu primijenjen je program za povećanje mišićne mase. Kroz vremenski period od 11 mjeseci praćeno je stanje sportaša pri čemu je tjelesna masa izmjerena prije početka programa (inicijalno stanje), svakih mjesec dana tijekom provođenja programa (10 tranzitivnih stanja) i po završetku programa (finalno stanje). Izračunati su absolutni i relativni pokazatelji dinamike sa stalnom bazom. Rezultati su prikazani u tablici.

## 8. Deskriptivna analiza promjena

datum	mjerjenje	tjelesna masa (kg)	apsolutna stopa promjene	bazni indeks	relativna stopa promjene
01.01.2007.	1	97,5			
01.02.2007.	2	104,25	6,75	1,07	6,92
01.03.2007.	3	108,5	11	1,11	11,28
01.04.2007.	4	110,5	13	1,13	13,33
01.05.2007.	5	112,75	15,25	1,16	15,64
01.06.2007.	6	111,5	14	1,14	14,36
01.07.2007.	7	112,75	15,25	1,16	15,64
01.08.2007.	8	113,5	16	1,16	16,41
01.09.2007.	9	114,5	17	1,17	17,44
01.10.2007.	10	115,25	17,75	1,18	18,21
01.11.2007.	11	114,5	17	1,17	17,44
01.12.2007.	12	115,25	17,75	1,18	18,21



### Microsoft Excel

#### Postupci:

- ▶ **Deskriptivna analiza grupnih promjena:**
  - Izračunavanje deskriptivnih pokazatelja u svrhu analize grupnih promjena vrši se pomoću funkcija: Average (aritmetička sredina), Min (minimum), Max (maksimum) i Stdev (standardna devijacija). Funkcija se unosi u označeno polje matrice odabirom opcije Function... padajućeg izbornika Insert.
  - Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije u svrhu analize grupnih promjena se vrši pomoću funkcije Pearson. Putem traka Array1 i Array2 potrebno je definirati niz podataka prve, odnosno druge varijable.
- ▶ **Deskriptivna analiza individualnih promjena:** U svrhu izračunavanja pokazatelja dinamike s promjenjivom ili stalnom bazom formula za izračunavanje vrijednosti označenog polja unosi se u traku fx (npr. =C3/C2). Pri unosu formula za izračunavanje pokazatelja dinamike sa stalnom bazom korisno je upotrijebiti kombinirane adrese polja (npr. C\$2 ako je bazna vremenska točka u drugom retku matrice).

#### Zadaci:

- ▶ U datoteci POD.xls izračunajte prosječnu promjenu stanja tjelesne mase ispitanika između inicijalnog mjerjenja (ATT\_I) i finalnog mjerjenja (ATT\_F). Utvrdite da li je program jednako djelovao na tjelesnu masu svih ispitanika!
- ▶ U datoteci POD.xls izračunajte promjenu tjelesne mase između inicijalnog (ATT\_I) i finalnog mjerjenja (ATT\_F) za sve ispitanike. Utvrdite da li je učinak programa zavisio o inicijalnom stanju tjelesne mase ispitanika!
- ▶ U datoteci TREND.xls izračunajte verižne i bazne indekse te apsolutne i relativne stope promjene s promjenjivom i stalnom bazom za vremenski niz podataka o tjelesnoj masi izmijerenog ispitanika (TEZ)!

## 8. Deskriptivna analiza promjena



### STATISTICA

#### Postupci:

##### ► Deskriptivna analiza grupnih promjena:

- Izračunavanje deskriptivnih pokazatelja u svrhu analize grupnih promjena izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Descriptive statistics* → *Advanced* → *Mean* (aritmetička sredina), *Minimum & maximum*, *Range* (raspon) i *Standard Deviation* (standardna devijacija).
- Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije u svrhu analize grupnih promjena izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Correlation matrices*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *One variable list* potrebno je označiti varijable na temelju kojih se želi izračunati korelacijska matrica.

---

#### Zadaci:

- U datoteci *POD.sta* izračunajte prosječnu promjenu stanja tjelesne mase ispitanika između inicijalnog mjerjenja (*ATT\_I*) i finalnog mjerjenja (*ATT\_F*). Utvrđite da li je program jednako djelovao na tjelesnu masu svih ispitanika!
- U datoteci *POD.sta* izračunajte promjenu tjelesne mase između inicijalnog (*ATT\_I*) i finalnog mjerjenja (*ATT\_F*) za sve ispitanike. Utvrđite da li je učinak programa zavisio o inicijalnom stanju tjelesne mase ispitanika!

---

#### Preporučena literatura

- Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 63-89, 160-171.
- Petz, B. (2002). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 45-66, 181-191.
- Langer, M. (2004). *Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows*. Zagreb: Miš, str. 31-35, 44-46, 75-103.

## 8. Deskriptivna analiza promjena

### Pitanja i zadaci

1. Individualne promjene podrazumijevaju...

- a) ... razlike u razini karakteristika individualne grupe entiteta u dvije ili više vremenskih točaka.
- b) ... razlike u razini jedne ili više karakteristika jednog entiteta u dvije ili više vremenskih točaka.
- c) ... razlike u razini jedne ili više karakteristika grupe entiteta u dvije ili više individualnih vremenskih točaka.
- d) ... individualne razlike između entiteta unutar jedne grupe.

2. Efikasnost programa primjenjenog na nekoj grupi subjekata je veća što je....

- a) ... apsolutna vrijednost aritmetičke sredine varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu veća.
- b) ... aritmetička sredina varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu bliža nuli.
- c) ... standardna devijacija varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu veća.
- d) ... standardna devijacija varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu bliža nuli.

3. Odnos inicijalnog stanja subjekta i učinka programa primjenjenog na nekoj grupi subjekata može se grafički prikazati pomoću...

- a) ... t-distribucije.
- b) ... korelacijskog nomograma.
- c) ... korelacijskog dijagrama.
- d) ... normalne distribucije.

4. Promjene stanja jednog subjekta analiziraju se putem...

- a) ... analize subjektivnih nizova.
- b) ... sinteze vremenskih stanja.
- c) ... sinteze stanja subjekta.
- d) ... analize vremenskih nizova.

5. Ako učinak primjenjenog programa na nekoj grupi subjekata nije zavisan o inicijalnom stanju subjekta onda će...

- a) ... korelacija između rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu i varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu biti pozitivna.
- b) ... korelacija između rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu i varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu biti negativna.
- c) ... korelacija između rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu i varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu biti jednaka nuli.
- d) ... Ništa od navedenog.

6. Zavisnost učinka programa primjenjenog na nekoj grupi subjekata o inicijalnom stanju subjekta može se utvrditi...

- a) ... korelacijom između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu.
- b) ... razlikom između aritmetičkih sredina rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu i varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu.
- c) ... razlikom između aritmetičkih sredina rezultata subjekata u finalnom mjerenu i varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu.
- d) ... korelacijom između rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu i varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu.

7. Dinamička analiza služi za...

- a) ... analizu promjena stanja subjekta kroz određeno vremensko razdoblje.
- b) ... analizu dinamike vremena.
- c) ... deskriptivnu analizu grupnih promjena između dviju vremenskih točaka.
- d) ... testiranje statističke značajnosti razlika između stanja subjekta u određenim vremenskim točkama.

## 8. Deskriptivna analiza promjena

### Pitanja i zadaci

8. Verižni indeks je...

- a) ... postotak promjene rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na rezultat u početnoj vremenskoj točki.
- b) ... razlika rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki od rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.
- c) ... omjer rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki i rezultata u početnoj vremenskoj točki.
- d) ... omjer rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki i rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.

9. Relativna stopa promjene sa stalnom bazom je...

- a) ... omjer rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki i rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.
- b) ... razlika rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki od rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.
- c) ... postotak promjene rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na rezultat u početnoj vremenskoj točki.
- d) ... razlika rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki od rezultata u početnoj vremenskoj točki.

10. Variranje učinka primijenjenog programa unutar grupe subjekata može se opisati...

- a) ... aritmetičkom sredinom varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu.
- b) ... korelacijom između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu.
- c) ... standardnom devijacijom rezultata ispitanika u inicijalnom mjerenu.
- d) ... standardnom devijacijom varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu.

11. Pokrenite datoteku TREND.xls! Koliko iznosi bazni indeks za desetu vremensku točku ( $BRM=10$ ) varijable APO2?

- a) 1,16
- b) 1,03
- c) 1,33
- d) 1,26

12. Relativna stopa promjene s promjenjivom bazom pokazuje...

- a) ... za koliko posto je rezultat u određenoj vremenskoj točki bolji, odnosno lošiji od rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.
- b) ... za koliko je mjernih jedinica rezultat subjekta u određenoj vremenskoj točki veći, odnosno manji od rezultata u početnoj vremenskoj točki.
- c) ... za koliko posto je rezultat u određenoj vremenskoj točki bolji, odnosno lošiji od rezultata u početnoj vremenskoj točki.
- d) ... za koliko je mjernih jedinica rezultat subjekta u određenoj vremenskoj točki veći, odnosno manji od rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.

13. Efikasnost programa primijenjenog na nekoj grupi subjekata može se opisati...

- a) ... standardnom devijacijom varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu.
- b) ... rasponom varijable rezultata subjekata u finalnom mjerenu.
- c) ... aritmetičkom sredinom varijable razlika između rezultata subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu.
- d) ... standardnom devijacijom varijable rezultata subjekata u finalnom mjerenu.

14. Velika standardna devijacija varijable razlika između rezultata grupe subjekata u finalnom mjerenu i rezultata subjekata u inicijalnom mjerenu može upućivati na...

- a) ... ravnomjernu primjerenost programa svim subjektima u grupi.
- b) ... neravnomjernu primjerenost programa svim subjektima u grupi.
- c) ... visoku efikasnost primijenjenog programa.
- d) ... nisku efikasnost primijenjenog programa.

15. Pokrenite datoteku TREND.xls! Koliko iznosi apsolutna stopa promjene s promjenjivom bazom za četvrtu vremensku točku ( $BRM=4$ ) varijable TEZ?

- a) 0
- b) -2
- c) -14
- d) -12

## 8. Deskriptivna analiza promjena

### Pitanja i zadaci

16. Vremenski niz je...

- a) ... niz podataka o određenoj karakteristici subjekta prikupljenih u uzastopnim vremenskim točkama.
- b) ... niz vremenskih točaka u kojima se provodi mjerjenje određene karakteristike subjekta.
- c) ... niz entiteta izmjerjenih u različitim vremenskim točkama.
- d) ... niz programa primijenjenih u različitim vremenskim točkama.

17. Apsolutna stopa promjene sa stalnom bazom pokazuje...

- a) ... koliko je puta rezultat subjekta u određenoj vremenskoj točki veći, odnosno manji od rezultata prethodnoj vremenskoj točki.
- b) ... za koliko je mjernih jedinica rezultat subjekta u određenoj vremenskoj točki veći, odnosno manji od rezultata u početnoj vremenskoj točki.
- c) ... za koliko posto je rezultat u određenoj vremenskoj točki bolji, odnosno lošiji od rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.
- d) ... za koliko posto je rezultat u određenoj vremenskoj točki bolji, odnosno lošiji od rezultata u početnoj vremenskoj točki.

18. Pokrenite datoteku *POD.xls!* Kolika je aritmetička sredina varijable razlika između finalnog (*MDM\_F*) i inicijalnog (*MDM\_I*) mjerjenja skoka udalj s mesta?

- a) 27
- b) 270
- c) 2,7
- d) 0,27

19. Bazni indeks pokazuje...

- a) ... za koliko je mjernih jedinica rezultat subjekta u određenoj vremenskoj točki veći, odnosno manji od rezultata u početnoj vremenskoj točki.
- b) ... za koliko je mjernih jedinica rezultat subjekta u određenoj vremenskoj točki veći, odnosno manji od rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.
- c) ... koliko je puta rezultat subjekta u određenoj vremenskoj točki veći, odnosno manji od rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.
- d) ... koliko je puta rezultat subjekta u određenoj vremenskoj točki veći, odnosno manji od rezultata u početnoj vremenskoj točki.

20. Promjena stanja subjekta pod utjecajem nekog programa može se izraziti...

- a) ... produktom rezultata subjekta u finalnom mjerenu i rezultata subjekta u inicijalnom mjerenu.
- b) ... zbrojem rezultata subjekta u finalnom mjerenu i rezultata subjekta u inicijalnom mjerenu.
- c) ... aritmetičkom sredinom rezultata subjekta u finalnom mjerenu i rezultata subjekta u inicijalnom mjerenu.
- d) ... razlikom između rezultata subjekta u finalnom mjerenu i rezultata subjekta u inicijalnom mjerenu.

21. Pokrenite datoteku *TREND.xls!* Koliko iznosi relativna stopa promjene sa stalnom bazom za petu vremensku točku (*BRM=5*) varijable *ONAT*?

- a) -1,36
- b) -1,65
- c) 0,99
- d) -1,78

22. Pokrenite datoteku *POD.sta!* Koliki je Pearsonov koeficijent korelacije između rezultata inicijalnog mjerjenja (*AMT\_I*) i varijable razlika između finalnog mjerjenja (*AMT\_F*) i inicijalnog mjerjenja (*AMT\_I*)?

- a) -0,10
- b) -0,20
- c) -0,15
- d) -0,25

23. Apsolutna stopa promjene s promjenjivom bazom je...

- a) ... omjer rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki i rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.
- b) ... razlika rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki od rezultata u prethodnoj vremenskoj točki.
- c) ... razlika rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki od rezultata u početnoj vremenskoj točki.
- d) ... postotak promjene rezultata subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na rezultat u početnoj vremenskoj točki.

## 8. Deskriptivna analiza promjena

### Pitanja i zadaci

24. Koja od navedenih tvrdnji nije točna...

- a) ... verižni indeks je pokazatelj dinamike s promjenjivom bazom.
- b) ... verižni indeks je relativni pokazatelj dinamike.
- c) ... bazni indeks je pokazatelj dinamike s promjenjivom bazom.
- d) ... bazni indeks je relativni pokazatelj dinamike.

25. Pokrenite datoteku *POD.xls!* Koliki je Pearsonov koeficijent korelacije između rezultata inicijalnog mjerjenja (*MKUS\_I*) i varijable razlika između finalnog mjerjenja (*MKUS\_F*) i inicijalnog mjerjenja (*MKUS\_I*)?

- a) -0,58
- b) -0,57
- c) -0,59
- d) -0,56

26. Pokazatelji dinamike s promjenjivom bazom izražavaju...

- a) ... odstupanje stanja subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na stanje u početnoj vremenskoj točki.
- b) ... odstupanje stanja subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na stanje u prethodnoj vremenskoj točki.
- c) ... promjenu stanja subjekta u finalnoj vremenskoj točki u odnosu na inicijalnu vremensku točku.
- d) ... baznu promjenu stanja subjekta u određenoj vremenskoj točki.

27. Grupne promjene podrazumijevaju...

- a) ... razlike u razini grupe karakteristika jednog entiteta u dvije ili više vremenskih točaka.
- b) ... razlike u razini jedne ili više karakteristika grupe entiteta u dvije ili više vremenskih točaka.
- c) ... razlike u razini jedne ili više karakteristika jednog entiteta u grupi vremenskih točaka.
- d) ... razlike između entiteta unutar jedne grupe.

28. Pokazatelji dinamike sa stalnom bazom izražavaju...

- a) ... odstupanje stanja subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na stanje u prethodnoj vremenskoj točki.
- b) ... odstupanje stanja subjekta u određenoj vremenskoj točki u odnosu na stanje u početnoj vremenskoj točki.
- c) ... promjenu stanja subjekta u finalnoj vremenskoj točki u odnosu na inicijalnu vremensku točku.
- d) ... bazičnu promjenu stanja subjekta u određenoj vremenskoj točki.

29. Pokrenite datoteku *TREND.xls!* Koliko iznosi verižni indeks za osmu vremensku točku (*BRM=8*) varijable *KNPOT*?

- a) 0,97
- b) 0,85
- c) -3,03
- d) -0,15

30. Pokrenite datoteku *POD.sta!* Kolika je standardna devijacija varijable razlika između finalnog (*ATT\_F*) i inicijalnog (*ATT\_I*) mjerjenja tjelesne mase ispitanika?

- a) 16,093
- b) 16,095
- c) 16,091
- d) 16,089

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8

# 9

## *Matrična algebra I.*

10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

- matrična algebra
- matrica
- elementi matrice
- vektor stupca
- vektor retka ili transponirani vektor

### Vrste matrica

- kvadratna matrica
- transponirana matrica
- transponiranje matrice
- simetrična matrica
- dijagonalna matrica
- skalarna matrica
- matrica identiteta

### Računske operacije s matricama

- zbrajanje matrica
- oduzimanje matrica
- množenje matrica
- množenje vektora transponiranim vektorom
- množenje transponiranog vektora vektorom
- množenje matrice skalarom

### MICROSOFT EXCEL

#### Transponiranje matrice

- korištenje opcije Copy i Paste Special
- postupak transponiranja matrice

#### Računske operacije s vektorima

- unos formula u traku fx
- korištenje hvataljke
- korištenje opcije Copy i Paste

### STATISTICA

#### Importiranje \*.xls matrice

#### Transponiranje matrice

- korištenje opcije Transpose → Block
- korištenje opcije Transpose → File

#### Računske operacije s vektorima

- izračunavanje vektora putem Spreadsheet formule

## 9. Matrična algebra I.

- ▶ **Matrična algebra** je dio matematike koji se bavi računskim operacijama s matricama.
- ▶ **Matrica** predstavlja skup brojeva smještenih u  $n$  redaka i  $m$  stupaca. Matrice se označavaju velikim masno otisnutim (**bold**) slovima (**A**, **B**, **C**...), a elementi matrice s malim slovima i indeksima ( $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ...).

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Oznaka matrice

Element  $a_{1m}$  nalazi se u retku 1 i stupcu m

- ▶ Matrica koja ima više redaka i jedan stupac naziva se **vektor stupca** ili samo **vektor**, dok se matrica s više stupaca i jednim retkom naziva **vektor retka** ili **transponirani vektor**.

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \quad \mathbf{a}^T = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

- ▶ Vektori se označavaju malim masno otisnutim (**bold**) slovima (**a**, **b**, **c**...), a transponirani vektori tako da se oznaci vektora doda eksponent  $T$  ( $\mathbf{a}^T$ ,  $\mathbf{b}^T$ ,  $\mathbf{c}^T$ ...).

**Zadaci:**

- Koja je vrijednost elementa matrice **A** čiji je položaj određen indeksom  $_{35}$  ?
- Koliko stupaca sadrži matrica **A** ?
- Koliko redaka ima vektor **d<sup>T</sup>** ?

90	3	23	68	4	78
32	15	11	33	80	1256
111	122	23	21	932	987
465	32	73	23	323	223
333	4	3	62	1145	21
89	112	19	89	12	56
76	2	6	35	45	44
54	55	17	12	332	33
87	7	18	44	48	78

**A** =

$$\mathbf{d}^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

## 9. Matrična algebra I.

### Vrste matrica

- Matrica s jednakim brojem redaka i stupaca naziva se **kvadratna matrica**.

**Primjer:** Kvadratna matrica A

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

- Matricu koja je dobivena iz neke matrice A zamjenom stupaca redcima, a redaka stupcima naziva se **transponirana matrica** i označava se s  $\mathbf{A}^T$ . Opisani postupak se zove **transponiranje matrice**.

**Primjer:** Matrica  $\mathbf{A}^T$  je dobivena transponiranjem matrice A

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

- Ako je matrica A jednaka transponiranoj matrici  $\mathbf{A}^T$  naziva se **simetrična matrica**.

**Primjer:** Simetrične matrice A i  $\mathbf{A}^T$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

- Matrica koja u dijagonalni ima elemente različite od nule, dok su svi ostali elementi jednaki nuli naziva se **dijagonalna matrica**.

**Primjer:** Dijagonalna matrica D

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

## 9. Matrična algebra I.

- ▶ **Skalarna matrica** je poseban slučaj dijagonalne matrice kod koje su dijagonalni elementi jednaki.

**Primjer:** Skalarna matrica **S**

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

- ▶ Poseban slučaj skalarne matrice u kojoj su dijagonalni elementi jednaki jedinici naziva se **matrica identiteta**.

**Primjer:** Matrica identiteta **I**

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**Zadaci:**

- Transponirajte matricu **A**!

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & 17 & 15 & 22 \\ \hline 13 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 24 & 12 & 19 \\ \hline \end{array}$$

- U simetričnu matricu **X** upišite vrijednosti koje nedostaju!

$$\mathbf{X} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0,45 & & 0,78 \\ \hline 0,45 & 1 & 0,22 & 0,34 \\ \hline 0,07 & & 1 & \\ \hline & & 0,98 & 1 \\ \hline \end{array}$$

### Računske operacije s matricama

- ▶ **Zbrajanje i oduzimanje matrica** se može provoditi uz uvjet da matrice imaju jednak broj redaka i stupaca. Operacija se vrši tako da zbrojimo odnosno oduzmemo odgovarajuće elemente matrica.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \hline a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{nl} + b_{nl} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \\ \hline \end{array}$$

## 9. Matrična algebra I.

**Primjer:** Zbrajanje matrica **A** i **B**

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 4 \\ 8 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

- **Množenje matrica** se provodi tako da se zbrajaju produkti elemenata redaka prve matrice i odgovarajućih elemenata stupaca druge matrice uz uvjet da je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = c_{11} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = c_{12} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = c_{13} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = c_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = c_{22} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = c_{23} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = c_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = c_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} = c_{33} \end{vmatrix}$$

**Primjer:** Množenje matrica **A** i **B**

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 15 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 7 = 13 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 13 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 0 = 22 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 27 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 34 & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 19 & 4 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 0 = 22 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 15 & 13 & 13 & 22 \\ 27 & 34 & 19 & 22 \end{vmatrix}$$

- Množenjem nekog vektora **a** (vektor stupca) s nekim transponiranim vektorom **b<sup>T</sup>** (vektor retka) uvijek se dobije matrica.

**Primjer:** Množenje vektora **a** i **b<sup>T</sup>**

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 12 \\ 2 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

## 9. Matrična algebra I.

- Množenjem nekog transponiranog vektora  $\mathbf{a}^T$  (vektor retka) s nekim vektorom  $\mathbf{b}$  (vektor stupca) uvijek se dobije skalar.

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

**Primjer:** Množenje vektora  $\mathbf{a}^T$  i  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a}^T = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = -3$$

- **Množenje matrice skalarom** vrši se tako da se svaki element matrice pomnoži skalarom.

$$\varphi \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \varphi a_{11} & \varphi a_{12} & \dots & \varphi a_{1m} \\ \varphi a_{21} & \varphi a_{22} & \dots & \varphi a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi a_{l1} & \varphi a_{l2} & \dots & \varphi a_{lm} \end{vmatrix}$$

**Primjer:** Množenje matrice  $\mathbf{A}$  skalarom 3

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad 3 \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 6 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 15 & 6 & 18 \\ 3 & 9 & 9 \\ 18 & 15 & 15 \end{vmatrix}$$

**Zadaci:** Izračunajte!

- $\mathbf{A} - \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- $\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T$
- $\mathbf{A} \cdot 3$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 7 & 3 & 2 \\ \hline 9 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 7 & 3 & 2 \\ \hline 9 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{a} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 7 \\ \hline 9 \\ \hline \end{array}$$

### Microsoft Excel

#### Postupci:

- ▶ **Transponiranje matrice:** Prije transponiranja je potrebno označiti cijelu matricu ili dio matrice koji se želi transponirati te je pohraniti u radnu memoriju odabirom opcije *Copy* padajućeg izbornika *Edit*. Transponiranje se vrši slijedom postupaka: padajući izbornik *Edit* → *Paste Special...* → *Transpose*.
- ▶ **Računske operacije s vektorima:** Različite računske operacije s vektorima moguće je provesti upisom formula za izračunavanje vrijednosti označenog polja u traku *fx* (npr.  $=A2+C2+F2$ ) te kopiranjem unesene formule na preostale retke vektora pomoću hvataljke ili opcija *Copy* i *Paste*. Opisani postupak se često koristi za promjenu predznaka standardiziranih rezultata entiteta u obrnuto skaliranim varijablama.

---

#### Zadaci:

- ▶ Pet sportaša (s1-s5) je izmjereno s tri motorička testa (var1-var3) i dobiveni su sljedeći rezultati:

	s1	s2	s3	s4	s5
var1	12	11	11	13	15
var2	18	17	18	18	16
var3	3,4	2,4	3,3	5,1	4,8

U programu Microsoft Excel kreirajte matricu s navedenim rezultatima i pohranite je pod nazivom *MA.xls*!

- ▶ Transponirajte prethodno kreiranu matricu *MA.xls*!
  - ▶ U datoteci *KOSARKA.xls* zbrojite varijable *SUT\_2\_US*, *SUT\_3\_US* i *SL\_BA\_US* unosom formule u traku *fx*!
-

#### Postupci:

- ▶ **Importiranje \*.xls matrice:** Importiranje matrice kreirane u programu Microsoft Excel vrši se odabirom opcije *Open...* padajućeg izbornika *File*. U izborniku *Files of type* dijaloškog okvira za odabir datoteke potrebno je odabrati opciju *Excel Files (\*.xls)* te u direktorijskoj strukturi pokrenuti traženu datoteku.
- ▶ **Transponiranje matrice:** Transponiranje matrice vrši se odabirom opcija *Transpose* → *File* padajućeg izbornika *Data*. Opcija *Transpose* → *Block* padajućeg izbornika *Data* može se iskoristiti u svrhu transponiranja određenog dijela matrice pri čemu je željeni dio matrice prethodno potrebno označiti.
- ▶ **Računske operacije s vektorima:** Različite računske operacije s vektorima moguće je provesti upisom *Spreadsheet formule* (npr.  $=v1+v3+v6$ ) u traku *Long name* dijaloškog okvira za formatiranje varijabli. *Spreadsheet formule* se često koriste za promjenu predznaka standardiziranih rezultata entiteta u obrnuto skaliranim varijablama (npr.  $=v1*(-1)$ ).

---

#### Zadaci:

- ▶ Matricu *MA.xls* (prethodno kreiranu u programu Microsoft Excel) importirajte u program STATISTICA. Iskoristite opcije *Get case names from first column* i *Get variable names from first row!*
  - ▶ Transponirajte prethodno kreiranu matricu *MA.sta*!
  - ▶ U datoteci *KOSARKA.sta* zbrojite varijable *SUT\_2\_US*, *SUT\_3\_US* i *SL\_BA\_US* pomoću *Spreadsheet formule*!
- 

#### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 11-19.
- ▶ Langer, M. (2004). *Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows*. Zagreb: Miš, str. 31-35, 44-46.

# 9. Matrična algebra I.

## Pitanja i zadaci

1. Izračunajte  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$  ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a)  $\begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

c) 1

d)  $\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

2. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Matrice se označavaju malim masno otisnutim slovima.
- b) Matrice se označavaju malim slovima i odgovarajućim eksponentima.
- c) Matrice se označavaju velikim masno otisnutim slovima.
- d) Matrice se označavaju velikim slovima i odgovarajućim eksponentima.

3. Kojeg je reda matrica  $\mathbf{C}$ , ako je  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 17 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 12 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

- a)  $\mathbf{C} (3, 3)$
- b)  $\mathbf{C} (4, 5)$
- c)  $\mathbf{C} (5, 3)$
- d)  $\mathbf{C} (5, 4)$

4. Kolika je vrijednost elementa matrice  $\mathbf{A}$  čiji je položaj određen indeksom  $_{32}$ ?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 18 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & 14 & 32 \\ 5 & 15 & 21 \\ 1 & 11 & 17 \end{bmatrix}$$

- a) 9
- b) 14
- c) 32
- d) 6

5. Izračunajte  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a)  $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

6. Skalarni produkt dvaju vektora je...

- a) ... umnožak vektora stupca i vektora retka koji imaju jednak broj elemenata.
- b) ... umnožak vektora stupca sa skalarnom matricom odgovarajućeg reda.
- c) ... umnožak vektora stupca s jediničnim vektorom.
- d) ... umnožak vektora retka i vektora stupca koji imaju jednak broj elemenata.

7. Koja je od navedenih matrica ispravan primjer skalarne matrice?

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

# 9. Matrična algebra I.

## Pitanja i zadaci

8. Izračunajte  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a)  $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

9. Kako izgleda matrica identiteta reda  $I(3, 3)$ ?

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. Izračunajte  $3 \mathbf{b}^T$  ako je

$$\mathbf{b}^T = [2 \quad 1 \quad -5 \quad 3 \quad -1]$$

a)  $[6 \quad 3 \quad 15 \quad 9 \quad 3]$

b) 0

c)  $[6 \quad 3 \quad -15 \quad 9 \quad -3]$

d) 36

11. U programu Microsoft Excel matrica se može transponirati odabirom opcija...

- a) ... Paste pa Transpose putem padajućeg izbornika Edit.
- b) ... Copy Special... pa Transpose putem padajućeg izbornika Edit.
- c) ... Copy pa Transpose putem padajućeg izbornika Edit.
- d) ... Paste Special... pa Transpose putem padajućeg izbornika Edit.

12. Kako izgleda  $\mathbf{A}^T$  ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/1 & 1/-1 \\ 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

13. Koja je od navedenih matrica ispravan primjer dijagonalne matrice?

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

# 9. Matrična algebra I.

## Pitanja i zadaci

14. Izračunajte  $\mathbf{a} \mathbf{b}^T$  ako je

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) 25

b) Vektore nije moguće pomnožiti.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

15. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Vektori se označavaju velikim masno otisnutim slovima.
- b) Vektori se označavaju malim slovima i odgovarajućim eksponentima.
- c) Vektori se označavaju malim masno otisnutim slovima.
- d) Vektori se označavaju velikim slovima i odgovarajućim indeksima.

16. Koja je vrijednost elementa koji nedostaje ako je matrica  $\mathbf{A}$  simetrična matrica?

$$\mathbf{A} = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

- a) 4
- b) 3
- c) 2
- d) 5

17. Importiranje Microsoft Excel (\*.xls) datoteke u program Statistica vrši se pomoću...

- a) ... opcije Get External Data padajućeg izbornika File.
- b) ... opcije Open... padajućeg izbornika File.
- c) ... opcije Save As... padajućeg izbornika File.
- d) ... opcije Open URL... padajućeg izbornika File.

18. Izračunajte  $\mathbf{a} \mathbf{b}^T$  ako je

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) 7

b) 11

c) Vektore nije moguće pomnožiti.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

d)

19. Kolika je vrijednost elementa vektora  $\mathbf{a}$  čiji je položaj određen indeksom  $_{21}$  ?

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 21 \\ 11 \\ 13 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

- a) 21
- b) 11
- c) 2
- d) 3

20. Kojeg je reda matrica  $\mathbf{A}$  ?

$$\mathbf{A} = \begin{array}{ccc} 3 & 12 & 18 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & 14 & 32 \\ 5 & 15 & 21 \\ 1 & 11 & 17 \end{array}$$

- a)  $\mathbf{A}(3, 5)$
- b)  $\mathbf{A}(35)$
- c)  $\mathbf{A}(15)$
- d)  $\mathbf{A}(5, 3)$

21. Koliko redaka ima dijagonalna matrica s tri stupca?

- a) 3
- b) 2
- c) 1
- d) 0

## 9. Matrična algebra I.

### Pitanja i zadaci

22. Koja je od navedenih matrica ispravan primjer simetrične matrice?

2	4	5
4	3	1
5	1	2

a)

2	2	2
4	4	4
5	5	5

b)

5	4	2
1	3	4
2	1	5

c)

2	4	5
2	4	5
2	4	5

d)

2	4	5
2	4	5
2	4	5

23. Izračunajte  $\mathbf{A} \mathbf{B}$  ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a)

3	8	2
-2	0	-1
1	3	6

b) Matrice nije moguće pomnožiti.

c)

3	8
-2	0
3	13

d)

3	-2	3
8	0	13

24. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Elementi matrice se označavaju velikim masno otisnutim slovima.
- b) Elementi matrice se označavaju velikim slovima i odgovarajućim indeksima.
- c) Elementi matrice se označavaju malim slovima i odgovarajućim indeksima.
- d) Elementi matrice se označavaju malim masno otisnutim slovima i odgovarajućim eksponentima.

25. Izračunajte  $3 \mathbf{A}$  ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a)

18	0
----	---

b)

3
18
-3

c)

9	-6
12	6
-3	0

d) 18

26. Transponiranje matrice je...

- a) ... kvadriranje svih elemenata matrice.
- b) ... množenje matrice s transponiranim matricom.
- c) ... zamjena stupaca retcima odnosno redaka stupcima.
- d) ... dijeljenje svakog elementa matrice s odgovarajućom transponiranim vrijednošću.

27. Koja je od navedenih matrica ispravan primjer kvadratne matrice?

a)

1	2
---	---

b)

$2^2$	$5^2$	$7^2$
$4^2$	$4^2$	$3^2$

c)

1	3	2
2	2	3
1	1	2

d)

$1^2$
$2^2$

## 9. Matrična algebra I.

### Pitanja i zadaci

28. Izračunajte  $\mathbf{AB}$  ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a)  $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$

b) Matrice nije moguće pomnožiti.

c)  $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 13 & \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

29. Kako izgleda  $\mathbf{c}$  ako je

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -2 & -3 & -0 & -3 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/0 & 1/3 \end{bmatrix}$

30. Izračunajte  $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$  ako je

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) 9

b)  $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 12 & -4 \end{bmatrix}$

c) -5

d) Vektore nije moguće pomnožiti

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9

# 10

*Matrična algebra II.*

11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

#### *Računske operacije s matricama*

- trag matrice
- norma vektora
- normirani vektor
- euklidska udaljenost
- kosinus kuta između dvaju vektora
- jednostavna linearna kombinacija
- diferencijalno ponderirana linearna kombinacija
- ponderi
- linearna zavisnost vektora
- rang matrice
- inverz matrice
- rješavanje sustava linearnih jednadžbi u matričnom obliku
- odnos koeficijenta korelacije i kosinusa kuta između dvaju vektora

### MICROSOFT EXCEL

#### *Izračunavanje kosinusa kuta između dvaju centriranih vektora*

#### *Izračunavanje kuta iz kosinusa kuta*

- korištenje funkcije Acos
- korištenje funkcije Degrees

#### *Linearno kombiniranje vektora*

- izračunavanje linearne kombinacije unosom formula u traku fx

### STATISTICA

#### *Izračunavanje kosinusa kuta između dvaju centriranih vektora*

#### *Linearno kombiniranje vektora*

- izračunavanje linearne kombinacije vektora pomoću *Spreadsheet formule*

## 10. Matrična algebra II.

### Računske operacije s matricama

- ▶ **Trag matrice** je zbroj elemenata glavne dijagonale matrice.

**Primjer:** Trag matrice  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{trag}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{trag}(\mathbf{A}) = 2 + 4 + 3 = 9$$

**Zadaci:**

- Izračunajte  $\text{trag}(\mathbf{C})$ !
- Koliki je  $\text{trag}(\mathbf{A})$  ako je  $\mathbf{A}$  matrica identiteta s 5 redaka?

$$\mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 13 & 12 \\ \hline 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 12 & 1 & 13 & 11 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- ▶ **Duljina ili norma vektora** dobije se operacijom

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}$$

odnosno

$$\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a}^T \mathbf{a})^{1/2}$$

- ▶ Vektor čija je duljina jednaka 1 naziva se **normirani vektor**. Normirani vektor ( $\hat{\mathbf{a}}$ ) se izračunava postupkom **normiranja**, odnosno dijeljenjem vektora sa svojom duljinom:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$$

odnosno

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{a}^T \mathbf{a})^{-1/2}$$

## 10. Matrična algebra II.

**Primjer:** Normiranje vektora  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix} \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2} \\ = \sqrt{4 + 16 + 9 + 1 + 25} \\ = \sqrt{55} \\ = 7,42$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{7,42} = \begin{vmatrix} 0,27 \\ 0,54 \\ 0,4 \\ 0,13 \\ 0,67 \end{vmatrix}$$

$$\|\hat{\mathbf{a}}\| = \sqrt{0,27^2 + 0,54^2 + 0,4^2 + 0,13^2 + 0,67^2} = \sqrt{1} = 1$$

- Udaljenost između dvaju vektora istog reda izračunava se kao norma razlike dvaju vektora, a naziva se **euklidska udaljenost**.

$$d = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \left[ (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \right]^{1/2}$$

odnosno

$$d = \left( \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right)^{1/2}$$

**Primjer:** Euklidska udaljenost između vektora  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d = \left[ (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \right]^{1/2} = \left[ \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \right]^{1/2} = \sqrt{9} = 3$$

**Zadaci:**

- Kolika je norma vektora  $\mathbf{a}$ ?
- Normirajte vektor  $\mathbf{a}$ !
- Kolika je udaljenost između vektora  $\mathbf{a}$  i vektora  $\mathbf{b}$ ?

$$\mathbf{a} = \begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 3 \end{array}$$

$$\mathbf{b} = \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2 \end{array}$$

## 10. Matrična algebra II.

- **Kosinus kuta između dvaju vektora** istog reda izračunava se kao omjer skalarnog produkta dvaju vektora i umnoška njihovih normi.

$$\cos\alpha = (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) (\mathbf{a}^T \mathbf{a})^{-1/2} (\mathbf{b}^T \mathbf{b})^{-1/2}$$

odnosno

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$$

**Primjer:** Kosinus kuta između vektora  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29} = 5,39$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{50} = 7,07$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) + (4 \cdot 5) + (3 \cdot 3) = 37$$

$$\cos\alpha = \frac{37}{5,39 \cdot 7,07} = \frac{37}{38,11} = 0,97$$

- Ako se rezultati u varijablama centriraju

$$a_{ci} = a_i - \bar{a}$$

$$b_{ci} = b_i - \bar{b}$$

tada je kosinus kuta  $\alpha$  jednak

$$\cos\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ci} b_{ci}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ci}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_{ci}^2}}$$

što je formula za izračunavanje koeficijenta korelacije, pa je

$$r_{ab} = \cos\alpha_{ab}$$

## 10. Matrična algebra II.

- ▶ **Linearna kombinacija vektora** je vektor koji je nastao zbrajanjem drugih vektora ponderiranih pripadajućim skalarima. Ako su  $\mathbf{a}_j$  ( $j=1,\dots,m$ ) vektori istog reda, a  $\beta_j$  pripadajući skaliari onda je vektor  $\mathbf{b}$  linearna kombinacija vektora  $\mathbf{a}_j$

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{a}_j = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{a}_m$$

- ▶ **Jednostavna linearna kombinacija** je vektor nastao zbrajanjem drugih vektora istog reda ponderiranih jednakim skalarima.
- ▶ **Diferencijalno ponderirana linearna kombinacija** je vektor nastao zbrajanjem drugih vektora istog reda ponderiranih različitim skalarima (**ponderima**).
- ▶ Ako su  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  i  $\mathbf{c}$  vektori istog reda, a  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  skaliari, novi vektor  $\mathbf{d}$  nastao je linearom kombinacijom vektora  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  i  $\mathbf{c}$  ponderiranih skalarima  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ .

$$\mathbf{d} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n + \gamma \cdot c_n \end{vmatrix}$$

- ▶ Za neki redak ili stupac matrice kažemo da je **linearno zavisan** ako se može izraziti kao linearna kombinacija drugih redaka ili stupaca te matrice.
- ▶ **Rang matrice** jednak je minimalnom broju redaka ili stupaca u matrici čijom se linearom kombinacijom mogu izraziti svi ostali redci ili stupci te matrice.

**Primjer:** Rang matrice  $\mathbf{A}$  je 2 jer se, primjerice, prvi stupac može izračunati kao linearna kombinacija elemenata drugog i trećeg stupca.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 13 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} a_{11} &= 2 \cdot a_{12} + a_{13} = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ a_{21} &= 2 \cdot a_{22} + a_{23} = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \\ a_{31} &= 2 \cdot a_{32} + a_{33} = 2 \cdot 4 + 5 = 13 \end{aligned}$$

## 10. Matrična algebra II.

**Zadaci:**

- Izračunajte jednostavnu linearu kombinaciju vektora  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  i  $\mathbf{c}$ !
- Izračunajte  $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ !
- Kojeg je ranga matrica  $\mathbf{A}$ ?

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Inverz matrice** u matričnoj algebri odgovara recipročnoj vrijednosti broja (skalara) u skalarnoj algebri. Inverz matrice moguće je izračunati samo ako je matrica kvadratna i punog ranga. Matrica  $\mathbf{A}^{-1}$  je inverz matrice  $\mathbf{A}$  ako je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

- Inverz matrice može se koristiti za *rješavanje sustava linearnih jednadžbi u matričnom obliku* na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{y} && / \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} \end{aligned}$$

gdje je

- $\mathbf{A}$  - kvadratna matrica reda  $n \times n$  poznatih vrijednosti
- $\mathbf{x}$  - vektor stupca reda  $n \times 1$  nepoznatih vrijednosti
- $\mathbf{y}$  - vektor stupca reda  $n \times 1$  poznatih vrijednosti.

### Microsoft Excel

#### Postupci:

- ▶ **Izračunavanje kosinusa kuta između dvaju centriranih vektora:** Izračunavanje kosinusa kuta između dvaju centriranih vektora jednako je izračunavanju Pearsonovog koeficijenta korelacije, a vrši se pomoću funkcije Pearson. Putem traka Array1 i Array2 potrebno je definirati niz podataka prve, odnosno druge varijable/vektora.
- ▶ **Izračunavanje kuta iz kosinusa kuta:** Izračunavanje kuta iz kosinusa kuta vrši se pomoću funkcije Acos. Izračunatu vrijednost u radijanima moguće je pretvoriti u stupnjeve pomoću funkcije Degrees.
- ▶ **Linearno kombiniranje vektora:** Linearno kombiniranje vektora moguće je provesti upisom formula za izračunavanje vrijednosti označenog polja u traku fx (npr.  $=2*A2+3*C2+F2$ ) te kopiranjem unesene formule na preostale retke vektora pomoću hvataljke ili opcija Copy i Paste.

---

#### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Judo.xls* izračunaj koliki je kosinus kuta između standardiziranih vektora *SDM* i *BML* !
  - ▶ U datoteci *Judo.xls* izračunaj koliki je kut između standardiziranih vektora *SDM* i *BML* !
  - ▶ U datoteci *KOSARKA.sta* izračunajte linearnu kombinaciju vektora *SUT\_2\_US*, *SUT\_3\_US* i *SL\_BA\_US* tako da vektor *SUT\_2\_US* ponderirate s 2, vektor *SUT\_3\_US* s 3, a vektor *SL\_BA\_US* s 1 !
-

## 10. Matrična algebra II.



### STATISTICA

#### Postupci:

- ▶ **Izračunavanje kosinusa kuta između dvaju centriranih vektora:** Izračunavanje kosinusa kuta između dvaju centriranih vektora jednako je izračunavanju Pearsonovog koeficijenta korelacije, a izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Correlation matrices*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *One variable list* potrebno je označiti varijable/vektore između kojih se želi izračunati kosinus kuta, odnosno Pearsonov koeficijent korelacije.
- ▶ **Linearno kombiniranje vektora:** Linearno kombiniranje vektora moguće je provesti upisom *Spreadsheet formule* (npr.  $=2*v1+3*v3+v6$ ) u traku *Long name* dijaloškog okvira za formatiranje varijabli.

---

#### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Judo.sta* izračunaj koliki je kosinus kuta između standardiziranih vektora *SDM* i *BML* !
  - ▶ U datoteci *KOSARKA.xls* izračunajte linearnu kombinaciju vektora *SUT\_2\_US*, *SUT\_3\_US* i *SL\_BA\_US* tako da vektor *SUT\_2\_US* ponderirate s 2, vektor *SUT\_3\_US* s 3, a vektor *SL\_BA\_US* s 1 !
- 

#### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 20-24, 27-30, 32-34.
- ▶ Langer, M. (2004). *Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows*. Zagreb: Miš, str. 31-35, 44-46, 75-103.

# 10. Matrična algebra II.

## Pitanja i zadaci

1. Izračunajte  $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & +\infty \end{vmatrix}$

c) 0

d)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. Euklidska udaljenost je...

- a) ... udaljenost između dvaju vektora istog reda.
- b) ... kvadratna udaljenost između dvaju vektora istog reda.
- c) ... razlika između dvaju vektora istog reda.
- d) ... kvadratna razlika udaljenosti između dvaju vektora istog reda.

3. Pearsonov koeficijent korelacije između dvaju centriranih vektora jednak je -1. Koliki je kut između navedenih vektora?

- a) 90 stupnjeva
- b) 270 stupnjeva
- c) -1 stupanj
- d) 180 stupnjeva

4. Rang matrice jednak je...

- a) ... zbroju elemenata glavne dijagonale matrice.
- b) ... minimalnom broju redaka ili stupaca u matrici čijom se linearном kombinacijom mogu izraziti svi ostali redci ili stupci te matrice.
- c) ... produktu broja redaka i broja stupaca matrice.
- d) ... broju redaka matrice.

5. Kosinus kuta između dvaju centriranih vektora jednak je...

- a) ... Pearsonovom koeficijentu korelacije.
- b) ... razlici između aritmetičkih sredina vektora.
- c) ... baznom indeksu.
- d) ... koeficijentu varijabilnosti.

6. Koliki je trag matrice  $\mathbf{A}$  ako je

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 17 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- a) (1, 2, 3, 5, 1)
- b) 12
- c) 5
- d) 25

7. Norma vektora je...

- a) ... zbroj svih elemenata vektora.
- b) ... smjer vektora.
- c) ... zbroj svih pozitivnih elemenata vektora.
- d) ... duljina vektora.

8. Pearsonov koeficijent korelacije između dvaju centriranih vektora jednak je 0. Koliki je kut između navedenih vektora?

- a) 180 stupnjeva
- b) 0 stupnjeva
- c) 45 stupnjeva
- d) 90 stupnjeva

9. Linearna kombinacija vektora je...

- a) ... vektor nastao zbrajanjem drugih vektora ponderiranim pripadajućim skalarima.
- b) ... vektor nastao zbrajanjem ponderira pripadajućih vektora.
- c) ... vektor nastao zbrajanjem ponderira pripadajućih skala.
- d) ... vektor razlika drugih vektora i pripadajućih skala.

10. Kut između dvaju centriranih vektora iznosi 3 stupnja. Kakva je korelacija između navedenih vektora?

- a) Nepotpuna negativna
- b) Potpuna pozitivna
- c) Nepotpuna pozitivna
- d) Potpuna negativna

# 10. Matrična algebra II.

## Pitanja i zadaci

11. Koliki je kosinus kuta između dvaju paralelnih vektora istog smjera?

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) 90

12. Kolika je euklidska udaljenost između vektora  $\mathbf{a}^T$  i  $\mathbf{b}^T$

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) 2,23
- b) 1,98
- c) 3,25
- d) 3,74

13. Koliki je kosinus kuta između dva međusobno okomitna vektora?

- a) 1
- b) 0
- c) 90
- d) -1

14. Izračunajte normu vektora  $\mathbf{a}^T$  ako je

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) 5
- b) -5
- c) 1
- d) 3

15. Trag matrice...

- a) ... je produkt broja redaka i broja stupaca matrice.
- b) ... je zbroj elemenata glavne dijagonale matrice.
- c) ... su elementi glavne dijagonale matrice poređani od prvog do zadnjeg.
- d) ... je broj elemenata glavne dijagonale matrice.

16. Kolika je norma vektora reda  $(5,1)$  čija je duljina jednaka 1?

- a) 1
- b) 5
- c) 25
- d) 0,2

17. Kut između dva centrirana vektora iznosi 120 stupnjeva. Kakva je korelacija između navedenih vektora?

- a) Nepotpuna pozitivna
- b) Potpuna pozitivna
- c) Nepotpuna negativna
- d) Potpuna negativna

18. Ako su  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  i  $\mathbf{z}$  vektori istog reda, a  $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$  onda je  $\mathbf{w}$  ispravan primjer...

- a) ... diferencijalno ponderirane linearne kombinacije.
- b) ... jednostavne linearne normacije.
- c) ... diferencijalno polarizirane linearne normacije.
- d) ... jednostavne linearne kombinacije.

19. Koliki je kosinus kuta između vektora  $\mathbf{a}^T$  i vektora  $\mathbf{b}^T$

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) 0,54
- b) 0,92
- c) 0,78
- d) 1

20. Ako se svi elementi vektora podijele s duljinom tog vektora dobije se...

- a) ... vektor identiteta.
- b) ... normirani vektor.
- c) ... matrica identiteta.
- d) ... jedinični vektor.

# 10. Matrična algebra II.

## Pitanja i zadaci

21. Kosinus kuta između dva potpuno jednaka vektora s tri elementa jednak je...

- a) 0
- b) 3
- c) 1
- d) 9

22. Ako su  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  i  $\mathbf{z}$  vektori istog reda, a  $\mathbf{w}=2\mathbf{a}+4\mathbf{b}+\mathbf{c}$  onda je  $\mathbf{w}$  ispravan primjer...

- a) ... jednostavne linearne kombinacije.
- b) ... jednostavne linearne normacije.
- c) ... diferencijalno ponderirane linearne kombinacije.
- d) ... diferencijalno polarirane linearne normacije.

23. Izračunajte vektor  $\mathbf{w}$  ako je  $\mathbf{w}=2\mathbf{x}+0,25\mathbf{y}+0,43\mathbf{z}$ , a

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 12,19 \\ 13,62 \\ 7,26 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,25 \\ 0,43 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 13,55 \\ 17,22 \\ 10,25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 12,78 \\ 13,33 \\ 11,15 \end{bmatrix}$$

24. Pearsonov koeficijent korelacije između dvaju centriranih vektora jednak je 1. Koliki je kut između navedenih vektora?

- a) 90 stupnjeva
- b) 180 stupnjeva
- c) 1 stupanj
- d) 0 stupnjeva

25. Koliki je  $\text{trag}(\mathbf{A})$  ako je  $\mathbf{A}$  matrica identiteta sa sedam stupaca?

- a) 7
- b) 49
- c) (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
- d) 2,65

26. Kolika je euklidska udaljenost između dva potpuno jednaka vektora s pet elemenata?

- a) 1
- b) 0
- c) 5
- d) 25

27. Kosinus kuta između dvaju vektora izračunava se kao...

- a) ... umnožak normi dvaju vektora.
- b) ... umnožak skalarnog produkta dvaju vektora i zbroja njihovih normi.
- c) ... omjer skalarnog produkta dvaju vektora i umnoška njihovih normi.
- d) ... omjer skalarnog produkta dvaju vektora i razlike njihovih normi.

28. Euklidska udaljenost izračunava se kao...

- a) ... norma razlike između dvaju vektora.
- b) ... razlika između normi dvaju vektora.
- c) ... norma zbroja dvaju vektora.
- d) ... zbroj normi dvaju vektora.

29. Normirajte vektor  $\mathbf{a}^T$  ako je

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}) \begin{bmatrix} 16 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}) \begin{bmatrix} 4/6 & 2/6 & 3/6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}) \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}) \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

30. Koliki je kosinus kuta između dvaju paralelnih vektora suprotnog smjera?

- a) 0
- b) -1
- c) 1
- d) 90

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10

# 11

*Regresijska analiza*

12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

- zavisna (kriterijska) varijabla
- nezavisna (prediktorska) varijabla
- primjena regresijske analize u kineziologiji
- podjela regresijskih modela
- odabir modela jednostavne regresijske analize putem korelačijskog dijagrama

### Jednostavna linearna regresijska analiza

- jednadžba regresijskog pravca
- metoda najmanjih kvadrata
- regresijski koeficijent  $b_0$
- regresijski koeficijent  $b_1$
- prognoziranje rezultata u kriterijskoj varijabli
- prognozirani rezultat
- rezidualna vrijednost
- distribucija rezidualnih vrijednosti oko regresijskog pravca
- standardna pogreška prognoze
- koeficijent korelacije kao mjera povezanosti prediktorske i kriterijske varijable
- koeficijent determinacije

### Višestruka linearna regresijska analiza

- jednadžba višestruke linearne regresije
- nestandardizirani regresijski koeficijenti
- standardizirani regresijski koeficijenti
- testiranje statističke značajnosti regresijskog koeficijenta
- standardna pogreška prognoze
- koeficijent multiple korelacije
- koeficijent multiple determinacije
- testiranje statističke značajnosti koeficijenta multiple korelacije

### STATISTICA

#### Jednostavna linearna regresijska analiza

- izračunavanje nestandardiziranih regresijskih koeficijenata
- izračunavanje standardne pogreške prognoze

#### Višestruka linearna regresijska analiza

- izračunavanje koeficijenta multiple korelacije
- izračunavanje koeficijenta multiple determinacije
- testiranje statističke značajnosti koeficijenta multiple korelacije
- izračunavanje standardiziranih regresijskih koeficijenata
- izračunavanje nestandardiziranih regresijskih koeficijenata
- testiranje statističke značajnosti regresijskih koeficijenata
- izračunavanje standardne pogreške prognoze

## 11. Regresijska analiza

- ▶ **Regresijska analiza** je matematičko-statistički postupak kojim se utvrđuje odgovarajuća funkcionalna veza (relacija) između jedne zavisne ili kriterijske varijable i jedne ili više nezavisnih ili prediktorskih varijabli.
- ▶ **Zavisna (kriterijska) varijabla** je varijabla čiji se varijabilitet objašnjava nezavisnim varijablama.
- ▶ **Nezavisne (prediktorske) varijable** su varijable na temelju kojih se objašnjava varijabilitet zavisne varijable.
- ▶ Regresijska analiza se u kinezologiji najčešće koristi u svrhu:
  - utvrđivanja utjecaja jedne varijable ili skupa varijabli na neku kriterijsku varijablu (npr. utvrđivanje utjecaja karakteristika građe tijela na rezultat u bacanju kugle) i
  - utvrđivanje trenda razvoja rezultata u nekom sportu (npr. utvrđivanje trenda razvoja najboljih rezultata u bacanju kugle na svjetskim prvenstvima).
- ▶ Funkcionalna veza između prediktorskih varijabli i kriterijske varijable definira se utvrđivanjem odgovarajuće **regresijske jednadžbe**. Opći oblik regresijske jednadžbe izgleda ovako:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m) + e$$

nezavisne (prediktorske) varijable

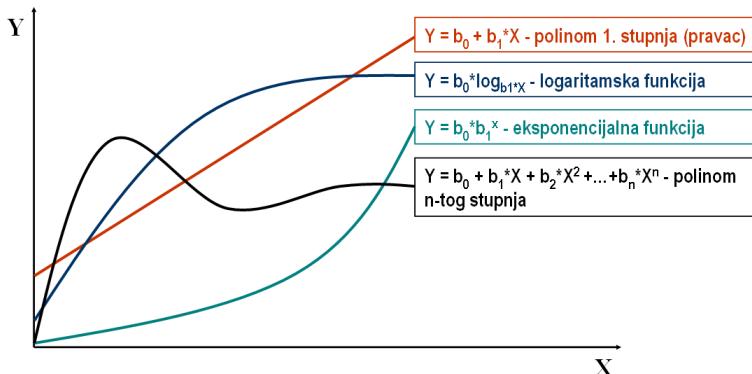
zavisna (kriterijska) varijabla

odgovarajuća funkcija      greška prognoze

- ▶ Regresijske modele moguće je generalno podijeliti na temelju dvaju kriterija i to:
  - prema broju nezavisnih varijabli na:
    - jednostavne (simple) regresijske modele i
    - višestruke (multiple) regresijske modele, te
  - prema odnosu između zavisne i nezavisnih varijabli na:
    - linearne regresijske modele i
    - nelinearne regresijske modele.

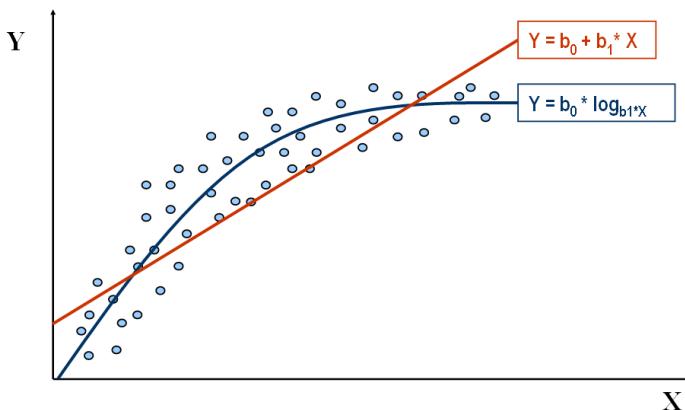
## 11. Regresijska analiza

**Prikaz:** Linearni i nelinearni modeli jednostavne regresijske analize



- Odabir modela jednostavne regresijske analize vrši se pomoću korelacijskog dijagrama.

**Prikaz:** Primjer korelacijskog dijagrama koji upućuje da je logaritamska funkcija prikladan model



### Jednostavna linearna regresijska analiza

- **Jednostavnom linearnom regresijskom analizom** utvrđuje se linearna povezanost između jedne nezavisne (prediktorske) i jedne zavisne (kriterijske) varijable pri čemu regresijska jednadžba ima sljedeći oblik:

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i$$

gdje je

- $y_i$  - rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $b_0$  i  $b_1$  - regresijski koeficijenti
- $x_i$  - rezultat entiteta  $i$  u prediktorskoj varijabli
- $e_i$  - rezidualna vrijednost entiteta  $i$
- $i = 1, \dots, n$  ( $n$  – broj entiteta).

## 11. Regresijska analiza

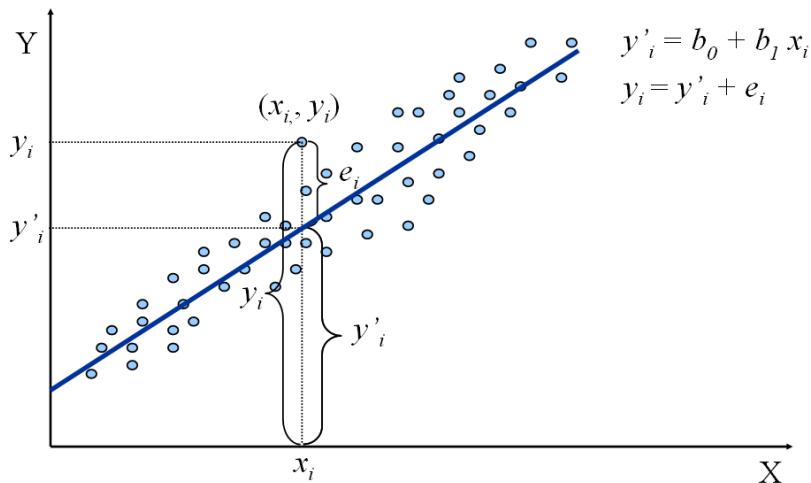
- Regresijski koeficijenti omogućavaju prognoziranje rezultata entiteta u kriterijskoj varijabli na temelju rezultata u prediktorskoj varijabli putem sljedeće formule:

$$y'_i = b_0 + b_1 x_i$$

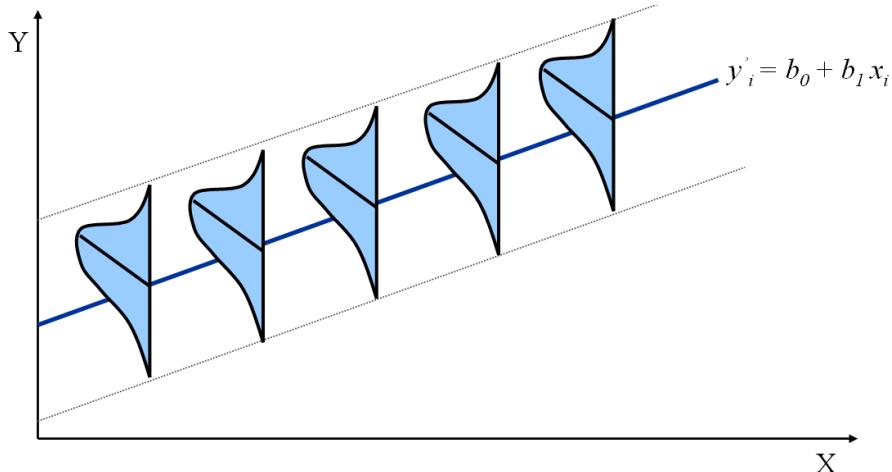
gdje je

- $y'_i$  - prognozirani rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $b_0$  i  $b_1$  - regresijski koeficijenti
- $x_i$  - rezultat entiteta  $i$  u prediktorskoj varijabli
- $i = 1, \dots, n$
- $n$  - broj entiteta.

**Prikaz:** Originalni i prognozirani rezultati u kriterijskoj varijabli i rezidualne vrijednosti



**Prikaz:** Distribucija rezidualnih vrijednosti oko regresijskog pravca



## 11. Regresijska analiza

- Koeficijenti regresijskog pravca utvrđuju se **metodom najmanjih kvadrata**. Metoda najmanjih kvadrata temelji se na uvjetu da je suma kvadrata rezidualnih vrijednosti minimalna

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y')^2 = \min$$

gdje je

- $e_i$  - rezidualna vrijednost entiteta  $i$
- $y_i$  - rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $y'$  - prognozirani rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $i = 1, \dots, n$
- $n$  - broj entiteta.

- **Regresijski koeficijent  $b_0$**  predstavlja odsječak na osi zavisne varijable  $y$ , odnosno, vrijednost zavisne varijable  $y$  ukoliko je vrijednost nezavisne varijable  $x = 0$ .

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

gdje je

- $y_i$  - rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $x_i$  - rezultat entiteta  $i$  u prediktorskoj varijabli
- $i = 1, \dots, n$
- $n$  - broj entiteta.

- **Regresijski koeficijent  $b_1$**  određuje nagib pravca, odnosno pokazuje koliko se u prosjeku linearno mijenja vrijednost zavisne varijable  $y$  za jedinični porast vrijednosti nezavisne varijable  $x$ .

$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

gdje je

- $y_i$  - rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $x_i$  - rezultat entiteta  $i$  u prediktorskoj varijabli
- $i = 1, \dots, n$
- $n$  - broj entiteta.

## 11. Regresijska analiza

- Regresijski koeficijenti se također mogu izračunati i rješavanjem regresijske jednadžbe u matričnom obliku:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e}$$

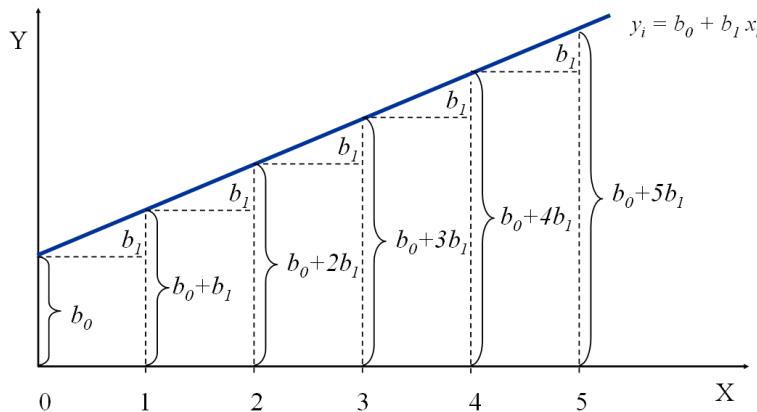
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{x}_1 \\ \vdots & \vdots \\ I & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

gdje je

- $\mathbf{y}$  - vektor  $n$  rezultata entiteta u kriteriju
- $\mathbf{X}$  - matrica reda  $n \times 2$  rezultata entiteta u prediktoru
- $\mathbf{b}$  - vektor regresijskih koeficijenata
- $\mathbf{e}$  - vektor  $n$  rezidualnih vrijednosti.

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{X} \mathbf{b} & / \mathbf{X}^T \\ \mathbf{X}^T \mathbf{y} &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b} & / (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\ \mathbf{b} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' &= \mathbf{X} \mathbf{b} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{y} - \mathbf{y}' \end{aligned}$$

**Prikaz:** Regresijski koeficijenti  $b_0$  i  $b_1$



- Standardna pogreška prognoze ( $\sigma_e$ ) je drugi korijen iz varijance rezidualnih vrijednosti, a predstavlja mjeru reprezentativnosti regresijskog modela.

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2}{n-2}}$$

gdje je

- $y_i$  - rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $y'_i$  - prognozirani rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $i = 1, \dots, n$
- $n$  - broj entiteta.

## 11. Regresijska analiza

- Koeficijent korelacije između kriterijske i prediktorske varijable izražava veličinu njihove linearne povezanosti. Kada je  $r_{x,y} = 0$  to znači da nezavisna varijabla  $x$  nema nikakav utjecaj na varijabilitet kriterijske varijable  $y$ . Ako koeficijent korelacije ima maksimalnu vrijednost  $r_{x,y} = 1$ , to znači da je cijelokupan varijabilitet varijable  $y$  moguće pripisati utjecaju varijable  $x$ . Kvadrat koeficijenta korelacije ( $r^2$ ) naziva se **koeficijent determinacije**, a predstavlja proporciju varijance kriterijske varijable koju je moguće objasniti putem prediktorske varijable.

### Višestruka linearna regresijska analiza

- **Višestrukom linearom regresijskom analizom** utvrđuje se linearna povezanost između dviju ili više nezavisnih (prediktorskih) i jedne zavisne (kriterijske) varijable pri čemu regresijska jednadžba ima sljedeći oblik:

$$y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \dots + b_m x_{im} + e_i$$

gdje je

- $y_i$  - rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $b_0, \dots, b_m$  - regresijski koeficijenti
- $x_{i1}, \dots, x_{im}$  - rezultati entiteta  $i$  u  $m$  prediktorskih varijabli
- $e_i$  - rezidualna vrijednost entiteta  $i$
- $i = 1, \dots, n$  ( $n$  - broj entiteta)
- $m$  - broj prediktorskih varijabli.

- Regresijski koeficijenti mogu se izračunati rješavanjem regresijske jednadžbe u matričnom obliku:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{b} + \mathbf{e}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{y} = \\ \left| \begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{array} \right| = \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} I & x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I & x_{n1} & \cdot & \cdot & x_{nm} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{array} \right|$$

gdje je

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{X} \mathbf{b} && / \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{y} &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b} && / (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\ \mathbf{b} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' &= \mathbf{X} \mathbf{b} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{y} - \mathbf{y}' \end{aligned}$$

- $\mathbf{y}$  - vektor  $n$  rezultata entiteta u kriteriju
- $\mathbf{X}$  - matica reda  $n \cdot m+1$  rezultata entiteta u  $m$  prediktora
- $\mathbf{b}$  - vektor regresijskih koeficijenata
- $\mathbf{y}'$  - vektor  $n$  prognoziranih vrijednosti u kriteriju
- $\mathbf{e}$  - vektor  $n$  rezidualnih vrijednosti.

- **Regresijski koeficijent  $b_0$**  predstavlja prognozirani rezultat u zavisnoj varijabli  $y$  ako su rezultati u svim nezavisnim varijablama jednaki 0.

## 11. Regresijska analiza

- ▶ **Regresijski koeficijenti  $b_1, \dots, b_m$**  pokazuju koliko se u prosjeku linearno mijenja vrijednost zavisne varijable  $y$  za jedinični porast vrijednosti odgovarajuće nezavisne varijable ( $x_1, \dots, x_m$ ) uz uvjet da su vrijednosti ostalih nezavisnih varijabli konstantne.
- ▶ Ako se kriterijska i prediktorske varijable prethodno standardiziraju regresijska jednadžba poprima sljedeći oblik:

$$k_i = \beta_1 z_{i1} + \beta_2 z_{i2} + \dots + \beta_m z_{im} + \varepsilon_i$$

gdje je

- $k_i$  - standardizirani rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $\beta_1, \dots, \beta_m$  - standardizirani regresijski koeficijenti
- $z_{i1}, \dots, z_{im}$  - standardizirani rezultati entiteta  $i$  u  $m$  prediktorskih varijabli
- $\varepsilon_i$  - standardizirana rezidualna vrijednost entiteta  $i$
- $i = 1, \dots, n$  ( $n$  - broj entiteta)
- $m$  - broj prediktorskih varijabli.

- ▶ **Standardizirani regresijski koeficijenti** mogu se izračunati rješavanjem sljedeće jednadžbe u matričnom obliku:

$$\begin{matrix} \mathbf{k} = \mathbf{Z} & \mathbf{\beta} + \mathbf{\varepsilon} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left| \begin{matrix} k_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_n \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} z_{11} & \dots & z_{1m} \\ \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ z_{n1} & \dots & z_{nm} \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_m \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{matrix} \right| \end{matrix}$$

gdje je

- $\mathbf{k}$  - vektor  $n$  standardiziranih rezultata entiteta u kriteriju
- $\mathbf{Z}$  - matrica reda  $n \times m$  standardiziranih rezultata entiteta u  $m$  prediktora
- $\mathbf{\beta}$  - vektor standardiziranih regresijskih koeficijenata
- $\mathbf{r}$  - vektor korelacija  $m$  prediktora s kriterijem
- $\mathbf{R}$  - matrica međusobnih korelacija  $m$  prediktora

$$\mathbf{k} = \mathbf{Z} \mathbf{\beta} \quad / \quad \mathbf{Z}^T \mathbf{n}^{-1}$$

$$\underbrace{\mathbf{Z}^T \mathbf{k}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\mathbf{n}^{-1}}_{\mathbf{R}^{-1}} = \underbrace{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\mathbf{n}^{-1}}_{\mathbf{R}^{-1}} \mathbf{\beta}$$

$$\left| \begin{matrix} \mathbf{r}_1 & | & I & \mathbf{r}_{12} & \dots & \mathbf{r}_{1m} \\ \cdot & | & \mathbf{r}_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{r}_m & | & \mathbf{r}_{m1} & \cdot & \cdot & I \end{matrix} \right|$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \mathbf{\beta} \quad / \quad \mathbf{R}^{-1}$$

$$\mathbf{\beta} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}$$

## 11. Regresijska analiza

- ▶ **Standardizirani regresijski koeficijenti** ( $\beta_1, \dots, \beta_m$ ) su relativni koeficijenti utjecaja, a predstavljaju veličinu promjene zavisne varijable izraženu u dijelovima standardne devijacije za jedinični porast standardizirane vrijednosti odgovarajuće nezavisne varijable ( $z_1, \dots, z_m$ ) uz uvjet da su vrijednosti preostalih nezavisnih varijabli konstantne.
- ▶ Statistička značajnost svakog pojedinog regresijskog koeficijenta se testira putem Studentove t-distribucije. Pri tome je za svaki regresijski koeficijent moguće postaviti sljedeću nullu ( $H_0$ ), odnosno alternativnu ( $H_1$ ) hipotezu:
  - $H_0: b_j = 0$  - Uz pogrešku  $p$  ne možemo tvrditi da je utjecaj prediktora  $j$  na kriterijsku varijablu statistički značajan.
  - $H_1: b_j \neq 0$  - Utjecaj prediktora  $j$  na kriterijsku varijablu je statistički značajan uz pogrešku  $p$ .
- ▶ **Standardna pogreška prognoze** ( $\sigma_e$ ) je drugi korijen iz varijance rezidualnih vrijednosti, a predstavlja mjeru reprezentativnosti regresijskog modela.

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2}{n - (m + 1)}}$$

gdje je

- $y_i$  - rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $y'_i$  - prognozirani rezultat entiteta  $i$  u kriterijskoj varijabli
- $i = 1, \dots, n$
- $n$  - broj entiteta,  $m$  - broj prediktorskih varijabli.

- ▶ **Koeficijent multiple korelacijs** ( $\rho$ ) je korelacija između kriterijske varijable i varijable prognoziranih rezultata, a izražava veličinu linearne povezanosti skupa prediktorskih varijabli s kriterijem. Koeficijent multiple korelacijs se kreće u intervalu od 0 do 1 pri čemu 0 označava potpunu nezavisnost, a 1 potpunu zavisnost kriterijske varijable o skupu prediktorskih varijabli. Kvadrat koeficijenta multiple korelacijs ( $\rho^2$ ) naziva se **koeficijent multiple determinacije**, a predstavlja proporciju varijance kriterijske varijable koju je moguće objasniti putem skupa prediktorskih varijabli.
- ▶ **Statistička značajnost** koeficijenta multiple korelacijs se testira putem Snedecorove F-distribucije. Pri tome je moguće postaviti sljedeću nullu ( $H_0$ ), odnosno alternativnu ( $H_1$ ) hipotezu:
  - $H_0: \rho = 0$  - Uz pogrešku  $p$  ne možemo tvrditi da je povezanost između skupa prediktora i kriterijske varijable statistički značajna.
  - $H_1: \rho \neq 0$  - Povezanost između skupa prediktora i kriterijske varijable je statistički značajna uz pogrešku  $p$ .

## 11. Regresijska analiza



STATISTICA

### Postupci:

- ▶ **Linearna regresijska analiza:** Jednostavna i višestruka linearna regresijska analiza izvode se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Multiple Regression*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *Variables* potrebno je označiti zavisnu varijablu (*Dependent var.*) i jednu ili više nezavisnih varijabli (*Independent variable list*). Nakon odabira varijabli rezultatima regresijske analize pristupa se putem opcije *Summary: Regression results*.
- 

### Zadaci:

- ▶ U datoteci *TREND.sta* utvrđite regresijsku jednadžbu kojom je moguće prognozirati tjelesnu masu (*TEZ*) testiranog ispitanika na temelju broja tjedana vježbanja (*BRM*)!
  - ▶ U datoteci *KOSARKA.sta* utvrđite regresijsku jednadžbu kojom je moguće prognozirati uspješnost ekipe (*K2*) na temelju skupa situacijskih parametara (v1-v12)!
- 

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 182-213.
- ▶ Petz, B. (2002). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jastrebarsko:Naklada Slap, str. 237-247.
- ▶ Mejovšek, M. (2003). *Uvod u metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 182-200.

# 11. Regresijska analiza

## Pitanja i zadaci

1. Zavisna varijabla je...

- a) ... varijabla čiji se varijabilitet objašnjava putem nezavisnih varijabli.
- b) ... varijabla prema kojoj se entiteti grupiraju u međusobno nezavisne grupe.
- c) ... varijabla čija je varijanca linearno zavisna o broju entiteta.
- d) ... varijabla čiji se varijabilitet opisuje putem broja entiteta.

2. Koeficijent determinacije u jednostavnoj linearnoj regresijskoj analizi predstavlja...

- a) ... proporciju zajedničke varijance nezavisne varijable i varijable prognoziranih vrijednosti u zavisnoj varijabli.
- b) ... proporciju zajedničke varijance zavisne varijable i varijable rezidualnih vrijednosti.
- c) ... proporciju zajedničke varijance nezavisne i zavisne varijable.
- d) ... proporciju zajedničke varijance nezavisne varijable i varijable rezidualnih vrijednosti.

3. Pokrenite datoteku KOSARKA.sta! Višestrukom linearnom regresijskom analizom utvrđite utjecaj skupa prediktorskih varijabli *SUT\_2\_US*, *SUT\_3\_US*, *SL\_BA\_US*, *SKOK\_NAP* i *SKOK\_OBR* na varijablu *K2*! Koliko iznosi standardizirani regresijski koeficijent za varijablu *SKOK\_OBR*?

- a) 0,43
- b) 1,73
- c) 0,67
- d) 14,04

4. Ako je jednostavnom linearnom regresijskom analizom utvrđeno da je koeficijent determinacije jednak 1, koja od navedenih tvrdnji sigurno nije točna?

- a) Prediktorska i kriterijska varijabla su potpuno linearno zavisne.
- b) Korelacija između prediktorske i kriterijske varijable iznosi 1
- c) Korelacija između prediktorske i kriterijske varijable iznosi 0.
- d) Korelacija između prediktorske i kriterijske varijable iznosi -1 .

5. Drugi naziv za nezavisnu varijablu je...

- a) ... rezidualna varijabla.
- b) ... prediktorska varijabla.
- c) ... kriterijska varijabla.
- d) ... ponderska varijabla.

6. U općem obliku regresijske jednadžbe  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m) + e$  slovo *Y* označava...

- a) ... y crtano.
- b) ... nezavisnu varijablu.
- c) ... zavisnu varijablu.
- d) ... skup y vektora.

7. Koji se grafički prikaz koristi pri odabiru modela jednostavne regresijske analize?

- a) Histogram frekvencija
- b) Korelacijski dijagram
- c) Strukturni krug
- d) Grafikon stupaca

8. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Koeficijenti regresijskog pravca određuju se metodom najmanjih kvadrata.
- b) Metoda najmanjih kvadrata podrazumijeva minimalnu sumu kvadrata rezidualnih vrijednosti.
- c) Rezultati u kriterijskoj varijabli mogu se prognozirati putem regresijske jednadžbe.
- d) Smjer regresijskog pravca određuje se kvadriranjem minimalne vrijednosti u kriterijskoj varijabli.

9. Koeficijent  $b_1$  izračunat višestrukom linearном regresijskom analizom označava...

- a) ... prognoziranu vrijednost u kriterijskoj varijabli ako je rezultat u pripadajućoj prediktorskoj varijabli jednak 1.
- b) ... povećanje prognozirane vrijednosti u kriterijskoj varijabli ako se rezultati u svim prediktorskim varijablama povećaju za 1.
- c) ... povećanje prognozirane vrijednosti u kriterijskoj varijabli ako se rezultat u pripadajućoj prediktorskoj varijabli poveća za 1.
- d) ... prognoziranu vrijednost u kriterijskoj varijabli ako su rezultati u svim prediktorskim varijablama jednaki 1.

# 11. Regresijska analiza

## Pitanja i zadaci

10. Pokrenite datoteku *Ucenici-OS.sta!* Višestrukom linearном regresijskom analizom utvrdite utjecaj skupa prediktorskih varijabli *ATV*, *ATT*, *AOP* i *ANN* na varijablu *MPOL!* Koliko iznosi koeficijent multiple korelacije?

- a) 0,21
- b) 0,45
- c) 72,24
- d) 0

11. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Statistička značajnost koeficijenta multiple korelacije testira se putem t distribucije.
- b) Statistička značajnost regresijskih koeficijenata testira se putem F distribucije.
- c) Statistička značajnost koeficijenta multiple korelacije testira se putem F distribucije.
- d) Statistička značajnost regresijskih koeficijenata testira se putem normalne distribucije.

12. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Beta koeficijent je standardizirani regresijski koeficijent i predstavlja relativni utjecaj pripadajuće prediktorske varijable na kriterijsku varijablu.
- b) Beta koeficijent je mjera povezanosti skupa prediktorskih varijabli i kriterijske varijable.
- c) Beta koeficijent je regresijski koeficijent koji predstavlja prognoziranu vrijednost u kriterijskoj varijabli ako su rezultati u svim prediktorskim varijablama jednaki 0.
- d) Beta koeficijent je standardizirani regresijski koeficijent koji predstavlja prognoziranu vrijednost u kriterijskoj varijabli ako su standardizirani rezultati u svim prediktorskim varijablama jednaki 0.

13. Ako je jednostavnom linearnom regresijskom analizom utvrđeno da je koeficijent determinacije jednak 0, koja od navedenih tvrdnji sigurno nije točna?

- a) Korelacija između prediktorske i kriterijske varijable iznosi 0.
- b) Prediktorska i kriterijska varijabla su potpuno linearno nezavisne.
- c) Prediktorska varijabla nema nikakav utjecaj na kriterijsku varijablu.
- d) Prediktorska i kriterijska varijabla su potpuno linearno zavisne.

14. Standardna pogreška prognoze je...

- a) ... drugi korijen iz prosječnog kvadratnog odstupanja originalnih vrijednosti u kriterijskoj varijabli od originalnih vrijednosti u prediktorskoj varijabli.
- b) ... drugi korijen iz prosječnog kvadratnog odstupanja originalnih vrijednosti u kriterijskoj varijabli od prognoziranih vrijednosti u kriterijskoj varijabli.
- c) ... drugi korijen iz prosječnog kvadratnog odstupanja prognoziranih vrijednosti u kriterijskoj varijabli od originalnih vrijednosti u prediktorskoj varijabli.
- d) ... drugi korijen iz prosječnog kvadratnog odstupanja prognoziranih vrijednosti u prediktorskoj varijabli od originalnih vrijednosti u prediktorskoj varijabli.

15. Opći oblik formule za izračunavanje prognoziranih rezultata u kriterijskoj varijabli na temelju jednostavne linearne regresijske analize glasi...

- a) ...  $y' = b_0 + b_1 x + e$
- b) ...  $y' = b_0 + b_1 y + e$
- c) ...  $y' = b_0 + b_1 x$
- d) ...  $y' = b_0 + b_1 e - y$

16. Pearsonov koeficijent korelacije između nezavisne i zavisne varijable je...

- a) ... mjera međusobne logaritamske povezanosti nezavisne i zavisne varijable.
- b) ... mjera međusobne eksponencijalne povezanosti nezavisne i zavisne varijable.
- c) ... mjera međusobne nelinearne povezanosti nezavisne i zavisne varijable.
- d) ... mjera međusobne linearne povezanosti nezavisne i zavisne varijable.

17. Pokrenite datoteku *Judo.sta!* Višestrukom linearnom regresijskom analizom utvrdite utjecaj skupa prediktorskih varijabli *SKL* i *TRB* na varijablu *ONT!* Koliko iznosi standardna pogreška prognoze?

- a) 3,88
- b) 0,39
- c) 19,26
- d) 3,26

# 11. Regresijska analiza

## Pitanja i zadaci

18. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Višestrukom linearном regresijskom analizom utvrđuju se razlike između dviju ili više grupa ispitanika u kriterijskoj varijabli.
- b) Višestrukom linearnom regresijskom analizom izračunavaju se nestandardizirani regresijski koeficijenti.
- c) Višestrukom linearnom regresijskom analizom utvrđuje se povezanost skupa od dviju ili više prediktorskih varijabli s kriterijskom varijablom.
- d) Višestrukom linearnom regresijskom analizom izračunavaju se standardizirani regresijski koeficijenti.

19. Regresijskom analizom utvrđuju se...

- a) ... relacije između jedne ili više zavisnih varijabli i jedne nezavisne varijable.
- b) ... relacije između više nezavisnih varijabli i više zavisnih varijabli.
- c) ... relacije između jedne ili više nezavisnih i jedne zavisne varijable.
- d) ... relacije između jedne ili više zavisnih varijabli i jedne ili više nezavisnih varijabli.

20. U općem obliku regresijske jednadžbe  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m) + e$  slovo  $f$  označava...

- a) ... odgovarajuću fazu regresijske analize.
- b) ... odgovarajuću regresijsku frakciju.
- c) ... odgovarajuću regresijsku funkciju.
- d) ... odgovarajući fenomen multiple regresije.

21. Drugi naziv za zavisnu varijablu je...

- a) ... ponderska varijabla.
- b) ... prediktorska varijabla.
- c) ... rezidualna varijabla.
- d) ... kriterijska varijabla.

22. Jednostavnom linearnom regresijskom analizom relacije između nezavisne varijable  $SDM$  i zavisne varijable  $BK$  je utvrđeno da je koeficijent  $b_0 = 725$ , a koeficijent  $b_1 = 2$ . Koliko iznosi prognozirani rezultat nekog entiteta u varijabli  $BK$  ako je njegov rezultat u varijabli  $SDM$  jednak 225?

- a) 1775
- b) 174377
- c) 3658643
- d) 1175

23. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Koeficijent multiple korelacije je mjeru povezanosti varijable rezidualnih vrijednosti i varijable prognoziranih vrijednosti utvrđene višestrukom linearnom regresijskom analizom.
- b) Koeficijent multiple korelacije je jednak drugom korijenu iz koeficijenta multiple determinacije.
- c) Koeficijent multiple korelacije je mjeru povezanosti skupa prediktorskih varijabli i kriterijske varijable.
- d) Koeficijent multiple korelacije jednak je Pearsonovom koeficijentu korelacije između kriterijske varijable i varijable prognoziranih rezultata utvrđene višestrukom linearnom regresijskom analizom.

24. Koeficijent  $b_0$  izračunat višestrukom linearnom regresijskom analizom označava...

- a) ... prognoziranu vrijednost u kriterijskoj varijabli ako su rezultati u svim prediktorskim varijablama jednaki 1.
- b) ... prognoziranu vrijednost u kriterijskoj varijabli ako su rezultati u svim prediktorskim varijablama jednaki 0.
- c) ... povećanje prognozirane vrijednosti u kriterijskoj varijabli ako se rezultati u svim prediktorskim varijablama povećaju za 1.
- d) ... povećanje prognozirane vrijednosti u kriterijskoj varijabli ako se rezultati u svim prediktorskim varijablama smanje za 1.

25. Kolika može biti korelacija između nezavisne varijable i varijable prognoziranih rezultata u kriterijskoj varijabli utvrđene jednostavnom linearном regresijskom analizom?

- a) 0
- b) -0,5
- c) 0,5
- d) 1

26. Regresijske modele možemo podijeliti...

- a) ... prema odnosu broja entiteta u nezavisnim i zavisnoj varijabli.
- b) ... prema koordinatnim osima x, y i z.
- c) ... prema standardiziranim regresijskim koeficijentima.
- d) ... prema broju nezavisnih varijabli i prema funkciji koja opisuje odnos između nezavisnih varijabli i zavisne varijable.

# 11. Regresijska analiza

## Pitanja i zadaci

27. Pokrenite datoteku *Ucenici-OS.sta*!

Jednostavnom linearном regresijskom analizom utvrdite utjecaj varijable *Tjelesna visina (ATV)* na varijablu *Skok udalj s mjesta (MSDM)*! Koliko iznosi b1 koeficijent?

- a) -46,23
- b) 1,28
- c) 0,41
- d) 24,47

28. Pokrenite datoteku *TREND.sta*! Jednostavnom linearnom regresijskom analizom utvrdite utjecaj varijable *Broj tjedana treninga (BRM)* na varijablu *Kožni nabor nadlaktice (KNNAD)*! Koliko iznosi b0 koeficijent?

- a) -2,09
- b) -0,98
- c) 267,27
- d) 1,61

29. Rezidualna vrijednost je...

- a) ... razlika originalne i prognozirane vrijednosti u zavisnoj varijabli.
- b) ... odstupanje vrijednosti u nezavisnoj varijabli od vrijednosti u zavisnoj varijabli.
- c) ... razlika vrijednosti u rezidualnoj varijabli.
- d) ... odstupanje standardiziranih od nestandardiziranih regresijskih koeficijenata.

30. U općem obliku regresijske jednadžbe

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m) + e$$
 slovo e označava...

- a) ... estimirani rezultat.
- b) ... grešku prognoze.
- c) ... eksponencijalnu funkciju.
- d) ... ekstrahirani dio varijable nezavisne varijable.

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11

# 12

*Faktorska analiza*

13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

---

### Sadržaj poglavlja

#### TEORIJSKE OSNOVE

- upotreba faktorske analize u kineziologiji
- manifestne varijable
- latentne dimenzije

#### *Komponentni model faktorske analize*

- glavne komponente
- ukupna varijanca skupa standardiziranih varijabli
- matrica svojstvenih vektora
- matrica svojstvenih vrijednosti
- matrica glavnih komponenata
- svojstvena vrijednost kao varijanca odgovarajuće glavne komponente
- ortogonalnost glavnih komponenata
- matrica strukture glavnih komponenata
- prostorni odnos manifestnih vektora i glavnih komponenata

#### *Kriteriji za odabir značajnih glavnih komponenata*

- GK-kriterij
- PB-kriterij
- suma kvadrata multiplih korelacija
- Scree-test
- Scree-plot

#### *Komunaliteti i unikviteti*

- komunalitet
- unikvitet
- odnos komunaliteta i unikviteta

#### *Rotacije*

- jednostavna struktura faktora
- ortogonalne rotacije
- neortogonalne rotacije
- matrica strukture

- matrica sklopa
- matrica korelacija među faktorima
- odnos paralelnih i ortogonalnih projekcija manifestnih varijabli na faktore

#### STATISTICA

#### *Komponentni model faktorske analize*

- definiranje kriterija za redukciju broja glavnih komponenata
- iscrtavanje Scree-plota
- izračunavanje svojstvenih vrijednosti
- izračunavanje komunaliteta
- izračunavanje matrice glavnih komponenata
- izračunavanje matrice strukture glavnih komponenata
- odabir kriterija za rotaciju glavnih komponenata
- izračunavanje matrice strukture
- izračunavanje rezultata entiteta na faktorima

## 12. Faktorska analiza

- Začetnikom faktorske analize smatra se Charles Edward Spearman koji je prvi postavio dvofaktorsku teoriju inteligencije, izrazivši je jednadžbom

$$\mathbf{z}_j = a_j \mathbf{g} + \mathbf{s}_j$$

gdje je

- $\mathbf{z}_j$  - manifestna varijabla  $j$
- $a_j$  - koeficijent utjecaja generalnog faktora  $\mathbf{g}$  na manifestnu varijablu  $j$
- $\mathbf{g}$  - generalni faktor
- $\mathbf{s}_j$  - faktor specifičan samo za manifestnu varijablu  $j$ .



Charles Edward Spearman  
(1863.-1945.)

- Za empirijsku provjeru svog teoretskog koncepta Spearman je 1904. godine razvio prvi model faktorske analize.
- Značajnu ulogu u razvoju faktorske analize imao je i američki psihometričar Louis Leon Thurstone koji je u svrhu empirijske provjere svoje teorije o postojanju više primarnih mentalnih sposobnosti 1931. godine razvio multifaktorsku analizu.
- **Faktorska analiza** je zajedničko ime za više metoda kojima je cilj kondenzacija većeg broja manifestnih varijabli, među kojima postoji povezanost (korelacija), na manji broj latentnih dimenzija (faktora) koje su izvor te povezanosti.
- Faktorska analiza se, osim za izračunavanje rezultata entiteta u latentnim dimenzijama, koristi i u svrhu uvida u strukturu međusobne povezanosti više manifestnih varijabli.
- **Manifestne varijable** su varijable, odnosno obilježja koja se mogu izravno mjeriti postojećim mjernim instrumentima (npr. skok udalj s mjesta, bacanje medicinike iz ležanja na leđima, bacanje kugle).
- **Latentne dimenzije** su varijable, odnosno obilježja koja nisu izravno mjerljiva postojećim mjernim instrumentima, već se izračunavaju kao linearna kombinacija manifestnih varijabli (npr. koordinacija).



Louis Leon Thurstone  
(1887.-1955.)

## 12. Faktorska analiza

### Komponentni model faktorske analize

- ▶ **Komponentni model** ili **metoda glavnih komponenata** je metoda ekstrakcije, odnosno izračunavanja latentnih dimenzija koju je 1933. godine predložio američki ekonomist i statističar Harold Hotelling.
- ▶ Metodom glavnih komponenata se iz skupa od  $m$  manifestnih varijabli na temelju nereducirane korelacijske matrice izračuna  $m$  latentnih dimenzija koje su međusobno linearne nezavisne, a nazivaju se glavne komponente.
- ▶ **Glavne komponente** su linearne kombinacije manifestnih varijabli izračunate na način da prva glavna komponenta objašnjava maksimalan moguć dio ukupne varijance manifestnih varijabli te da druga, kao i svaka sljedeća glavna komponenta, objašnjava najveći dio preostale varijance manifestnih varijabli, odnosno najveći dio varijance manifestnih varijabli koji nije objašnjen prethodnim glavnim komponentama. Glavne komponente izračunavaju se na sljedeći način:
- ▶ Neka su u matrici  $\mathbf{B}$  podaci skupa  $E = \{e_i ; i = 1, \dots, n\}$  entiteta koji su opisani skupom  $V = \{v_j ; j = 1, \dots, m\}$  manifestnih varijabli. Operacijom



$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}_c \mathbf{V}^{-1}$$

gdje je

- $\mathbf{B}_c$  - matrica centriranih podataka dobivenih operacijom  $\mathbf{B}_c = \mathbf{B} - \mathbf{1}\mathbf{m}^T$
- $\mathbf{m}$  - vektor aritmetičkih sredina varijabli matrice  $\mathbf{B}$
- $\mathbf{V}^{-1}$  - dijagonalna matrica standardnih devijacija varijabli iz matrice  $\mathbf{B}$

izračuna se matrica standardiziranih podataka ( $\mathbf{Z}$ ).

- ▶ Operacijom

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{n}^{-1} = \begin{vmatrix} I & r_{12} & \cdot & \cdot & r_{1m} \\ r_{21} & I & \cdot & \cdot & r_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdot & \cdot & I \end{vmatrix}$$

izračuna se matrica korelacija manifestnih varijabli ( $\mathbf{R}$ ) u čijoj su glavnoj dijagonali jedinice, odnosno varijance standardiziranih varijabli. Zbroj varijanci svih standardiziranih varijabli, odnosno ukupna varijanca skupa standardiziranih varijabli jednaka je  $m$ , odnosno broju manifestnih varijabli.

## 12. Faktorska analiza

- ▶ Operacijom spektralne dekompozicije matrice korelacija

$$\mathbf{R} = \mathbf{X} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{X}^T$$

$$\begin{vmatrix} I & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & I & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1m} & x_{2m} & \dots & x_{mm} \end{vmatrix}$$

izračunaju se matrica svojstvenih vektora ( $\mathbf{X}$ ) i matrica svojstvenih vrijednosti ( $\boldsymbol{\Lambda}$ ).

- ▶ **Matrica svojstvenih vektora** ( $\mathbf{X}$ ) je kvadratna matrica reda  $m \times m$  za koju vrijedi da je  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T = \mathbf{I}$  tj. da su vektori matrice linearno nezavisni, a u čijim su stupcima ponderi za izračunavanje glavnih komponenata iz standardiziranih varijabli.
- ▶ **Matrica svojstvenih vrijednosti** ( $\boldsymbol{\Lambda}$ ) je dijagonalna matrica reda  $m \times m$  za koju vrijedi da je  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = m$ , tj. da je zbroj svojstvenih vrijednosti jednak ukupnoj varijanci standardiziranih varijabli, te da je  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ , tj. da se svojstvene vrijednosti nižu od najveće prema najmanjoj.
- ▶ Operacijom

$$\mathbf{K} = \mathbf{Z} \mathbf{X}$$

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mm} \end{vmatrix}$$

izračuna se matrica glavnih komponenata ( $\mathbf{K}$ ).

- ▶ **Matrica glavnih komponenata** ( $\mathbf{K}$ ) je matrica reda  $n \times m$  koju čine rezultati  $n$  ispitanika u  $m$  linearne nezavisnih (ortogonalnih) glavnih komponenata. Varijanca prve glavne komponente jednaka je  $\lambda_1$ , varijanca druge glavne komponente  $\lambda_2$ , itd.
- ▶ Pošto vrijedi da je  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = m$  te da je  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ , može se zaključiti da je ukupna varijanca  $m$  standardiziranih varijabli raspodijeljena tako da prva glavna komponenta objašnjava najveći dio ukupne varijance, druga glavna komponenta najveći dio preostale varijance, itd.

## 12. Faktorska analiza

► Operacijom

$$\mathbf{H} = \mathbf{X} \Lambda^{1/2}$$

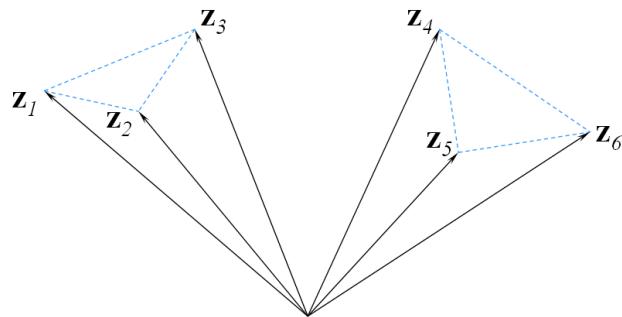
$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{\lambda_1} \\ \sqrt{\lambda_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_m} \end{vmatrix}$$

izračuna se matrica strukture glavnih komponenata ( $\mathbf{H}$ ).

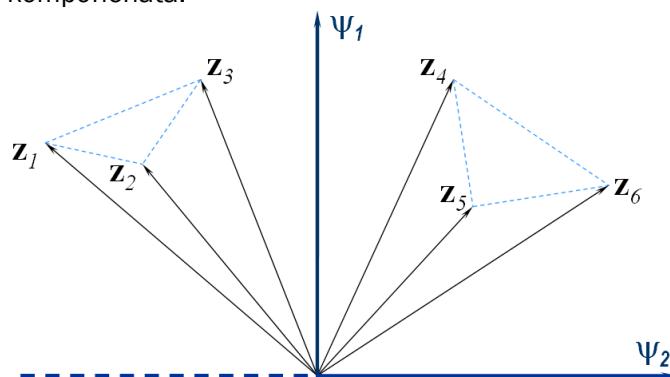
- **Matrica strukture glavnih komponenata** ( $\mathbf{H}$ ) je matrica korelacija manifestnih varijabli i glavnih komponenata. Elementi ove matrice pokazuju koliki je doprinos svake pojedine manifestne varijable pri formiranju svake pojedine glavne komponente.

**Primjer:** Neka je skup od  $n$  entiteta opisan sa 6 manifestnih varijabli ( $v_1, \dots, v_6$ ).

- Na temelju korelacijske matrice može se utvrditi odnos odgovarajućih standardiziranih vektora u  $n$ -dimenzionalnom prostoru.



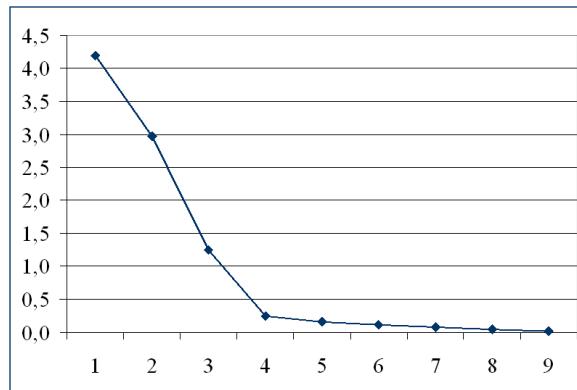
- Na temelju matrice strukture glavnih komponenata može se utvrditi prostorni odnos standardiziranih manifestnih vektora i standardiziranih glavnih komponenata.



### Kriteriji za odabir značajnih glavnih komponenata

- ▶ Pošto je osnovni cilj faktorske analize kondenzacija većeg broja manifestnih varijabli na manji broj latentnih dimenzija, potrebno je izvršiti **redukciju broja glavnih komponenata**.
- ▶ Redukcija broja glavnih komponenata odnosno određivanje broja značajnih glavnih komponenata vrši se putem različitih kriterija kao što su GK-kriterij, PB-kriterij i Scree-test.
- ▶ Prema **GK-kriteriju** glavna komponenta  $j$  je značajna ako je njena varijanca ( $\lambda_j$ ) veća ili jednaka 1.
- ▶ Prema **PB-kriteriju** broj značajnih glavnih komponenata jednak je broju svojstvenih vrijednosti poredanih po veličini čiji zbroj ne prelazi  $\Sigma SMC$  (sumu kvadrata multiplih korelacija).
- ▶ **Scree-test** je grafički kriterij. Na scree plotu se subjektivnom procjenom odredi točka nakon koje se svojstvene vrijednosti smanjuju u skladu s blagim linearnim trendom. Značajnima se smatraju sve prethodne glavne komponente.

**Zadatak:** Na 9 manifestnih varijabli utvrđene su sljedeće svojstvene vrijednosti:  $\lambda_1=4,18$ ,  $\lambda_2=2,96$ ,  $\lambda_3=1,27$ ,  $\lambda_4=0,22$ ,  $\lambda_5=0,15$ ,  $\lambda_6=0,11$ ,  $\lambda_7=0,07$ ,  $\lambda_8=0,03$  i  $\lambda_9=0,01$ .  $\Sigma SMC=8,14$ , a odgovarajući scree plot izgleda ovako:



Koliko je značajnih glavnih komponenata prema GK-kriteriju, koliko prema PB-kriteriju, a koliko prema Scree-testu?

## 12. Faktorska analiza

### Komunaliteti i unikviteti

**Prikaz:** Matrica  $\mathbf{H}$  prije i nakon redukcije broja glavnih komponenata

$$\mathbf{H} = \begin{array}{c|cc|c} & \text{značajne glavne} & \text{glavne komponente} \\ & \text{komponente} & \text{koje nisu značajne} \\ \hline & h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & \dots & h_{1m} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & \dots & h_{mn} \end{array}$$

- ▶ Varijancu svake manifestne varijable ( $s^2$ ) moguće je dekomponirati na komunalitet ( $h^2$ ) i unikvitet ( $u^2$ ) pri čemu je

$$s^2 = 1 = h^2 - u^2$$

- ▶ **Komunalitet** je dio varijance manifestne varijable  $j$  koji je moguće objasniti s  $k$  značajnih glavnih komponenata.

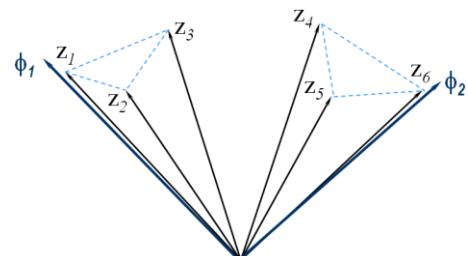
$$h_j^2 = \sum_{p=1}^k h_{jp}^2 = h_{j1}^2 + h_{j2}^2 + \dots + h_{jk}^2$$

- ▶ **Unikvitet** je dio varijance manifestne varijable  $j$  koji nije moguće objasniti s  $k$  značajnih glavnih komponenata, nego s  $m-k$  preostalih glavnih komponenata.

$$u_j^2 = 1 - h_j^2$$

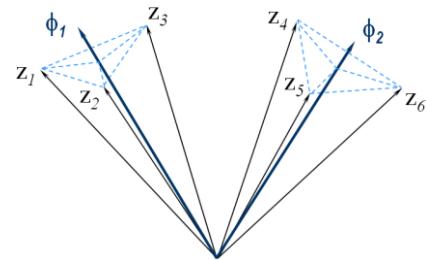
### Rotacije

- ▶ Pravi uvid u strukturu međusobnih odnosa manifestnih varijabli često nije moguće stići putem glavnih komponenata. U takvim se slučajevima koriste transformacije glavnih komponenata (**rotacije**) čija je svrha postizanje jednostavne faktorske strukture.
- ▶ Transformacije glavnih komponenata koje se provode uz uvjet zadržavanja njihove linearne nezavisnosti nazivaju se **ortogonalne rotacije**.

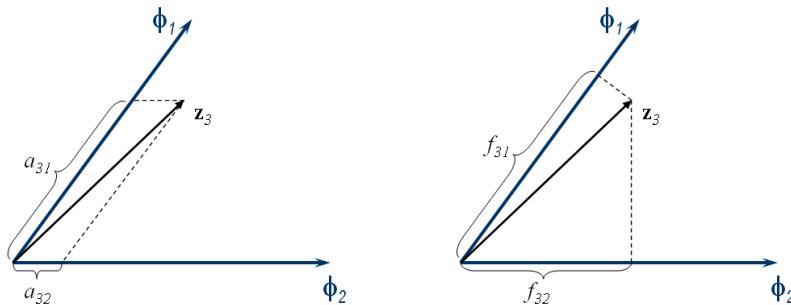


## 12. Faktorska analiza

- ▶ Transformacije glavnih komponenata koje se provode bez uvjeta zadržavanja njihove linearne nezavisnosti nazivaju se **neortogonalne ili kosokutne rotacije**.
- ▶ Interpretacija faktora nakon rotacije vrši se putem matrice strukture ( $\mathbf{F}$ ), matrice sklopa ( $\mathbf{A}$ ) i matrice korelacija među faktorima ( $\mathbf{M}$ ).
- ▶ **Matricu strukture** čine korelacije manifestnih varijabli s faktorima.
- ▶ **Matricu sklopa** čine paralelne projekcije manifestnih varijabli na faktore.
- ▶ Matrica sklopa (paralelne projekcije manifestnih varijabli na faktore) često jasnije pokazuje koje varijable određuju pojedine faktore nego matrica strukture (ortogonalne projekcije manifestnih varijabli na faktore).

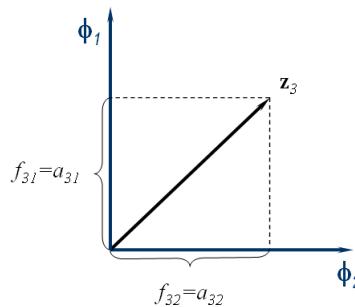


**Prikaz:** Paralelne i ortogonalne projekcije manifestne varijable na faktore



- ▶ Paralelne projekcije i ortogonalne projekcije manifestnih varijabli na faktore bit će sličnije što su korelacije među faktorima manje. Matrica strukture bit će jednaka matrici sklopa ako su faktori potpuno nezavisni.

**Prikaz:** Projekcije varijable na faktore kada su faktori međusobno ortogonalni



## 12. Faktorska analiza

StatSoft



### Postupci:

- ▶ **Komponentni model faktorske analize:** Komponentni model faktorske analize provodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Multivariate Exploratory Techniques → Factor analysis. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije Variables potrebno je označiti manifestne varijable. Nakon odabira varijabli u dijaloškom okviru Advanced potrebno je označiti opciju Principal components i definirati kriterij za redukciju broja glavnih komponenata. Pri tome je moguće iskoristiti opcije Max. no. of factors (maksimalan broj faktora) i Mini. eigenvalue (minimalna svojstvena vrijednost). Nakon ekstrakcije glavnih komponenata moguće je pregledati svojstvene vrijednosti (Explained variance → Eigenvalues), komunalitete (Explained variance → Communalities), matricu strukture glavnih komponenata (Loadings → Summary: Factor loadings) i matricu glavnih komponenata (Scores → Factor scores). Nakon ekstrakcije glavnih komponenata moguće je izvršiti njihovu transformaciju odabirom neke od ponuđenih rotacija u padajućem izborniku Loadings → Factor rotation. Nakon rotacije glavnih komponenata moguće je pregledati matricu strukture (Loadings → Summary: Factor loadings) i matricu rezultata entiteta na faktorima (Scores → Factor scores).

---

### Zadaci:

- ▶ Na varijablama matrice Judo.sta provedite komponentni model faktorske analize uz GK-kriterij za redukciju broja glavnih komponenata i normaliziranu Varimax rotaciju! Izračunajte svojstvene vrijednosti, komunalitete, matricu strukture glavnih komponenata, matricu glavnih komponenata, matricu faktorske strukture i matricu rezultata entiteta na faktorima!

---

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 214-237.
- ▶ Mejovšek, M. (2003). *Uvod u metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 153-181.

## 12. Faktorska analiza

### Pitanja i zadaci

1. Elementi matrice glavnih komponenata su...

- a) ... korelacije između manifestnih varijabli i glavnih komponenata.
- b) ... ponderi za linearno kombiniranje manifestnih varijabli u svrhu izračunavanja glavnih komponenata.
- c) ... svojstvene vrijednosti, odnosno varijance glavnih komponenata.
- d) ... rezultati entiteta u glavnim komponentama.

2. Komunalitet je...

- a) ... dio varijance manifestne varijable koji nije moguće objasniti sa značajnim glavnim komponentama.
- b) ... dio varijance manifestne varijable koji je moguće objasniti sa značajnim glavnim komponentama.
- c) ... dio varijance glavne komponente koji je moguće objasniti s manifestnim varijablama.
- d) ... dio varijance glavne komponente koji nije moguće objasniti s manifestnim varijablama.

3. Na svim varijablama datoteke SKOLA.sta provode faktorsku analizu koristeći GK-kriterij za redukciju i normalizirano Varimax (Varimax normalized) rotaciju! Koliko iznosi rezultat sedmog entiteta (prema rednom broju u matrici podataka) na trećem faktoru?

- a) 0,36
- b) -0,73
- c) 0,22
- d) 0,78

4. Prema GK-kriteriju značajne su one glavne komponente čija je varijanca...

- a) ... jednaka 1.
- b) ... manja ili jednaka 1.
- c) ... manja od 1.
- d) ... veća ili jednaka 1.

5. Na osi y (ordinati) Scree-plota se nalaze...

- a) ... korelacije manifestnih varijabli i glavnih komponenata.
- b) ... varijance glavnih komponenata.
- c) ... aritmetičke sredine glavnih komponenata.
- d) ... maksimalne vrijednosti glavnih komponenata.

6. Rotacije su...

- a) ... transformacije glavnih komponenata čiji je cilj postizanje složene faktorske strukture.
- b) ... transformacije manifestnih varijabli čiji je cilj postizanje jednostavne faktorske strukture.
- c) ... transformacije glavnih komponenata čiji je cilj postizanje jednostavne faktorske strukture.
- d) ... transformacije manifestnih varijabli čiji je cilj postizanje složene faktorske strukture.

7. Ako je korelacija manifestne varijable x s prvom glavnom komponentom jednak 1, koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Komunalitet varijable x jednak je 1.
- b) Korelacija varijable x s drugom glavnom komponentom jednak je 0.
- c) Unikvitet varijable x jednak je 1.
- d) Proporcija zajedničke varijance varijable x i prve glavne komponente jednak je 1.

8. Što je od ponuđenog primjer latentne dimenzije?

- a) trideseta glavna komponenta
- b) trideset skleksa
- c) trideset latentnih entiteta
- d) trideseta manifestna varijabla

9. Koliko je značajnih glavnih komponenata prema GK-kriteriju ako je  $\lambda_1=2,4$ ,  $\lambda_2=1,1$ ,  $\lambda_3=1$ ,  $\lambda_4=0,4$ ,  $\lambda_5=0,1$ , a suma kvadrata multiple korelacije iznosi 3,4?

- a) 2
- b) 1
- c) 5
- d) 3

10. Elementi matrice strukture ( $F$ ) su...

- a) ... ponderi za linearno kombiniranje manifestnih varijabli u svrhu izračunavanja faktora.
- b) ... rezultati entiteta na glavnim komponentama.
- c) ... korelacije između manifestnih varijabli i faktora.
- d) ... rezultati entiteta na faktorima.

## 12. Faktorska analiza

### Pitanja i zadaci

11. Na svim varijablama datoteke SKOLA.sta provedite faktorsku analizu koristeći GK-kriterij za redukciju broja glavnih komponenata! Kolika je varianca prve glavne komponente?

- a) 3,33
- b) 3,77
- c) 3,63
- d) 2,41

12. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Matricu sklopa čine paralelne projekcije varijabli na faktore.
- b) Matricu strukture čine ortogonalne projekcije varijabli na faktore.
- c) Paralelne i ortogonalne projekcije varijabli na faktore uvejek su različite.
- d) Paralelne i ortogonalne projekcije varijabli na faktore biti će jednake ako su faktori potpuno nezavisni.

13. Elementi matrice strukture glavnih komponenata ( $H$ ) su...

- a) ... korelacije između manifestnih varijabli i glavnih komponenata.
- b) ... rezultati entiteta na glavnim komponentama.
- c) ... svojstvene vrijednosti korelacijske matrice.
- d) ... svojstveni vektori korelacijske matrice.

14. Što je od ponuđenog primjer skupa manifestnih varijabli?

- a) prva glavna komponenta, druga glavna komponenta i treća glavna komponenta
- b) skok udalj s mjesta, bacanje medicinice iz ležanja na leđima i taping rukom
- c) faktor agilnosti, faktor eksplozivne snage i faktor brzine
- d) manifestni Marko, manifestni Pero i manifestni Šime

15. Na varijablama ATV, ATT, AOP i ANN datoteke Ucenici-OS.sta provedite faktorsku analizu koristeći GK-kriterij! Koliko iznosi korelacija varijable ATV s prvom glavnom komponentom?

- a) 0,75
- b) -0,82
- c) -0,78
- d) 0,94

16. Cilj faktorske analize je...

- a) ... utvrđivanje relacija između većeg broja prediktorskih varijabli i jedne kriterijske varijable.
- b) ... testiranje statističke značajnosti razlika između dviju grupa entiteta u jednoj ili više manifestnih varijabli.
- c) ... prognoza rezultata entiteta u većem broju manifestnih varijabli na temelju pripadajućih rezultata u manjem broju latentnih dimenzija.
- d) ... kondenzacija većeg broja manifestnih varijabli, među kojima postoji povezanost, na manji broj latentnih dimenzija ili faktora koji su izvor te povezanosti.

17. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Bree-test je grafički kriterij za određivanje broja značajnih glavnih komponenata.
- b) GK-kriterij je grafički kriterij za određivanje broja značajnih glavnih komponenata.
- c) PB-kriterij je grafički kriterij za određivanje broja značajnih glavnih komponenata.
- d) Scree-test je grafički kriterij za određivanje broja značajnih glavnih komponenata.

18. Unikvitet je...

- a) ... dio variance manifestne varijable koji je moguće objasniti sa značajnim glavnim komponentama.
- b) ... dio variance manifestne varijable koji nije moguće objasniti sa značajnim glavnim komponentama.
- c) ... dio variance glavne komponente koji je moguće objasniti s manifestnim varijablama.
- d) ... dio variance glavne komponente koji nije moguće objasniti s manifestnim varijablama.

19. Koliko je značajnih glavnih komponenata prema PB-kriteriju ako je  $\lambda_1=2,4$  ,  $\lambda_2=1,1$  ,  $\lambda_3=1$  ,  $\lambda_4=0,4$  ,  $\lambda_5=0,1$  , a suma kvadrata multiple korelacije iznosi 3,4?

- a) 2
- b) 3
- c) 5
- d) 1

## 12. Faktorska analiza

### Pitanja i zadaci

20. Latentne dimenzije su...

- a) ... obilježja koja su izravno mjerljiva postojećim mjernim instrumentima.
- b) ... isključivo obilježja kojima se opisuje latentno vrijeme motoričke reakcije.
- c) ... obilježja koja nisu izravno mjerljiva postojećim mjernim instrumentima već se izračunavaju kao linearna kombinacija manifestnih varijabli.
- d) ... varijable koje se ni na koji način ne mogu izračunati.

21. Na svim varijablama datoteke *Judo.sta* provedite faktorsku analizu koristeći GK-kriterij za redukciju i normaliziranu Varimax (*Varimax normalized*) rotaciju! Kolika je korelacija varijable *OUZ* s drugim faktorom?

- a) 0,66
- b) -0,12
- c) 0,56
- d) -0,44

22. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Transformacije glavnih komponenata koje se provode uz uvjet zadržavanja njihove linearne nezavisnosti nazivaju se kosokutne rotacije.
- b) Transformacije glavnih komponenata koje se provode bez uvjeta zadržavanja njihove linearne nezavisnosti nazivaju se kosokutne rotacije.
- c) Transformacije glavnih komponenata koje se provode bez uvjeta zadržavanja njihove linearne nezavisnosti nazivaju se neortogonalne rotacije.
- d) Transformacije glavnih komponenata koje se provode uz uvjet zadržavanja njihove linearne nezavisnosti nazivaju se ortogonalne rotacije.

23. Kojeg je reda matrica glavnih komponenata?

- a)  $(m,m)$  - gdje je  $m$  broj manifestnih varijabli
- b)  $(m,k)$  - gdje je  $m$  broj manifestnih varijabli, a  $k$  broj glavnih komponenata
- c)  $(n,n)$  - gdje je  $n$  broj entiteta
- d)  $(n,m)$  - gdje je  $n$  broj entiteta, a  $m$  broj manifestnih varijabli

24. Varijanca prve glavne komponente nužno je jednaka...

- a) ... varijanci prve manifestne varijable.
- b) ... prvoj svojstvenoj vrijednosti.
- c) ... najmanjoj svojstvenoj vrijednosti.
- d) ... 1.

25. GK-kriterij služi za...

- a) ... redukciju broja manifestnih varijabli.
- b) ... rotaciju latentnih dimenzija.
- c) ... redukciju broja latentnih dimenzija.
- d) ... rotaciju manifestnih varijabli.

26. Koji od ponuđenih odgovora nije točan?

- a) Prva glavna komponenta objašnjava najveći dio ukupne varijance manifestnih varijabli.
- b) Korelacija između prvih dviju glavnih komponenti veća je ili jednaka korelaciji između narednih dviju glavnih komponenti, itd.
- c) Glavne komponente međusobno su potpuno linearne nezavisne.
- d) Glavne komponente su linearne kombinacije manifestnih varijabli.

27. Na svim varijablama datoteke *Judo.sta* provedite faktorsku analizu! Koliko je značajnih glavnih komponenata prema Scree-testu?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

28. Ako je komunalitet neke varijable 0,76 koliko iznosi njen unikvitet?

- a) 0,58
- b) 1,76
- c) 1
- d) 0,24

## 12. Faktorska analiza

### Pitanja i zadaci

29. Manifestne varijable su...

- a) ... sva obilježja koja se mogu izravno mjeriti postojećim mjernim instrumentima.
- b) ... sva obilježja koja nisu izravno mjerljiva postojećim mjernim instrumentima.
- c) ... isključivo varijable prognoziranih rezultata u faktorima.
- d) ... isključivo karakteristike koje opisuju određene sportske manifestacije, priredbe i slično.

30. Na svim varijablama datoteke *Judo.sta* provedite faktorsku analizu koristeći GK-kriterij za redukciju! Koliko iznosi rezultat sedmog entiteta (prema rednom broju u matrici podataka) na prvoj glavnoj komponenti?

- a) -0,05
- b) -0,77
- c) 0,75
- d) 0,12

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12

# 13

*Kanonička korelacijska analiza*

14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

---

# 13. Kanonička koreacijska analiza

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

- upotreba kanoničke koreacijske analize u kineziologiji
- kanonički faktori
- parovi kanoničkih faktora
- maksimalan broj parova kanoničkih faktora
- ortogonalnost različitih parova kanoničkih faktora
- koeficijent kanoničke korelacije
- odnos veličina koeficijenata kanoničke korelacije
- testiranje statističke značajnosti koeficijenata kanoničke korelacije
- matrice strukture kanoničkih faktora

### STATISTICA

#### **Kanonička koreacijska analiza**

- izračunavanje koeficijenata kanoničke korelacije
- testiranje statističke značajnosti koeficijenata kanoničke korelacije
- izračunavanje matrica strukture kanoničkih faktora

## 13. Kanonička korelacijska analiza

- ▶ Kanoničku korelacijsku analizu je 1936. godine u časopisu Biometrika predložio Harold Hotelling.
- ▶ **Kanonička korelacijska analiza** je metoda za utvrđivanje relacija između dvaju skupova varijabli (npr. relacije morfoloških karakteristika i motoričkih sposobnosti).
- ▶ Kanonička korelacijska analiza može se koristiti i za utvrđivanje utjecaja skupa prediktorskih varijabli na skup kriterijskih varijabli (npr. utjecaj morfoloških karakteristika na skup varijabli za procjenu situacijske uspješnosti u rukometu).
- ▶ Kanoničkom korelacijskom analizom se iz dva skupa od  $m$  odnosno  $k$  manifestnih varijabli na temelju matrica korelacija i matrica kroskorelacija izračuna onoliko parova kanoničkih faktora koliko je varijabli u manjem skupu.
- ▶ Svaki se par kanoničkih faktora sastoji od **kanoničkog faktora prvog skupa** tj. linearne kombinacije manifestnih varijabli prvoga skupa i **kanoničkog faktora drugog skupa** tj. linearne kombinacije manifestnih varijabli drugog skupa.
- ▶ Prvi par kanoničkih faktora izračunava se na način da objašnjava što je moguće više zajedničkog varijabiliteta dvaju skupova varijabli, odnosno da prvi kanonički faktor prvog skupa i prvi kanonički faktor drugog skupa budu u što je moguće većoj korelaciji.
- ▶ Svaki sljedeći par kanoničkih faktora izračunava se na način da objašnjava što je moguće više preostalog zajedničkog varijabiliteta dva skupa varijabli, odnosno onog dijela zajedničkog varijabiliteta koji nije opisan prethodnim parovima kanoničkih faktora. To se postiže uz uvjet potpune linearne nezavisnosti, odnosno ortogonalnosti parova kanoničkih faktora.
- ▶ Neka su u matrici  $\mathbf{B}_1$  podaci skupa  $E = \{e_i ; i = 1, \dots, n\}$  entiteta koji su opisani skupom  $V_1 = \{v_j ; j = 1, \dots, m\}$  manifestnih varijabli, a u matrici  $\mathbf{B}_2$  podaci istog skupa  $E = \{e_i ; i = 1, \dots, n\}$  entiteta koji su opisani skupom  $V_2 = \{v_j ; j = 1, \dots, k\}$  manifestnih varijabli. Operacijama



gdje su

- $\mathbf{B}_{c1}$  i  $\mathbf{B}_{c2}$  - matrice centriranih podataka
- $\mathbf{V}_1^{-1}$  i  $\mathbf{V}_2^{-1}$  - dijagonalne matrice standardnih devijacija varijabli iz matrica  $\mathbf{B}_1$  i  $\mathbf{B}_2$ .

izračunaju se matrice standardiziranih podataka ( $\mathbf{Z}_1$  i  $\mathbf{Z}_2$ ).

## 13. Kanonička korelacijska analiza

- ▶ Operacijama

$$\mathbf{R}_{II} = \mathbf{Z}_I^T \mathbf{Z}_I n^{-1} \quad i \quad \mathbf{R}_{22} = \mathbf{Z}_2^T \mathbf{Z}_2 n^{-1}$$

izračunaju se matrice korelacije varijabli prvog i drugog skupa ( $\mathbf{R}_1$  i  $\mathbf{R}_2$ ).

- ▶ Operacijama

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{Z}_1^T \mathbf{Z}_2 n^{-1} \quad i \quad \mathbf{R}_{21} = \mathbf{Z}_2^T \mathbf{Z}_1 n^{-1}$$

izračunaju se matrice kroskorelacija ( $\mathbf{R}_{12}$  i  $\mathbf{R}_{21}$ ).

- ▶ Na temelju matrica svojstvenih vektora ( $\mathbf{X}_1$  i  $\mathbf{X}_2$ ) i matrica svojstvenih vrijednosti ( $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$ ) utvrđenih spektralnom dekompozicijom korelacijske matrice prvog odnosno drugog skupa varijabli

$$\mathbf{R}_{II} = \mathbf{X}_I \boldsymbol{\Lambda}_I \mathbf{X}_I^T \quad i \quad \mathbf{R}_{22} = \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{X}_2^T$$

izračunaju se standardizirane glavne komponente prvog i drugog skupa varijabli  $\psi_1$  i  $\psi_2$ .

$$\boldsymbol{\Psi}_1 = \mathbf{Z}_I \mathbf{X}_I \boldsymbol{\Lambda}_I^{-1/2} \quad i \quad \boldsymbol{\Psi}_2 = \mathbf{Z}_2 \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\Lambda}_2^{-1/2}$$

- ▶ Na temelju matrica svojstvenih vektora  $\mathbf{Y}_1$  i  $\mathbf{Y}_2$  utvrđenih spektralnom dekompozicijom matrica  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$  i  $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$  gdje  $\mathbf{Q}$  matrica kroskorelacija glavnih komponenata prvog i drugog skupa ( $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Psi}_2^T \boldsymbol{\Psi}_1 n^{-1}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T &= \mathbf{Y}_1 \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{Y}_1^T n^{-1} \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{Q} \mathbf{Y}_1 \boldsymbol{\Lambda}_1^{-1/2} \\ \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} &= \mathbf{Y}_2 \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{Y}_2^T n^{-1} \\ \mathbf{Y}_I &= \mathbf{Q}^T \mathbf{Y}_2 \boldsymbol{\Lambda}_2^{-1/2} \end{aligned}$$

izračunaju se kanonički faktori prvog i drugog skupa varijabli  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{Y}_I \quad i \quad \Phi_2 = \boldsymbol{\Psi}_2 \mathbf{Y}_2$$

- ▶ Izračunavanjem korelacija kanoničkih faktora unutar prvog, odnosno drugog skupa može se potvrditi kako su kanonički faktori unutar istog skupa međusobno linearно nezavisni.

$$\Phi_1^T \Phi_1 n^{-1} = \mathbf{I} \quad i \quad \Phi_2^T \Phi_2 n^{-1} = \mathbf{I}$$

- ▶ **Koeficijent kanoničke korelacije** ( $R_c$ ) je mjeru povezanosti kanoničkih faktora unutar jednog para, a kreće se između 0 (potpuna linearna nezavisnost) i 1 (potpuna linearna zavisnost).

## 13. Kanonička korelacijska analiza

- ▶ Dijagonalna matrica kanoničkih korelacija ( $\mathbf{R}_c$ ) izračuna se operacijom

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{\Phi}_1^T \mathbf{\Phi}_2 n^{-1} = \mathbf{\Lambda}^{1/2}$$

- ▶ Vrijedi pravilo da je  $R_{c1} \geq R_{c2} \geq \dots \geq R_{ck}$  (gdje je  $k$  broj varijabli u manjem skupu manifestnih varijabli), odnosno da je povezanost (korelacija) kanoničkih faktora prvog para veća ili jednaka povezanosti kanoničkih faktora drugog para, itd.
- ▶ Testiranje statističke značajnosti kanoničkih korelacija vrši se Bartlettovim testom putem  $\chi^2$ -distribucije s brojem stupnjeva slobode  $df = (m - g) \times (k - g)$ .  $\chi^2$  vrijednost se izračunava sljedećom formulom

$$\chi^2 = - \left[ (n - 1) - \left( \frac{m + k + 1}{2} \right) \right] \cdot \log_e \prod_{j=g+1}^k (1 - \lambda_j)$$

gdje je

- $n$  - broj entiteta
- $m$  - broj varijabli prvog skupa
- $k$  - broj varijabli drugog skupa
- $\lambda_j$  - koeficijent kanoničke determinacije ( $R_{cj}^2$ )  $j$ -tog para kanoničkih faktora
- $g$  - broj prethodno testiranih kanoničkih korelacija.

- ▶ Statistička značajnost kanoničkih korelacija testira se redom od prve do posljednje. Utvrdi li se da neka kanonička korelacija nije statistički značajna, tada niti jedna sljedeća kanonička korelacija ne može biti statistički značajna.
- ▶ Ako se želi zaključivati s promatranog uzorka na populaciju entiteta, interpretiraju se samo oni parovi kanoničkih faktora čija je kanonička korelacija statistički značajna.
- ▶ Interpretacija kanoničkih faktora vrši se putem **matrica strukture kanoničkih faktora** ( $\mathbf{F}_1$  i  $\mathbf{F}_2$ ) koje se izračunavaju operacijama

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Z}_1^T \mathbf{\Phi}_1 n^{-1} \quad \text{i} \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{Z}_2^T \mathbf{\Phi}_2 n^{-1}$$

- ▶ Matricu strukture  $\mathbf{F}_1$  čine korelacije manifestnih varijabli prvog skupa s kanoničkim faktorima prvog skupa, a matricu strukture  $\mathbf{F}_2$  korelacije manifestnih varijabli drugog skupa s kanoničkim faktorima drugog skupa.

## 13. Kanonička korelacijska analiza



### STATISTICA

#### Postupci:

- ▶ **Kanonička korelacijska analiza:** Kanonička korelacijska analiza provodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Multivariate Exploratory Techniques* → *Canonical analysis*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *Variables* potrebno je označiti sve manifestne varijable koje će biti uključene u analizu. Nakon potvrde opcijom *OK*, u izborniku *Variables for canonical analysis* potrebno je odabratи varijable prvog (*First variable list*) i drugog (*Second variable list*) skupa manifestnih varijabli. Nakon odabira manifestnih varijabli prvog i drugog skupa moguće je izračunati i testirati statističku značajnost kanoničkih korelacija (*Canonical factors* → *Chi square tests*) i matrice strukture kanoničkih faktora prvog i drugog skupa (*Factor structures* → *Factor structures & redundancies*).

---

#### Zadaci:

- ▶ U matrici *SKOLA.sta* utvrdite relacije između skupa antropometrijskih varijabli (VISI, TEZI, OBPO i NABN) i skupa motoričkih testova (TAPI, POLI, SDAL, POTR, PRRA, IZVI i TRGM)! Izračunajte kanoničke korelacije i testirajte njihovu statističku značajnost! Interpretirajte matrice strukture kanoničkih faktora!

---

#### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 238-244.
- ▶ Mejovšek, M. (2003). *Uvod u metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 201-223.

# 13. Kanonička koreacijska analiza

## Pitanja i zadaci

1. Ako se kanoničkom koreacijskom analizom na uzorku od devet entiteta utvrđuje povezanost između skupa od četiri testa za procjenu motoričkih sposobnosti i šest testova za procjenu karakteristika grada tijela, koliki je maksimalan broj parova kanoničkih faktora koji se mogu izračunati?

- a) 9
- b) 6
- c) 8
- d) 4

2. Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Koeficijenata kanoničke korelacije može se izračunati onoliko koliko je kanoničkih faktora.
- b) Koeficijenata kanoničke korelacije može se izračunati onoliko koliko je entiteta u manjem skupu varijabli.
- c) Koeficijenata kanoničke korelacije može se izračunati onoliko koliko je manifestnih varijabli u manjem skupu.
- d) Koeficijenata kanoničke korelacije može se izračunati onoliko koliko je ukupno manifestnih varijabli u objema matricama.

3. Elementi matrice strukture kanoničkih faktora prvog skupa varijabli su...

- a) ... koeficijenti korelacija manifestnih varijabli prvog skupa s kanoničkim faktorima prvog skupa.
- b) ... koeficijenti korelacija manifestnih varijabli prvog skupa sa svim kanoničkim faktorima.
- c) ... koeficijenti korelacji svih manifestnih varijabli s kanoničkim faktorima prvog skupa.
- d) ... koeficijenti korelacijskih faktora prvog skupa s kanoničkim faktorima drugog skupa.

4. Par kanoničkih faktora je statistički značajan, ako je...

- a) ... statistički značajan pripadajući koeficijent kanoničke korelacijske.
- b) ... su korelacijski manifestnih varijabli s pripadajućim kanoničkim faktorima statistički značajne.
- c) ... je broj parova kanoničkih faktora manji od broja entiteta u uzorku.
- d) ... je broj parova kanoničkih faktora veći od broja entiteta u uzorku.

5. Koja od navedenih tvrdnji sigurno nije točna?

- a) Kanoničkom koreacijskom analizom je utvrđeno da je prvi koeficijent kanoničke korelacijske 0,55 , drugi koeficijent kanoničke korelacijske 0,55 , a treći koeficijent kanoničke korelacijske 0,55.
- b) Kanoničkom koreacijskom analizom je utvrđeno da je prvi koeficijent kanoničke korelacijske 0,63 , drugi koeficijent kanoničke korelacijske 0,78 , a treći koeficijent kanoničke korelacijske 0,84.
- c) Kanoničkom koreacijskom analizom je utvrđeno da je prvi koeficijent kanoničke korelacijske 0,1 , drugi koeficijent kanoničke korelacijske 0,05 , a treći koeficijent kanoničke korelacijske 0,01.
- d) Kanoničkom koreacijskom analizom je utvrđeno da je prvi koeficijent kanoničke korelacijske 0,66 , drugi koeficijent kanoničke korelacijske 0,55 , a treći koeficijent kanoničke korelacijske 0,44.

6. Kanoničkom koreacijskom analizom na podacima datoteke SKOLA.sta utvrdite povezanost skupa antropometrijskih varijabli (VISI, TEZI, OBPO i NABN) i motoričkih testova (TAPI, POLI, SDAL, POTR, PRRA i IZVI)! Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Druga kanonička korelacija nije statistički značajna ni na razini pogreške 5% ni na razini pogreške 1%.
- b) Druga kanonička korelacija je statistički značajna na razini pogreške 5%, ali ne i na razini pogreške 1%.
- c) Druga kanonička korelacija nije statistički značajna na razini pogreške 5%, ali je statistički značajna na razini pogreške 1%.
- d) Druga kanonička korelacija je statistički značajna na razini pogreške 5% i 1%.

7. Cilj kanoničke koreacijske analize je...

- a) ... testiranje statističke značajnosti razlika između dviju grupa entiteta.
- b) ... utvrđivanje relacija između dvaju skupova varijabli.
- c) ... kondenzacija dva skupa manifestnih varijabli na dva skupa glavnih komponenata.
- d) ... testiranje statističke značajnosti razlika između dva skupa varijabli.

# 13. Kanonička koreacijska analiza

## Pitanja i zadaci

8. Kanoničkom koreacijskom analizom povezanosti između skupa varijabli A i skupa varijabli B je utvrđeno da je korelacija prvog para kanoničkih faktora 0,88 , drugog para 0,65 , a trećeg para 0,11, te da niti jedna od navedenih kanoničkih korelacija nije statistički značajna na razini pogreške 0,05. Koji je od navedenih zaključaka ispravan?

- a) Na razini pogreške 0,01 povezanost skupa varijabli A i skupa varijabli B je sigurno statistički značajna.
- b) Povezanost skupa varijabli A i skupa varijabli B sigurno postoji u populaciji entiteta.
- c) Povezanost skupa varijabli A i skupa varijabli B ne postoji ni u promatranom uzorku entiteta ni u populaciji entiteta.
- d) Na razini pogreške 0,05 nije moguće zaključiti da je povezanost skupa varijabli A i skupa varijabli B statistički značajna.

9. Prvi par kanoničkih faktora se sastoji od...

- a) ... prve glavne komponente prvog skupa manifestnih varijabli i prve glavne komponente drugog skupa manifestnih varijabli.
- b) ... prve glavne komponente prvog skupa manifestnih varijabli i druge glavne komponente drugog skupa manifestnih varijabli.
- c) ... prvog kanoničkog faktora prvog skupa manifestnih varijabli i drugog kanoničkog faktora drugog skupa manifestnih varijabli.
- d) ... prvog kanoničkog faktora prvog skupa manifestnih varijabli i prvog kanoničkog faktora drugog skupa manifestnih varijabli.

10. Kanoničkom koreacijskom analizom na podacima datoteke SKOLA.sta utvrdite povezanost skupa antropometrijskih varijabli (VISI, TEZI, OBPO i NABN) i motoričkih testova (TAPI, POLI i SDAL)! Koliko je parova kanoničkih faktora moguće izračunati?

- a) 4
- b) 8
- c) 3
- d) 7

11. Testiranje statističke značajnosti koeficijenta kanoničke korelacijske vrši se putem...

- a) ... t-distribucije.
- b) ... normalne distribucije.
- c) ... F-distribucije.
- d) ...  $\chi^2$ -distribucije.

12. Testiranje statističke značajnosti koeficijenata kanoničke korelacijske provodi se pomoću...

- a) ... Kolmogorov-Smirnovljevog testa.
- b) ... Studentovog t-testa.
- c) ... Bartlettovog  $\chi^2$  testa.
- d) ... GK-kriterija.

13. Prvi par kanoničkih faktora uvijek objašnjava...

- a) ... najveći moguć dio zajedničke varijance prvog i drugog skupa manifestnih varijabli.
- b) ... najveći moguć dio varijance prvog skupa manifestnih varijabli.
- c) ... najveći moguć dio varijance drugog skupa manifestnih varijabli.
- d) ... najveći moguć dio nezavisne varijance prvog i drugog skupa varijabli.

14. Koji od navedenih koeficijenata sigurno nije koeficijent kanoničke korelacijske?

- a) -0,73
- b) 0,1
- c) 0,73
- d) 1

15. Kanoničkom koreacijskom analizom na datoteci Ucenici-OS.sta utvrdite povezanost prvog skupa antropometrijskih varijabli (ATV, ATT, AOP i ANN) i motoričkih testova (MTAP, MSDM, MDTR i MVIS)! Koja je varijabla imala najveći utjecaj na formiranje prvog kanoničkog faktora antropometrijskog skupa varijabli?

- a) ATV
- b) MSDM
- c) ATT
- d) ANN

## 13. Kanonička koreacijska analiza

### Pitanja i zadaci

16. Kanoničkom koreacijskom analizom na podacima datoteke SKOLA.sta utvrdite povezanost skupa antropometrijskih varijabli (VISI, TEZI, OBPO i NABN) i motoričkih testova (TAPI, POLI, SDAL i POTR)! Koliko je statistički značajnih parova kanoničkih faktora na razini pogreške od 5%?

- a) 2
- b) 3
- c) 1
- d) 4

17. Uvid u strukturu kanoničkih faktora vrši se putem...

- a) ... matrica kanoničkih faktora.
- b) ... matrica strukture.
- c) ... matrica interkorelacija.
- d) ... matrice kroskorelacija.

18. Koeficijent kanoničke korelacji se označava oznakom...

- a) Kc
- b) Rh
- c) K
- d) Rc

19. Prvi kanonički faktor prvog skupa i drugi kanonički faktor prvog skupa su međusobno...

- a) ... potpuno linearne nezavisni.
- b) ... u nepotpunoj negativnoj korelaciiji.
- c) ... u nepotpunoj pozitivnoj korelaciiji.
- d) ... potpuno linearne zavisni.

20. Kanoničkom koreacijskom analizom na datoteci TESTZ.sta utvrdite povezanost prvog skupa varijabli (GOD, VISI i TEZI) s drugim skupom varijabli (DALJM, DALIZ, SPRINT i LOPTA)! Kolika je korelacija varijable DALJM s prvim kanoničkim faktorom drugog skupa varijabli?

- a) 0,63
- b) 0,86
- c) -0,88
- d) -0,48

21. Koeficijent kanoničke korelaciije je...

- a) ... mjera povezanosti dva susjedna para kanoničkih faktora.
- b) ... mjera povezanosti između kanoničkih faktora unutar jednog para.
- c) ... mjera povezanosti između manifestnih varijabli i kanoničkih faktora.
- d) ... mjera povezanosti između manifestne varijable i kanoničkog faktora unutar jednog para.

22. Koeficijent kanoničke korelaciije može biti bilo koja numerička vrijednost...

- a) ... od -1 do 1.
- b) ... od 0,01 do 0,05.
- c) ... od -3 do +3.
- d) ... od 0 do 1.

23. Kanoničkom koreacijskom analizom može se izračunati onoliko parova kanoničkih faktora koliko je...

- a) ... entiteta u manjem skupu entiteta.
- b) ... varijabli u većem skupu manifestnih varijabli.
- c) ... varijabli u manjem skupu manifestnih varijabli.
- d) ... entiteta u većem skupu entiteta.

24. Kanonički faktor se izračunava kao linearna kombinacija...

- a) ... manifestnih varijabli oba skupa.
- b) ... manifestnih varijabli jednog skupa.
- c) ... korelacija između varijabli jednog skupa.
- d) ... korelacija između varijabli oba skupa.

25. Prvi kanonički faktor prvog skupa i drugi kanonički faktor drugog skupa su međusobno...

- a) ... potpuno linearne nezavisni.
- b) ... u nepotpunoj negativnoj korelaciiji.
- c) ... u nepotpunoj pozitivnoj korelaciiji.
- d) ... potpuno linearne zavisni.

## 13. Kanonička korelacijska analiza

### Pitanja i zadaci

26. Ako se kanoničkom korelacijskom analizom na uzorku od 9 entiteta utvrđuje povezanost između skupa od četiri testa za procjenu motoričkih sposobnosti i šest testova za procjenu karakteristika građe tijela, koliki je ukupan broj kanoničkih faktora koji se mogu izračunati?

- a) 4
- b) 9
- c) 8
- d) 6

27. Ako kanonička korelacija drugog para kanoničkih faktora nije statistički značajna, koja je od navedenih tvrdnji sigurno točna?

- a) Kanonička korelacija prvog para kanoničkih faktora je statistički značajna.
- b) Kanonička korelacija trećeg para kanoničkih faktora je statistički značajna.
- c) Treći par kanoničkih faktora nije statistički značajan.
- d) Prvi par kanoničkih faktora nije statistički značajan.

28. Kanoničkom korelacijskom analizom na datoteci *Ucenici-OS.sta* utvrdite povezanost skupa antropometrijskih varijabli (ATV, ATT, AOP i ANN) i motoričkih testova (MKUS, MP20, MTAP, MSDM i MVIS)! Koliko iznosi koeficijent kanoničke korelacije prvog para kanoničkih faktora?

- a) 0,30
- b) 0,34
- c) 0,58
- d) 0,09

29. Ako je treći par kanoničkih faktora statistički značajan, koja od navedenih tvrdnji sigurno nije točna?

- a) Drugi par kanoničkih faktora nije statistički značajan.
- b) Četvrti par kanoničkih faktora je statistički značajan.
- c) Prvi par kanoničkih faktora je statistički značajan.
- d) Peti par kanoničkih faktora nije statistički značajan.

30. Ako je korelacija svake manifestne varijable prvog skupa sa svakom manifestnom varijablom drugog skupa jednaka 0 koliko iznosi prvi koeficijent kanoničke korelacije?

- a) 1
- b) Onoliko koliko ima varijabli u manjem skupu manifestnih varijabli.
- c) 0
- d) Onoliko koliko ima varijabli u većem skupu manifestnih varijabli.

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13

# 14

*Analiza varijance, Diskriminacijska analiza*

15  
16  
17  
18  
19  
20

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

#### *Univarijatna analiza varijance*

- nulta hipoteza
- alternativna hipoteza
- varijabilitet između grupa
- varijabilitet unutar grupa
- F-vrijednost
- kritična F-vrijednost
- testiranje statističke značajnosti razlika

#### *Multivarijatna analiza varijance*

- nulta hipoteza
- alternativna hipoteza
- centroid
- zajednički centroid
- centroidi grupa
- Wilksova lambda
- testiranje statističke značajnosti razlika

#### *Diskriminacijska analiza*

- svrha diskriminacijske analize
- diskriminacijske funkcije
- broj diskriminacijskih funkcija
- ortogonalnost diskriminacijskih funkcija
- matrica diskriminacijskih funkcija
- testiranje statističke značajnosti diskriminacijskih funkcija
- koeficijent kanoničke diskriminacije
- matrica strukture diskriminacijskih funkcija
- centroidi grupa u prostoru diskriminacijskih funkcija
- procjena pripadnosti entiteta grupi

### STATISTICA

#### *Univarijatna analiza varijance*

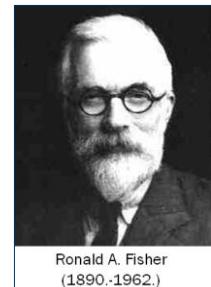
#### *Diskriminacijska analiza*

- testiranje statističke značajnosti diskriminacijskih funkcija
- izračunavanje koeficijenata kanoničke diskriminacije
- izračunavanje matrice strukture diskriminacijskih funkcija
- izračunavanje centroida grupa u prostoru diskriminacijskih funkcija

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

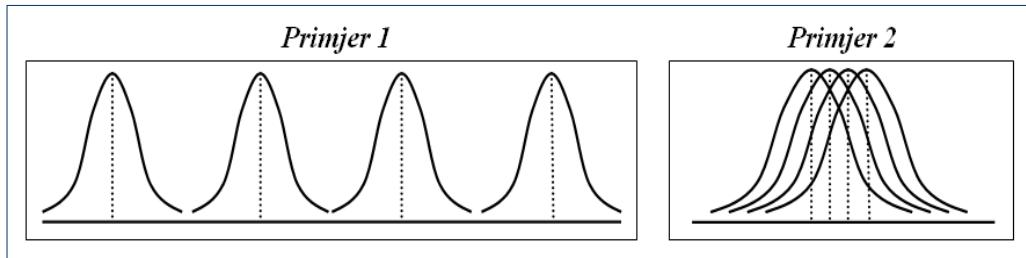
### Univarijatna analiza varijance

- ▶ **Univarijatna analiza varijance** ili **ANOVA** je statistički postupak koji je osmislio Ronald A. Fisher, a kojim se utvrđuje statistička značajnost razlike između aritmetičkih sredina dviju ili više grupa entiteta u jednoj varijabli.
- ▶ Pri tome je moguće postaviti sljedeću nultu ( $H_0$ ), odnosno alternativnu ( $H_1$ ) hipotezu:
  - $H_0$ : Uz pogrešku  $p$  ne možemo tvrditi da su razlike između aritmetičkih sredina analiziranih grupa statistički značajne.
  - $H_1$ : Razlike između aritmetičkih sredina analiziranih grupa statistički su značajne uz pogrešku  $p$ .
- ▶ Ako je varijabilitet između grupa statistički značajno veći od varijabiliteta unutar grupa onda se grupe međusobno statistički značajno razlikuju.



Ronald A. Fisher  
(1890.-1962.)

**Prikaz:** Aritmetičke sredine četiri grupe entiteta i odgovarajuće distribucije rezultata u slučaju kada je varijabilitet između grupa veći od varijabiliteta unutar grupa (*Primjer 1*) i u slučaju kada je varijabilitet unutar grupa veći od varijabiliteta između grupa (*Primjer 2*)



- ▶ **Varijanca između grupa** ( $\sigma_{ig}^2$ ) je mjera varijabiliteta između grupa, a izračunava se formulom:

$$\sigma_{ig}^2 = \frac{\sum_{g=1}^k n_g (\bar{x}_g - \bar{x}_t)^2}{k-1}$$

gdje je

- $n_g$  - broj entiteta u grupi  $g$  gdje je  $g=1,2,\dots,k$
- $k$  - broj grupa
- $\bar{x}_g$  - aritmetička sredina grupe  $g$  gdje je  $g=1,2,\dots,k$
- $\bar{x}_t$  - aritmetička sredina svih rezultata, odnosno zajednička aritmetička sredina.

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

- **Varijanca unutar grupa** ( $\sigma_{ug}^2$ ) je mjera varijabiliteta unutar grupa, a izračunava se formulom:

$$\sigma_{ug}^2 = \frac{\sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (x_{gi} - \bar{x}_g)^2}{n - k}$$

gdje je

- $n_g$  - broj entiteta u grupi  $g$  gdje je  $g=1,2,\dots,k$
- $k$  - broj grupa
- $n$  - ukupan broj entiteta
- $x_{gi}$  - rezultat entiteta  $i$  pripadnika grupe  $g$  gdje je  $i=1,2,\dots,n_g$
- $\bar{x}_g$  - aritmetička sredina grupe  $g$  gdje je  $g=1,2,\dots,k$

- Statistička značajnost razlika između grupa testira se putem  $F$ -distribucije.  **$F$ -vrijednost** se izračunava kao omjer varijance između grupa ( $\sigma_{ig}^2$ ) i varijance unutar grupa ( $\sigma_{ug}^2$ ).

$$F = \frac{\sigma_{ig}^2}{\sigma_{ug}^2}$$

- Ako je izračunata  $F$ -vrijednost jednaka ili veća od kritične  $F$ -vrijednosti onda su razlike između grupa statistički značajne. **Kritična  $F$ -vrijednost** određuje se na temelju broja stupnjeva slobode  $df_1=k-1$  i  $df_2=n-k$  i pogreške statističkog zaključka  $p$ .

### Multivarijatna analiza varijance

- **Multivarijatna analiza varijance** ili **MANOVA** je statistički postupak kojim se utvrđuje statistička značajnost razlika između centroida dviju ili više grupa ispitanika.
- Pri tome je moguće postaviti sljedeću nultu ( $H_0$ ), odnosno alternativnu ( $H_1$ ) hipotezu:
- $H_0$ : Uz pogrešku  $p$  ne možemo tvrditi da su razlike između centroida analiziranih grupa statistički značajne.
  - $H_1$ : Razlike između centroida analiziranih grupa statistički su značajne uz pogrešku  $p$ .
- **Centroid** je vektor arimetičkih sredina dviju ili više varijabli.

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

**Primjer:** Dvije grupe ispitanika (nogometari i košarkaši) izmjerene su s tri testa motorike i dobiveni su sljedeći rezultati:

GRUPA	SDM	BML	T20M
N	220	570	3,4
	265	595	3,1
	240	615	3,1
$\bar{x}$	241,67	593,33	3,2

Centroid grupe nogometara je

$$241,67$$

$$\mathbf{m}_n = \begin{vmatrix} 241,67 \\ 593,33 \\ 3,2 \end{vmatrix}$$

GRUPA	SDM	BML	T20M
K	280	690	3,7
	310	720	3,5
	305	735	3,3
$\bar{x}$	298,33	715	3,5

Centroid grupe košarkaša je

$$298,33$$

$$\mathbf{m}_k = \begin{vmatrix} 298,33 \\ 715 \\ 3,5 \end{vmatrix}$$

- Neka su u matricama  $\mathbf{B}_g$  (gdje je  $g=1,2,\dots,k$ , a  $k$  broj grupa entiteta) podaci skupova  $E_g = \{e_{gi}; i=1, \dots, n_g\}$  entiteta opisanih skupom  $V = \{v_j; j=1, \dots, m\}$  varijabli, a u matrici  $\mathbf{B}$  podaci svih entiteta odnosno skupa  $E = \{e_i; i=1, \dots, n\}$  entiteta opisanih skupom  $V = \{v_j; j=1, \dots, m\}$  varijabli.

- Operacijom

$$\mathbf{m} = \mathbf{B}^T \mathbf{1} n^{-1}$$

gdje je  $\mathbf{1}$  - vektor stupca s  $n$  jedinica, izračuna se zajednički centroid.

- Operacijom

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} - \mathbf{1} \mathbf{m}^T$$

izračuna se matrica odstupanja rezultata entiteta od zajedničkog centroida.

- Operacijom

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$$

izračuna se matrica suma kvadrata i krosprodukata za total.

- Operacijom

$$\mathbf{m}_g = \mathbf{B}_g^T \mathbf{1}_g n_g^{-1}$$

izračuna se centroid grupe  $g$ .

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

- ▶ Operacijom

$$\mathbf{D}_g = \mathbf{B}_g - \mathbf{1}_g \mathbf{m}_g^T$$

izračuna se matrica odstupanja rezultata entiteta grupe  $g$  od centroida grupe  $g$ .

- ▶ Matrica suma kvadrata i krosprodukata unutar grupa ( $\mathbf{W}$ ) izračuna se operacijom

$$\mathbf{W} = \sum_{g=1}^k \mathbf{W}_g \quad \text{gdje je } \mathbf{W}_g = \mathbf{D}_g^T \mathbf{D}_g$$

- ▶ Matrica suma kvadrata i krosprodukata između grupa može se izračunati operacijom

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} - \mathbf{W}$$

jer vrijedi da je

$$\mathbf{T} = \mathbf{W} + \mathbf{A}$$

- ▶ Statistička značajnost razlika između centroida grupa testira se putem **Wilksove lambde**.

$$\Lambda_w = \frac{\det(\mathbf{W})}{\det(\mathbf{T})}$$

- ▶ Wilksova lambda se kreće u intervalu od 0 do 1, a što je njena vrijednost manja to je veća vjerojatnost da je razlika između centroida grupa statistički značajna.
- ▶ Pošto Wilksova lambda prati vrlo složenu distribuciju, u svrhu testiranja statističke značajnosti razlika može se izračunati i **aproksimativna F-vrijednost**. Navedena F-vrijednost izračunava se sljedećom formulom:

$$F = \frac{1 - \lambda_w^{1/S}}{\lambda_w^{1/S}} \cdot \frac{df_2}{df_1}$$

gdje je  $s = \sqrt{\frac{m^2(k-1)^2 - 4}{m^2 + (k-1)^2 - 5}}$

$$df_1 = m(k-1)$$

$$df_2 = s \left( (n-1) - \frac{m+k}{2} \right) - \left( \frac{m \cdot (k-1) - 2}{2} \right)$$

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

### Diskriminacijska analiza

- ▶ **Diskriminacijskom analizom** može se utvrditi statistička značajnost razlika između centroida dvije ili više grupa ispitanika te doprinos pojedinih varijabli razlikovanju među grupama.
- ▶ Iz skupa od  $m$  manifestnih izračuna se  $k-1$  diskriminacijskih funkcija ako je broj varijabli ( $m$ ) veći ili jednak broju grupa ( $k$ ), odnosno  $m$  diskriminacijskih funkcija ako je broj varijabli manji od broja grupa.
- ▶ **Diskriminacijske funkcije** su linearne kombinacije manifestnih varijabli koje se izračunavaju uz uvjet da se centroidi grupa entiteta na njima što je moguće više razlikuju i uz uvjet da su međusobno potpuno linearne nezavisne.
- ▶ Matricu diskriminacijskih funkcija ( $\Psi$ ) čine rezultati entiteta u  $k-1$  diskriminacijskih funkcija, a izračunava se operacijom

$$\Psi = D X$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \psi_{11} \dots \psi_{1k-1} \\ \vdots \dots \vdots \\ \psi_{n1} \dots \psi_{nk-1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} d_{11} \dots d_{1m} \\ \vdots \dots \vdots \\ d_{n1} \dots d_{nm} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} x_{11} \dots x_{1k-1} \\ \vdots \dots \vdots \\ x_{m1} \dots x_{mk-1} \end{array} \right\}$$

gdje je  $X$  matrica svojstvenih vektora matrice  $W^{-1}A$ .

- ▶ Operacijom

$$\Delta = \Psi^T \Psi n^{-1}$$

izračuna se dijagonalna matrica varijanci diskriminacijskih funkcija.

- ▶ Operacijom

$$\Phi = \Psi \Delta^{-1/2}$$

Izračunaju se standardizirani rezultati entiteta na diskriminacijskim funkcijama, odnosno matrica standardiziranih diskriminacijskih funkcija.

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

- **Koeficijent kanoničke diskriminacije** ( $R_{cj}$ ) je mjera diskriminacijske moći odgovarajuće diskriminacijske funkcije, a predstavlja korelaciju diskriminacijske funkcije sa **selektorskom varijablom** odnosno varijablu koja određuje pripadnost entiteta grupama.

$$R_{cj} = \sqrt{\frac{\lambda_j}{1 + \lambda_j}}$$

gdje je  $\lambda_j$  svojstvena vrijednost matrice  $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}$ .

- Koeficijenti kanoničke diskriminacije se kreću u intervalu od 0 do 1. Što je koeficijent kanoničke diskriminacije veći, to pripadajuća diskriminacijska funkcija bolje razlikuje grupe entiteta.
- Statistička značajnost diskriminacijskih funkcija testira se redom od prve do posljednje. Utvrdi li se da neka diskriminacijska funkcija nije statistički značajna, tada niti jedna sljedeća diskriminacijska funkcija ne može biti statistički značajna.
- Ako se želi zaključivati s uzorka na populaciju entiteta interpretiraju se samo one diskriminacijske funkcije za koje je utvrđeno da su statistički značajne.
- Testiranje statističke značajnosti svake diskriminacijske funkcije vrši se putem  $\chi^2$  - distribucije s brojem stupnjeva slobode  $df=(m-p) \times (k-p-1)$ .  $\chi^2$  vrijednost se izračunava sljedećom formulom

$$\chi^2 = -\left(n - \frac{m+k}{2} - 1\right) \log_e \left( \prod_{j=p+1}^q \frac{I}{1 + \lambda_j} \right)$$

gdje je

- $n$  - broj entiteta
- $m$  - broj varijabli
- $k$  - broj grupa
- $q$  - broj diskriminacijskih funkcija
- $p$  - broj prethodno testiranih diskriminacijskih funkcija
- $\lambda_j$  - svojstvena vrijednost matrice  $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}$ , a  $j = 1, \dots, q$

- Minimalna pogreška statističkog zaključka ( $p$ ) izračunata pri testiranju statističke značajnosti prve diskriminacijske funkcije jednaka je minimalnoj pogrešci statističkog zaključka utvrđenoj multivarijatnom analizom varijance.

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

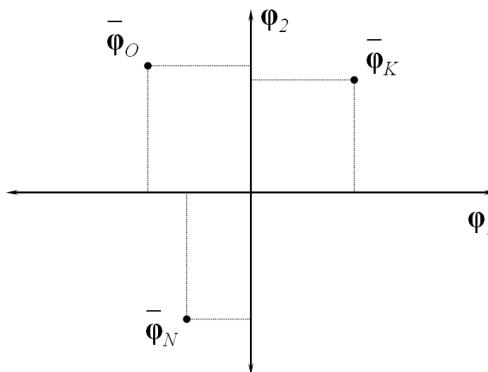
- Doprinos pojedinih manifestnih varijabli razlikovanju centroida grupa određuje se na temelju **matrice strukture diskriminacijskih funkcija** ( $\Phi$ ) koja se izračunava operacijom

$$\Phi = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}^{-1}$$

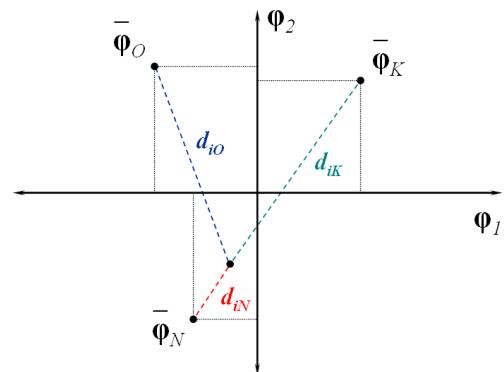
- Matricu strukture diskriminacijskih funkcija čine korelacije manifestnih varijabli s diskriminacijskim funkcijama.
- U interpretaciji razlika potrebno je utvrditi i centroide grupa na diskriminacijskim funkcijama kao i njihove međusobne udaljenosti. **Centroidi grupa** ( $\bar{\Phi}_g$ ) u prostoru diskriminacijskih funkcija izračunaju se operacijom

$$\bar{\Phi}_g = \Phi_g^T \mathbf{1}_g n_g^{-1}$$

**Prikaz:** Koordinate centroida grupa K,N i O u koordinatnom sustavu dviju diskriminacijskih funkcija



**Prikaz:** Udaljenosti rezultata entiteta i od centroida grupa K,N i O u koordinatnom sustavu dviju diskriminacijskih funkcija



- Pripadnost nekog entiteta određenoj grupi može se procijeniti na temelju udaljenosti vektora njegovih rezultata na diskriminacijskim funkcijama od centroida svake pojedine grupe. Što je udaljenost od centroma grupe manja to je veća vjerojatnost da entitet po svojim obilježjima pripada toj grupi.

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza



### STATISTICA

#### Postupci:

- ▶ **Univarijatna analiza varijance:** ANOVA se izvodi slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Basic Statistics/Tables → Breakdown & one-way ANOVA. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije Variables potrebno je označiti selektorsku varijablu (*Grouping variable*) i jednu ili više zavisnih varijabli (*Dependent variables*). Nakon izbora varijabli potrebno je odabrati opciju ANOVA & tests → Analysis of Variance.
- ▶ **Diskriminacijska analiza:** Diskriminacijska analiza provodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Multivariate Exploratory Techniques → Discriminant analysis. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije Variables potrebno je označiti selektorsku varijablu (*Grouping variable*) i dvije ili više zavisnih varijabli (*Dependent variables*). Nakon odabira varijabli potrebno je odabrati opcije Advanced → Perform canonical analysis → Advanced. Nakon odabira prethodnih opcija moguće je izračunati: koeficijente kanoničke diskriminacije i testirati statističku značajnost diskriminacijskih funkcija (*Summary: Chi square tests of successive roots*), matricu strukture diskriminacijskih funkcija (*Factor structure*) i centroide grupa u prostoru diskriminacijskih funkcija (*Means of canonical variables*).

---

#### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* uz pogrešku  $p=0,01$  testirajte da li se aritmetičke sredine učenika 1., 2., 3. i 4. razreda u varijabli MPOL statistički značajno razlikuju!
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* utvrđite da li se učenici 1., 2., 3. i 4. razreda statistički značajno razlikuju prema građi tijela (varijable ATV, ATT, AOP i ANN)! Testirajte statističku značajnost razlika, izračunajte koeficijente kanoničke diskriminacije, matricu strukture i centroide grupa!

---

#### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 150-159, 245-257.
- ▶ Mejovšek, M. (2003). *Uvod u metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 224-242.

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

### Pitanja i zadaci

1. ANOVA je skraćeni naziv za...

- a) ... univarijatnu analizu varijance.
- b) ... multivarijatnu analizu varijance.
- c) ... diskriminacijsku analizu.
- d) ... kanoničku analizu.

2. Diskriminacijskom analizom testirane su razlike između 4 grupe entiteta u prostoru od 6 manifestnih varijabli. Koliki je maksimalan broj diskriminacijskih funkcija koje je moguće izračunati?

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6

3. Elementi matrice diskriminacijskih funkcija su...

- a) ... aritmetičke sredine grupa na diskriminacijskim funkcijama.
- b) ... korelacije manifestnih varijabli s diskriminacijskim funkcijama.
- c) ... koeficijenti kanoničke diskriminacije utvrđenih diskriminacijskih funkcija.
- d) ... rezultati entiteta na diskriminacijskim funkcijama.

4. Testiranje statističke značajnosti koeficijenta kanoničke diskriminacije vrši se putem...

- a) ... t-distribucije.
- b) ...  $\chi^2$ -distribucije.
- c) ... normalne distribucije.
- d) ... p-distribucije.

5. Pokrenite datoteku Ucenici-OS.sta! Testirajte da li se I., II., III i IV razred učenika (RAZRED) statistički značajno razlikuju u prostoru antropometrijskih varijabli (ATV, ATT, AOP, ANN)! Utvrdite kolika je korelacija varijable ATT s prvom diskriminacijskom funkcijom!

- a) 0,12
- b) 0,70
- c) 0,15
- d) 0,64

6. Koeficijenti kanoničke diskriminacije kreću se u intervalu...

- a) ... od -1 do 1.
- b) ... od 0 do 1.
- c) ... od 0 do 3.
- d) ... od -3 do 3.

7. Cilj MANOVE je...

- a) ... utvrđivanje statističke značajnosti razlika između centralnih vrijednosti dviju ili više grupa entiteta.
- b) ... utvrđivanje statističke značajnosti diskriminacijskih funkcija.
- c) ... utvrđivanje strukture diskriminacijskih funkcija.
- d) ... utvrđivanje statističke značajnosti razlika između centroida dviju ili više grupa entiteta.

8. Pokrenite datoteku Ucenici-OS.sta! Testirajte da li se I., II., III i IV razred učenika (RAZRED) statistički značajno razlikuju u prostoru motoričkih varijabli (MKUS, MPOL, MP20, MPRR, MTAP, MSDM, MDTR i MVIS)! Utvrdite kolika je aritmetička sredina trećeg (III) razreda na drugoj diskriminacijskoj funkciji!

- a) -0,312
- b) 0,629
- c) 0,233
- d) -0,725

9. Koeficijent kanoničke diskriminacije je...

- a) ... prosječna korelacija diskriminacijske funkcije s preostalim diskriminacijskim funkcijama.
- b) ... korelacija diskriminacijske funkcije sa selektorskom varijablom.
- c) ... prosječna korelacija diskriminacijske funkcije s manifestnim varijablama.
- d) ... korelacija diskriminacijske funkcije s centrom pripadajuće grupe.

10. MANOVA statističku značajnost razlika između grupa utvrđuje putem...

- a) ... Bartlettovog  $\chi^2$  testa.
- b) ... Wilksove lambde.
- c) ... Mann-Whitneyeve U vrijednosti.
- d) ... Studentove t-vrijednosti.

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

### Pitanja i zadaci

11. Korelacija varijable X s prvom diskriminacijskom funkcijom iznosi 0,15 , varijable Y -0,66 , varijable Z 0,01, a varijable W -0,07. Koja varijabla je najviše pridonjela stvaranju prve diskriminacijske funkcije?

- a) X
- b) Y
- c) Z
- d) W

12. Pokrenite datoteku Ucenici-OS.sta! Testirajte da li se I., II., III i IV razred učenika (RAZRED) statistički značajno razlikuju u prostoru antropometrijskih varijabli (ATV, ATT, AOP, ANN)! Utvrdite koliki je koeficijent kanoničke diskriminacije prve diskriminacijske funkcije!

- a) 0,506
- b) 0,115
- c) 0,696
- d) 0,981

13. Centroid je...

- a) ... centralna vrijednost dviju ili više grupa ispitanika.
- b) ... centralna vrijednost dviju ili više varijabli.
- c) ... vektor razlike između aritmetičkih sredina dviju ili više varijabli.
- d) ... vektor aritmetičkih sredina dviju ili više varijabli.

14. ANOVOM je utvrđeno da je variabilitet između grupa jednak 0. Koji je zaključak sigurno ispravan?

- a) Aritmetičke sredine grupa u analiziranoj varijabli se ne razlikuju.
- b) Grupe se prema analiziranoj varijabli statistički značajno razlikuju.
- c) Aritmetičke sredine grupa u analiziranoj varijabli se razlikuju.
- d) Svi ispitanici u analiziranoj varijabli imaju jednake rezultate.

15. MANOVA je skraćeni naziv za...

- a) ... univariatnu analizu varijance.
- b) ... multivariatnu analizu varijance.
- c) ... diskriminacijsku analizu.
- d) ... kanoničku korelacijsku analizu.

16. Pokrenite datoteku Ucenici-OS.sta! ANOVOM testirajte razlike između I, II, III i IV razreda učenika u varijabli ATV! Koliko iznosi odgovarajuća F vrijednost?

- a) 91,25
- b) 94,45
- c) 95,75
- d) 97,65

17. Provedena je diskriminacijska analiza. Doprinos pojedinih manifestnih varijabli razlikovanju između grupa entiteta utvrđuje se putem...

- a) ... Wilksovih lambdi.
- b) ... koeficijenata kanoničke diskriminacije.
- c) ... matrice rezultata entiteta na diskriminacijskim funkcijama.
- d) ... matrice strukture diskriminacijskih funkcija.

18. F vrijednost utvrđena ANOVOM je...

- a) ... omjer varijance između grupa i varijance unutar grupa.
- b) ... omjer varijance između grupa i ukupne varijance.
- c) ... omjer ukupne varijance i varijance unutar grupa.
- d) ... omjer ukupne varijance i varijance između grupa.

19. Diskriminacijskom analizom moguće je utvrditi...

- a) ... statističku značajnost povezanosti između dviju ili više grupa varijabli te doprinos pojedinih varijabli povezanosti među grupama.
- b) ... statističku značajnost razlike između dviju ili više grupa varijabli te doprinos pojedinih varijabli razlikovanju među grupama.
- c) ... statističku značajnost povezanosti između dviju ili više grupa ispitanika te doprinos pojedinih varijabli povezanosti među grupama.
- d) ... statističku značajnost razlike između centroida dviju ili više grupa ispitanika te doprinos pojedinih varijabli razlikovanju među grupama.

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

### Pitanja i zadaci

20. Diskriminacijskom analizom testirane su razlike između 14 grupa entiteta u prostoru od 14 manifestnih varijabli. Koliki je maksimalan broj diskriminacijskih funkcija koje je moguće izračunati?

- a) 16
- b) 15
- c) 14
- d) 13

21. Pokrenite datoteku *Ucenici-OS.sta!* Utvrđite kolika je minimalna pogreška s kojom je moguće zaključiti da se učenici ( $SPOL=m$ ) statistički značajno razlikuju od učenica ( $SPOL=z$ ) u varijabli ATT!

- a) 0,84
- b) 0,72
- c) 0,68
- d) 0,99

22. Elementi matrice strukture diskriminacijskih funkcija su...

- a) ... korelacije manifestnih varijabli s diskriminacijskim funkcijama.
- b) ... rezultati entiteta na diskriminacijskim funkcijama.
- c) ... aritmetičke sredine grupa na diskriminacijskim funkcijama.
- d) ... koeficijenti kanoničke diskriminacije utvrđenih diskriminacijskih funkcija.

23. Pokrenite datoteku *Ucenici-OS.sta!* Testirajte da li se I., II., III i IV razred učenika (RAZRED) statistički značajno razlikuju u prostoru motoričkih varijabli (MKUS, MPOL, MP20, MPRR, MTAP, MSDM, MDTR i MVIS)! Utvrđite koliko je diskriminacijskih funkcija statistički značajno na razini pogreške 1% !

- a) 3
- b) 1
- c) 2
- d) 0

24. Ako je koeficijent kanoničke diskriminacije druge diskriminacijske funkcije jednak 0,38 , koja od navedenih tvrdnji sigurno nije točna?

- a) Koeficijent kanoničke diskriminacije prve diskriminacijske funkcije jednak je 0,38.
- b) Koeficijent kanoničke diskriminacije treće diskriminacijske funkcije jednak je 0,22.
- c) Koeficijent kanoničke diskriminacije prve diskriminacijske funkcije jednak je 0,54.
- d) Koeficijent kanoničke diskriminacije treće diskriminacijske funkcije jednak je 0,54.

25. ANOVOM je utvrđeno da varijanca između grupa iznosi 16, a varijanca unutar grupa 2. Koliko iznosi odgovarajuća F vrijednost?

- a) 8
- b) 0,125
- c) 16
- d) 2

26. Diskriminacijskom analizom testirane su razlike između 6 grupa entiteta u prostoru od 4 manifestne varijable. Koliki je maksimalan broj diskriminacijskih funkcija koje je moguće izračunati?

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6

27. Kolika je korelacija prve i druge diskriminacijske funkcije?

- a) 0,5
- b) 1
- c) 0
- d) -1

28. Diskriminacijske funkcije su...

- a) ... linearne kombinacije varijabli uključenih u analizu.
- b) ... linearne kombinacije grupa uključenih u analizu.
- c) ... linearne kombinacije entiteta uključenih u analizu.
- d) ... linearne kombinacije aritmetičkih sredina varijabli uključenih u analizu.

## 14. Analiza varijance, Diskriminacijska analiza

### Pitanja i zadaci

29. Cilj univariatne analize varijance je...

- a) ... utvrđivanje statističke značajnosti razlika između aritmetičkih sredina dviju ili više grupa entiteta u dvije ili više varijabli.
- b) ... utvrđivanje statističke značajnosti razlike između aritmetičkih sredina dviju grupa entiteta u dvije ili više varijabli.
- c) ... Utvrđivanje statističke značajnosti razlika između aritmetičkih sredina dviju ili više grupa entiteta u jednoj varijabli.
- d) ... utvrđivanje statističke značajnosti razlika između varijanci dviju ili više grupa entiteta u jednoj varijabli.

30. Ako koeficijent kanoničke diskriminacije treće diskriminacijske funkcije nije statistički značajan, koja od navednih tvrdnji sigurno nije točna?

- a) Koeficijent kanoničke diskriminacije druge diskriminacijske funkcije nije statistički značajan.
- b) Koeficijent kanoničke diskriminacije četvrte diskriminacijske funkcije je statistički značajan.
- c) Koeficijent kanoničke diskriminacije druge diskriminacijske funkcije je statistički značajan.
- d) Koeficijent kanoničke diskriminacije četvrte diskriminacijske funkcije nije statistički značajan.

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14

# **15** *Uvod u kineziometriju*

16  
17  
18  
19  
20

---

### Sadržaj poglavlja

#### TEORIJSKE OSNOVE

##### *Osnovni kineziometrijski pojmovi*

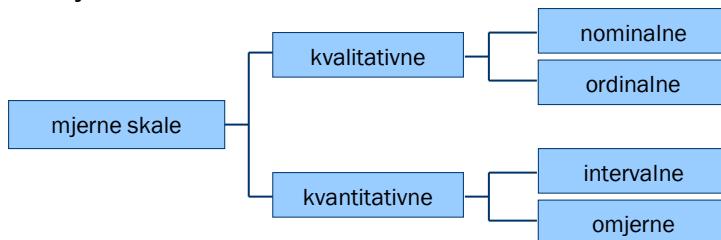
- kineziometrija
- mjerjenje
- predmet mjerjenja
- objekt mjerjenja
- mjerna skala
- podjela mjernih skala
- nominalna mjerna skala
- ordinalna mjerna skala
- intervalna mjerna skala
- omjerna mjerna skala
- mjeritelj
- standardizirani postupak mjerjenja
- mjerni instrument
- podjela mjernih instrumenata
- testovi tipa «papir-olovka»
- testovi tipa «aparatura za mjerjenje»
- testovi tipa «primjena motoričkog zadatka»
- postupak indirektnog mjerjenja motoričkih sposobnosti
- testovi tipa «subjektivna procjena mjeritelja»

##### *Konstrukcija mjernog instrumenta*

- definiranje predmeta mjerjenja
- odabir odgovarajućeg tipa mjernog instrumenta
- izbor podražajnih situacija
- standardizacija mjernog postupka
- utvrđivanje metrijskih karakteristika

### Osnovni kineziometrijski pojmovi

- ▶ **Kineziometrija** je znanstvena disciplina koja proučava probleme mjerjenja u kineziologiji, odnosno probleme konstrukcije, evaluacije i primjene mjernih instrumenata za procjenu kinezioloških fenomena.
- ▶ **Mjerenje** je postupak kojim se entitetima pridružuju broevi ili oznake sukladno razvijenosti mjerenog svojstva, odnosno predmeta mjerjenja.
- ▶ **Predmet mjerjenja** je svojstvo objekta mjerjenja čija se razvijenost utvrđuje mjerjenjem (npr. motoričke i funkcionalne sposobnosti, motorička znanja, situacijska učinkovitost...).
- ▶ **Objekt mjerjenja** je entitet čija se svojstva utvrđuju mjerjenjem (npr. osobe, sportske ekipe, sportski događaji, tehnički elementi i taktička sredstva...).
- ▶ Mjerenje je moguće definirati i kao utvrđivanje položaja objekta mjerjenja na nekoj od mjernih skala sukladno razvijenosti predmeta mjerjenja.
- ▶ **Mjerna skala** je skup oznaka ili niz brojeva kojima je moguće opisati razvijenost mjerenog svojstva nekog objekta mjerjenja. Mjerne skale je moguće podijeliti na sljedeći način:



- ▶ **Nominalna skala** je mjerna skala bez kvantitativnih svojstava i kontinuiteta, a prema kojoj je objekte mjerjenja moguće klasificirati u dvije ili više disjunktnih kategorija ravnopravnih po vrijednosti (npr. muško – žensko, dijete – adolescent – odrasla osoba, položio kolokvij iz KM-a – nije položio kolokvij iz KM-a). Kategorije nominalne skale moraju biti definirane jednoznačno odnosno na način da svaki objekt mjerjenja može pripadati samo jednoj kategoriji.
- ▶ **Ordinalna skala** je skala rangova, tj. mjerna skala na kojoj se određuju rangovi objekata mjerjenja prema razvijenosti predmeta mjerjenja (npr. skala rangova na prijemnom ispit u kineziološkom fakultetu, skala školskih ocjena, skala plasmana na sveučilišnom prvenstvu u krosu). Prema rezultatima na ordinalnoj skali moguće je utvrditi je li neki objekt mjerjenja bolji od drugoga, ali nije moguće utvrditi točnu razliku među njima.

## 15. Uvod u kineziometriju

- ▶ **Intervalna skala** je mjerna skala koja ima kvantitativna svojstva i kontinuitet. Vrijednosti na skali su ekvidistantne, a nulta vrijednost ne predstavlja apsolutno odsustvo mjereneg svojstva, već je određena dogovorom (npr. Celzijeva temperaturna ljestvica, skala standardiziranih rezultata, skala T-skorova). Prema rezultatima na intervalnoj skali moguće je utvrditi je li neki objekt mjerena bolji od drugoga i kolika je razlika među njima, ali nije moguće utvrditi koliko je puta neki objekt mjerena bolji od drugoga.
- ▶ **Omjerna skala** je mjerna skala koja ima kvantitativna svojstva i kontinuitet. Vrijednosti na skali su ekvidistantne, a nulta vrijednost predstavlja apsolutno odsustvo mjereneg svojstva (npr. Kelvinova temperaturna ljestvica, skala jedinica apsolutnog vremena, metarska skala jedinica duljine). Prema rezultatima na intervalnoj skali moguće je utvrditi je li neki objekt mjerena bolji od drugoga, kolika je razlika među njima i koliko je puta neki objekt mjerena bolji od drugoga.
- ▶ **Mjeritelj** je osoba školovana za provođenje mjerena. Da bi se utjecaj mjeritelja na rezultat mjerena sveo na najmanju moguću mjeru, nužno je poštivati standardizirani postupak mjerena.
- ▶ **Standardizirani postupak mjerena** je precizan opis svih postupaka i uvjeta u kojima se provodi mjerena nekim mjernim instrumentom te načina bodovanja i vrednovanja dobivenih rezultata.
- ▶ **Mjerni instrument** ili **test** je operator pomoću kojeg se vrši mjerena, a kojeg čine tehnička oprema potrebna za mjerena, jedan ili više mjeritelja i standardizirani postupak mjerena. U kineziologiji se koriste sljedeći tipovi mjernih instrumenata:
  - testovi tipa «papir-olovka»
  - testovi tipa «aparatura za mjerena»
  - testovi tipa «primjena motoričkog zadatka»
  - testovi tipa «subjektivna procjena mjeritelja».
- ▶ **Testovi tipa «papir-olovka»** su svi mjerni instrumenti koji informacije o svojstvima objekta mjerena prikupljaju putem unaprijed pripremljenog pisanih materijala (npr. testovi teorijskih znanja, upitnici za procjenu tjelesne aktivnosti, upitnici za subjektivnu procjenu zdravlja, testovi ličnosti, skale stavova, upitnici frekvencija za procjenu nutritivnih unosa, dnevnički prehrane...).

## 15. Uvod u kinezimetriju

**Prikaz:** Izvadak iz upitnika za procjenu tjelesne aktivnosti IPAQ

<b>1. DIO: AKTIVNOST NA RADNOM MJESTU</b> Prvi dio upitnika se odnosi na Vaše radno mjesto. Ono uključuje plaćeni i honorarni posao te volonterski ili neki drugi neplaćeni posao koji obavljate izvan Vaše kuće, a ne uključuje neplaćeni rad koji obavljate u kući i oko kuće kao što su kućanski poslovi, rad u vrtu, briga za obitelj, itd. Kućanski poslovi će se ispitivati u 3. dijelu upitnika.
1. Jeste li trenutno zaposleni ili obavljate bilo kakav neplaćeni posao izvan Vaše kuće? <input type="checkbox"/> Da <input type="checkbox"/> Ne → <b>Prijedi na 2. DIO: PRIJEVOZ/TRANSPORT</b>
Slijedi niz pitanja o svim tjelesnim aktivnostima koje ste provodili u zadnjih 7 dana kao dio plaćenog ili neplaćenog posla koji obavljate na radnom mjestu. Ova pitanja ne uključuju putovanje na posao i s posla.
2. Tijekom zadnjih 7 dana, koliko ste dana provodili visoko intenzivnu tjelesnu aktivnost kao što su dizanje teških predmeta, kopanje i penjanje po stepenicama u sklopu posla? Prijeselite se samo aktivnosti koje ste provodili bez prekida najmanje 10 minuta. _____ dana u tjednu <input type="checkbox"/> Nisam provodio takve tjelesne aktivnosti vezane za posao → <b>Prijedi na pitanje 4.</b>
3. U danu kada ste na poslu uključeni u tjelesne aktivnosti visokog intenziteta, koliko ih vremena uobičajeno provodite? _____ sati po danu _____ minuta po danu

- Mjerni instrumenti tipa «**aparatura za mjerjenje**» kao osnovno sredstvo u prikupljanju informacija o svojstvima objekta mjerjenja koriste jedno ili više tehničkih pomagala (npr. spiroergometrijski testovi, elektromiografski testovi, dinamometrijski testovi, mjerni instrumenti za utvrđivanje dimenzija tijela, mjerni instrumenti za utvrđivanje sastava tijela, testovi u virtualnoj stvarnosti...)

**Prikaz:** Spiroergometrija



**Prikaz:** Podvodno vaganje

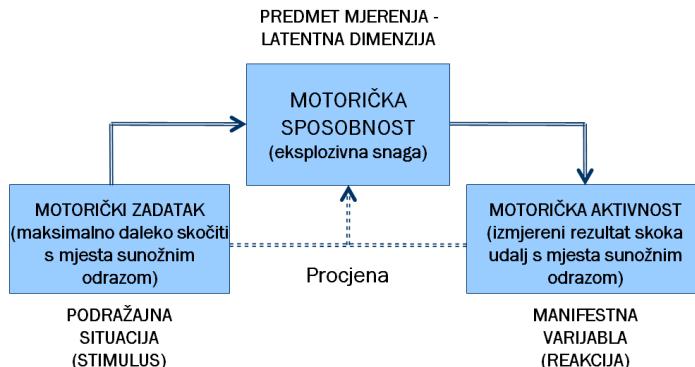
**Prikaz:** Mjerjenje kožnog nabora na prsima



- Mjerni instrumenti tipa «**primjena motoričkog zadatka**» se svode na mjerjenje efikasnosti motoričke aktivnosti koja u poznatoj mjeri aktivira određenu motoričku sposobnost objekta mjerjenja (npr. testovi za procjenu koordinacije, testovi za procjenu brzine, testovi za procjenu agilnosti, testovi za procjenu fleksibilnosti...).

## 15. Uvod u kineziometriju

**Prikaz:** Shema indirektnog mjerjenja motoričkih sposobnosti



**Primjer:** Standardizirani postupak mjerjenja testa *Skok udalj s mesta*

**Naziv testa:** Skok udalj s mesta

**Šifra testa:** MFESDM-V

**Tehnički opis:** Zatvorena prostorija najmanjih dimenzija 6x2 metra. Od zida se postave tanke strunjače tako da ukupna duljina strunjača ne bude manja od 4,5 m. Strunjače su fiksirane s jedne strane zidom, a s druge strane stopalima dvojice pomagača. Na strunjači se označi početna (odskočna) linija 80 cm od zida. Od početne linije na udaljnosti od 2 metra pa sve do 3,3 metra označe se svakih 5 cm paralelne linije duge 30 cm.

**Opis mjernog postupka:** Ispitanik stane bosim stopalima do samog ruba početne linije leđima prema zidu. Zadatak ispitanika je sunožnim odrazom skočiti prema naprijed što je moguće dalje. Zadatak je završen nakon što ispitanik izvede 4 uspješna skoka. Neuspješnim skokom se smatra: 1. skok nakon dvostrukog odraga (poskoka) u mjestu prije skoka, 2. skok nakon prestupa početne linije, 3. skok koji nije izведен sunožnim odrazom, 4. skok kojem prethodi dokorak, 5. skok nakon kojeg ispitanik dodirne strunjaču iza peta, 6. skok nakon kojeg ispitanik pri doskoku sjedne. Mjeritelj stoji s lijeve ili desne strane strunjače u ravnini s ispitanikom. Ispitanik nema pravo na probni pokušaj.

**Uputa ispitaniku:** Zadatak se objašnjava: „Vaš je zadatak da stanete iza početne linije i sunožnim odrazom skočite što dalje možete prema naprijed. Doskok mora biti na obje noge. U slučaju neispravnog skoka, zadatak se ponavlja. Ako je zadatak jasan, pripremite se za početak.“, a potom demonstrira.

**Određivanje rezultata:** Rezultat u testu izražava se u centimetrima, a određuje se kao aritmetička sredina rezultata 4 uspješna skoka.

- Mjerni instrumenti tipa **«subjektivna procjena mjeritelja»** podrazumijevaju procjenu razvijenosti određenog svojstva objekta mjerjenja od strane jednog ili više kompetentnih mjeritelja (sudaca ili ocjenjivača) (npr. ocjenjivanje motoričkih znanja u osnovnoj i srednjoj školi, ocjena izvedbe vježbe na tlu u sportskoj gimnastici, ocjena sinkroniziranog skoka u vodu s 10 metara...).

## 15. Uvod u kineziometriju

**Primjer:** Standardizirani postupak ocjenjivanja tehnike Vođenje košarkaške lopte

### Naziv testa: Vođenje košarkaške lopte

**Tehnički opis:** Prostor najmanjih dimenzija 10x5 metra. Podloga mora biti ravna i od tvrdog materijala. Na tlo se postave dvije oznake udaljene najmanje 8 metara. Potrebna je košarkaška lopta karakteristika opisanih u službenim pravilima košarkaške igre.

**Opis mjerljivog postupka:** Učenik stoji uz početnu oznaku. Zadatak učenika je umjerjenim tempom voditi košarkašku loptu od početne do završne oznake. Mjeritelj stoji izvan prostora predviđenog za vođenje lopte iza završne oznake. Učenik nema pravo na probni pokušaj.

**Uputa učeniku:** Zadatak se objašnjava: „Zadatak je stati uz početnu oznaku i na moj znak «kreni» voditi košarkašku loptu umjerjenim tempom do završne oznake. Ako je zadatak jasan, pripremite se za početak.“, a potom demonstrira.

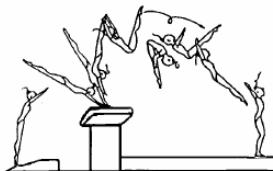
**Određivanje ocjene:** Rezultat u testu se izražava ocjenom od 1 do 5. Pri ocjenjivanju se potrebno voditi sljedećim smjernicama: NEDOVOLJAN (1) - učenik uopće ne potiskuje loptu, vec je stalno udara, zbog čega ju ne uspijeva voditi i nema nikakvu kontrolu nad njom, DOVOLJAN (2) - učenik uspijeva voditi loptu, ali ju ne potiskuje, već najčešće udara, zbog čega nema stalnu kontrolu nad loptom. DOBAR (3) - učenik pri izvođenju zadatka ima kontrolu nad loptom, ali su mu pokreti ruke i šake previše kruti, zbog čega loptu ponekad ne potiskuje, vec udara, VRLO DOBAR (4) - učenik vodi loptu uglavnom pravilno, ali mu je pogled usmjeren prema lopti, ODLIČAN (5) - učenik vodi loptu pravilno pored i malo ispred tijela, pravilno je potiskuje i prihvata, a pogled mu je usmijeren prema naprijed.

**Primjer:** Izvadak iz pravilnika za suđenje u ženskoj sportskoj gimnastici

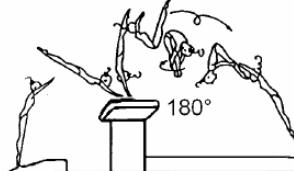
2.20  
Handspring forward on –  
piked salto forward off

2.21  
Handspring forward on – piked  
salto forward with  $\frac{1}{2}$  turn ( $180^\circ$ ) off

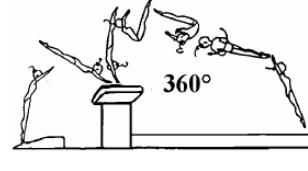
2.22  
Handspring forward on –  
pike salto forward with 1/1 turn  
( $360^\circ$ ) off



4.60 P.



5.00 P.



5.50 P.

## 15. Uvod u kineziometriju

- Pri odabiru testa za potrebe mjerjenja u kineziologiji korisno je pregledati sljedeće zbirke standardiziranih postupaka mjerjenja:
- Metikoš, D., Hofman, E., Prot, F., Pintar, Ž., Oreb, G. (1989). ***Mjerenje bazičnih motoričkih dimenzija sportaša***. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
  - Mišigoj-Duraković, M. (2008). ***Kinantropologija***. Zagreb: Kineziološki fakultet.
  - Heimer, S. i sur. (1997). ***Praktikum kineziološke fizijologije***. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
  - Ostrow, A.C. (1996). ***Directory of Psychological Tests in the Sport and Exercise Sciences***. Morgantown, WV: Fitness Information Technology.

### Konstrukcija mjernog instrumenta

- U slučajevima kada ne postoji test za utvrđivanje razvijenosti željenog predmeta mjerjenja ili postojeći testovi nisu dostupni, potrebno je konstruirati novi mjerni instrument. Konstrukcija novog mjernog instrumenta provodi se kroz sljedeće faze:
- definiranje predmeta mjerjenja
  - odabir odgovarajućeg tipa mjernog instrumenta
  - izbor podražajnih situacija
  - standardizacija mjernog postupka
  - utvrđivanje metrijskih karakteristika.
- **Definiranje predmeta mjerjenja** podrazumijeva jasno određenje svojstva entiteta koje se želi mjeriti. Pri tome je potrebno ustanoviti da li je željeno svojstvo manifestno, tj. može li se izravno mjeriti ili je latentno, tj. potrebno ga je indirektno procijeniti.
- **Odabir odgovarajućeg tipa mjernog instrumenta** vrši se ovisno o predmetu mjerjenja, planiranim objektima mjerjenja te raspoloživim mjeriteljima, vremenu, materijalnim i financijskim sredstvima.
- **Izbor podražajnih situacija** podrazumijeva primjerice definiranje pitanja testa tipa «papir-olovka», motoričkog zadatka čija će se izvedba mjeriti, situacije i kriterija za subjektivnu procjenu mjeritelja, itd.

## 15. Uvod u kineziometriju

- ▶ **Standardizacija mjernog postupka** obuhvaća definiranje svih podataka nužnih za ispravno korištenje mjernog instrumenta kao što su primjerice:
  - naziv i šifra mjernog instrumenta
  - tehnički opis, odnosno konstrukcijske karakteristike
  - opis postupka mjerjenja
  - uputa ispitaniku i
  - način određivanja rezultata ispitanika.
- ▶ Nakon konstrukcije preliminarne forme mjernog instrumenta potrebno je testirati njegovu djelotvornost, odnosno **utvrditi metrijske karakteristike**. Metrijske karakteristike su:
  - pouzdanost
  - objektivnost
  - homogenost
  - valjanost
  - osjetljivost.

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). **Kvantitativne metode**. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 260-273.
- ▶ Mejovšek, M. (2003). **Uvod u metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima**. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 35-48.

## 15. Uvod u kineziometriju

### Pitanja i zadaci

1. Predmet mjerjenja je...

- a) ... mjerni instrument.
- b) ... mjerna skala čiji se tip određuje mjerjenjem.
- c) ... entitet ili ispitnik čija se svojstva utvrđuju mjerjenjem.
- d) ... svojstvo objekta mjerjenja čija se razvijenost utvrđuje mjerjenjem.

2. Prema nominalnoj mjernoj skali je moguće...

- a) ... objekte mjerena rangirati prema razvijenosti mjerjenog svojstva.
- b) ... entitete klasificirati u dva ili više disjunktnih skupova ravnopravne vrijednosti.
- c) ... predmete mjerena bodovati sukladno razvijenosti kvantitativnog obilježja.
- d) ... mjerne instrumente rangirati prema upotrebnoj vrijednosti.

3. U kinezilogiji se koriste sljedeći tipovi mjernih instrumenata:

- a) «papir-olovka», «aparatura za mjerjenje», «primjena motoričkog zadatka» i «subjektivna procjena mjeritelja».
- b) «papir-olovka», «aparatura za motoričke zadatke», «primjena motorike» i «subjektivna procjena mjeritelja».
- c) «papir-olovka», «aparatura za mjerjenje», «primjena motoričkog zadatka» i «objektivna procjena mjeritelja».
- d) «papir-olovka», «aparatura za mjerjenje», «primjena motoričke sposobnosti» i «subjektivna procjena mjeritelja».

4. Medicinskom vagom je utvrđeno da je Markova tjelesna masa 84 kilograma. U ovom mjerenu objekt mjerjenja je...

- a) ... medicinska vaga.
- b) ... tjelesna masa.
- c) ... Marko.
- d) ... skala kilograma.

5. Standardizirani postupak mjerjenja je...

- a) ... skup jedinstvenih pravila za korištenje svim mjernim instrumentima od strane mjeritelja.
- b) ... skup jedinstvenih pravila namijenjenih objektu mjerjenja za postizanje maksimalnih rezultata u svim testovima.
- c) ... precizan opis svih objekata mjerena i načina njihova sortiranja.
- d) ... precizan opis svih postupaka i uvjeta u kojima se provodi mjerjenje nekim mjernim instrumentom te načina bodovanja i vrednovanja dobivenih rezultata.

6. Test znanja iz Kvantitativnih metoda koji se polaze putem računala je primjer...

- a) ... testa tipa «subjektivna procjena mjeritelja».
- b) ... testa tipa «papir-olovka».
- c) ... testa tipa «računalo-miš».
- d) ... testa tipa «znaš - ne znaš».

7. Zadnja faza konstrukcije mjernog instrumenta je...

- a) ... standardizacija mjernog postupka.
- b) ... izbor podražajnih situacija.
- c) ... utvrđivanje metrijskih karakteristika.
- d) ... odabir aparature za mjerjenje.

8. Koji je od navedenih primjer omjerne mjerne skale?

- a) skala dvije kategorije: 1. nije pristupio testu Skok udalj s mjesta, 2. pristupio testu Skok udalj s mjesta
- b) skala standardiziranih rezultata u testu Skok udalj s mjesta
- c) skala rangova u testu Skok udalj s mjesta
- d) skala originalnih rezultata u testu Skok udalj s mjesta

9. Što od navedenog ne spada u standardizirani postupak mjerjenja?

- a) naziv mjernog instrumenta
- b) opis postupka mjerjenja
- c) opis postupka obrade podataka
- d) način određivanja rezultata ispitnika

## Pitanja i zadaci

10. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Mjerenje je postupak kojim se entitetima pridružuju brojevi ili oznake sukladno razvijenosti mjerene svojstva odnosno predmeta mjerena.
- b) Mjerenje je utvrđivanje položaja objekta mjerena na nekoj od mjernih skala sukladno razvijenosti predmeta mjerena.
- c) Mjerenje je pridruživanje numeričke ili nenumeričke vrijednosti objektu mjerena sukladno razvijenosti predmeta mjerena, a poštujući standardizirani postupak mjerena.
- d) Mjerenje je određivanje mjerne skale kojom je moguće opisati mjereno svojstvo objekta mjerena.

11. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Ako Mladen na nekoj intervalnoj skali ima vrijednost 4, a Dinko vrijednost 2, to znači da je Mladenov rezultat dva puta veći od Dinkovog.
- b) Ako Darija na nekoj intervalnoj skali ima vrijednost 4, a Vedran vrijednost 2, to znači da je Darijin rezultat veći za 2.
- c) Ako Marko na nekoj omjernoj skali ima vrijednost 4, a Mirko vrijednost 2, to znači da je Markov rezultat veći za 2.
- d) Ako Matija na nekoj omjernoj skali ima vrijednost 4, a Ivan vrijednost 2, to znači da je Matijin rezultat dva puta veći od Ivanovog.

12. Koji je od navedenih primjer ordinalne mjerne skale?

- a) skala dvije kategorije: 1. nije pristupio testu *Skok udalj s mjesta*, 2. pristupio testu *Skok udalj s mjesta*
- b) skala rangova u testu *Skok udalj s mjesta*
- c) skala standardiziranih rezultata u testu *Skok udalj s mjesta*
- d) skala originalnih rezultata u testu *Skok udalj s mjesta*

13. Koja od navedenih nije mjerna skala?

- a) nominalna mjerna skala
- b) ordinalna mjerna skala
- c) sumarna mjerna skala
- d) omjerna mjerna skala

14. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Vrijednost nula na intervalnoj mjernoj skali opisuje potpuno odsustvo mjerene svojstva.
- b) Vrijednost nula na omjernoj mjernoj skali opisuje potpuno odsustvo mjerene svojstva.
- c) Ako neki entitet ima vrijednost na ordinalnoj skali 4 to znači da se za 3 ranga razlikuje od onih entiteta koji imaju vrijednost 1.
- d) Ako neki entitet ima oznaku na nominalnoj skali G to znači da sigurno nema oznaku H.

15. Mjeritelj je...

- a) ... osoba školovana za provođenje mjerena.
- b) ... osoba koju se mjeri.
- c) ... objekt mjerena.
- d) ... predmet mjerena.

16. Pri provođenju mjerena, čitanje upute ispitaniku je obavezno ako...

- a) ... se ispitanik prvi put susreće s takvim testom.
- b) ... tako nalaže standardizirani postupak mjerena.
- c) ... su ispitanici odrasle osobe.
- d) ... su ispitanici djeca.

17. Kineziometrija je znanstvena disciplina koja proučava...

- a) ... probleme konstrukcije, evaluacije i primjene mjernih instrumenata za procjenu kinezioloških fenomena.
- b) ... probleme kontribucije, evolucije i primjene mjernih svojstava za procjenu kinezioloških fenomena.
- c) ... probleme prikupljanja, uređivanja, analize i grafičkog prikazivanja podataka u kineziologiji.
- d) ... multivarijatne metode obrade podataka za potrebe kineziologije.

18. Objekt mjerena je...

- a) ... svojstvo čija se razvijenost utvrđuje mjerjenjem.
- b) ... mjerni instrument.
- c) ... mjerna skala čiji se tip određuje mjerjenjem.
- d) ... entitet čija se svojstva utvrđuju mjerjenjem.

## Pitanja i zadaci

19. Kvalitativne mjerne skale su...

- a) ... nominalna i ordinalna merna skala.
- b) ... intervalna i ordinalna merna skala.
- c) ... intervalna i sumarna merna skala.
- d) ... nominalna i omjerna merna skala.

20. Prema rezultatu na ordinalnoj mjernoj skali moguće je tvrditi...

- a) ... koliko je puta ispitanik bolji od nekog drugog ispitanika.
- b) ... da li je ispitanik bolji ili lošiji od nekog drugog ispitanika.
- c) ... koliko je puta ispitanik lošiji od nekog drugog ispitanika.
- d) ... koliko je puta ispitanik bolji ili lošiji od nekog drugog ispitanika.

21. Koji je od navedenih primjer intervalne mjerne skale?

- a) skala standardiziranih rezultata u testu Skok udalj s mjesta
- b) skala rangova u testu Skok udalj s mjesta
- c) skala originalnih rezultata u testu Skok udalj s mjesta
- d) skala dvije kategorije: 1. nije pristupio testu Skok udalj s mjesta, 2. pristupio testu Skok udalj s mjesta

22. Pravilnik za sudjenje u sportskoj gimnastici je primjer...

- a) ... testa tipa «papir-olovka».
- b) ... standardiziranog postupka mjerjenja.
- c) ... omjerne mjerne skale.
- d) ... testa tipa «subjektivna procjena mjeritelja».

23. Prema podatku na nominalnoj mjernoj skali moguće je odrediti...

- a) ... kojoj grupi ispitanik pripada.
- b) ... koliki je rang ispitanika.
- c) ... koliko je ispitanika postiglo bolji ili lošiji rezultat od ispitanika.
- d) ... koliko je puta ispitanik bolji od nekog drugog ispitanika.

24. Koji bi od navedenih pojmove mogao biti predmet mjerjenja?

- a) osvijetljenost dvorane
- b) rukometna utakmica
- c) poluvrijeme
- d) rukometna lopta

25. Koja je od navedenih tvrdnji točna? Mjerni instrument ili test obvezno čine...

- a) ... tehnička oprema potrebna za mjerjenje, jedan ili više mjeritelja i standardizirani postupak mjerjenja.
- b) ... pitanja ili zadaci.
- c) ... merna skala, jedan ili više objekata mjerjenja i predmet mjerjenja.
- d) ... aparati predviđeni za provođenje mjerjenja, tj. bilježenje informacija o ispitanicima.

26. Prva faza konstrukcije mjernog instrumenta je...

- a) ... definiranje predmeta mjerjenja.
- b) ... izbor podražajnih situacija.
- c) ... utvrđivanje metrijskih karakteristika.
- d) ... odabir aparature za mjerjenje.

27. Kvantitativne mjerne skale su...

- a) ... intervalna i omjerna merna skala.
- b) ... ordinalna i omjerna merna skala.
- c) ... sumarna i intervalna merna skala.
- d) ... kvartilna i sumarna merna skala.

28. Koji je od navedenih primjer nominalne mjerne skale?

- a) skala dvije kategorije: 1. nije pristupio testu Skok udalj s mjesta, 2. pristupio testu Skok udalj s mjesta
- b) skala standardiziranih rezultata u testu Skok udalj s mjesta
- c) skala rangova u testu Skok udalj s mjesta
- d) skala originalnih rezultata u testu Skok udalj s mjesta

### Pitanja i zadaci

29. Mjerna skala je...

- a) ... skup oznaka ili niz brojeva kojima je moguće opisati razvijenost mjerenoj svojstva nekog objekta mjerena.
- b) ... mjerni instrument kojim je moguće skalirati entitete.
- c) ... skup numeričkih ili nenumeričkih vrijednosti kojima je opisano izmjereno stanje nekog objekta mjerena.
- d) ... mjerni instrument kojim je moguće izmjeriti određenu kvantitativnu ili kvalitativnu karakteristiku entiteta.

30. Prema rezultatu na intervalnoj mjernoj skali nije moguće tvrditi...

- a) ... koliko je puta ispitanik lošiji od nekog drugog ispitanika.
- b) ... da li je ispitanik bolji ili lošiji od nekog drugog ispitanika.
- c) ... koliko se rezultat ispitanika razlikuje od rezultata nekog drugog ispitanika.
- d) ... koliko se rezultat ispitanika razlikuje od nule.

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15

# **16** Metrijske karakteristike I.

17  
18  
19  
20

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

#### **Klasični model mjerena**

- sistematski faktori
- sistematska pogreška mjerena
- nesistematski faktori
- slučajna pogreška mjerena
- paralelni testovi
- kompozitni mjerni instrument
- čestice u testovima tipa «papir-olovka»
- čestice u testovima tipa «primjena motoričkog zadatka» i «aparatura za mjerjenje»
- čestice u testovima tipa «subjektivna procjena mjeritelja»
- bruto rezultat
- pravi rezultat
- odnos bruto rezultata, pravog rezultata i slučajne pogreške mjerena
- aritmetička sredina varijable slučajnih pogrešaka mjerena
- distribucija varijable slučajnih pogrešaka mjerena
- odnos aritmetičke sredine bruto rezultata i pravog rezultata ispitnika
- nezavisnost varijable slučajnih pogrešaka mjerena
- utjecaj udjela pravih rezultata u bruto rezultatu na korelaciju između paralelnih testova

#### **Pouzdanost**

- odnos pouzdanosti i slučajnih pogrešaka mjerena
- test-retest metoda
- metoda tau-ekvivalentnih testova
- metoda interne konzistencije
- kondenzacija originalnih rezultata aritmetičkom sredinom
- kondenzacija standardiziranih rezultata aritmetičkom sredinom
- kondenzacija čestica prvom glavnom komponentom

- Cronbachov koeficijent
- Spearman-Brownov koeficijent
- Kaiser-Caffreyev koeficijent

### STATISTICA

#### **Test-retest i metoda tau-ekvivalentnih testova**

- utvrđivanje pouzdanosti test-retest metodom
- utvrđivanje pouzdanosti metodom tau-ekvivalentnih testova

#### **Kondenzacija originalnih rezultata aritmetičkom sredinom**

#### **Kondenzacija standardiziranih rezultata aritmetičkom sredinom**

#### **Izračunavanje Cronbachovog i SB koeficijenta pouzdanosti**

#### **Kondenzacija čestica prvom glavnom komponentom**

#### **Utvrđivanje prve svojstvene vrijednosti u svrhu izračunavanja Kaiser-Caffreyevog koeficijenta pouzdanosti**

## 16. Metrijske karakteristike I.

### Klasični model mjerena

- ▶ U mjernom postupku, osim predmeta mjerena, na rezultate mogu djelovati i sistematski i nesistematski faktori.
- ▶ **Sistematski faktori** uzrokuju **sistematsku pogrešku**, odnosno jednakodstupanje rezultata svakog entiteta od njegovog pravog rezultata. Primjerice, neka nebaždarena vaga može sistematski umanjivati tjelesnu masu ispitanika za 1 kg.
- ▶ **Nesistematski faktori** uzrokuju **slučajne pogreške**, odnosno slučajna odstupanja rezultata mjerena od pravih rezultata entiteta. Primjerice, mjeritelj u testu poligon natraške može nekad prerano, a nekad prekasno zaustaviti štopericu.
- ▶ **Klasični model mjerena** se temelji na prepostavci o postojanju **paralelnih testova**, odnosno mjernih instrumenata koji mjere isti predmet mjerena, a čijom bi se primjenom na određenoj populaciji entiteta utvrdile jednakе aritmetičke sredine, standardne devijacije i interkorelacije (međusobne korelacije testova).
- ▶ Paralelnim testovima se mogu smatrati i dvije ili više primjena istog mjernog instrumenta, kao i čestice kompozitnog mjernog instrumenta.
- ▶ **Kompozitni mjerni instrument** se sastoji od tri ili više čestica, a koje mogu biti: pitanja/zadaci (test tipa «papir-olovka»), uzastopna mjerena (test tipa «aparatura za mjerenu» ili «primjena motoričkog zadatka») i mjeritelji/suci (test tipa «subjektivna procjena mjeritelja»).

**Tablica:** Matrica rezultata  $n$  ispitanika izmjerena s  $m$  paralelnih testova

	1	2	.	.	.	$m$	$\bar{x}_a$	$s$
a	$x_{a1}=t_{a1}+e_{a1}$	$x_{a2}=t_{a2}+e_{a2}$	.	.	.	$x_{am}=t_{am}+e_{am}$	$\bar{x}_a$	$s_a$
b	$x_{b1}=t_{b1}+e_{b1}$	$x_{b2}=t_{b2}+e_{b2}$	.	.	.	$x_{bm}=t_{bm}+e_{bm}$	$\bar{x}_b$	$s_b$
.	.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.	.			
$n$	$x_{n1}=t_{n1}+e_{n1}$	$x_{n2}=t_{n2}+e_{n2}$	.	.	.	$x_{nm}=t_{nm}+e_{nm}$	$\bar{x}_n$	$s_n$
$\bar{x}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	.	.	.	$\bar{x}_m$		
$\sigma$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	.	.	.	$\sigma_m$		

- ▶ Razultat svakog mjerena, tzv. bruto rezultat ( $x$ ), zavisi o veličini predmeta mjerena, budući da u sebi sadrži veličinu predmeta mjerena, tj. pravi rezultat ( $t$ ), i o slučajnoj pogrešci ( $e$ ) koja ga nesistematski mijenja, pri čemu je

$$x = t + e$$

## 16. Metrijske karakteristike I.

- Predmet mjerena je stabilan u vremenu pa je stoga pravi rezultat jednog ispitanika u svim paralelnim testovima jednak.

$$\begin{aligned}t_{a1} &= t_{a2} = \dots = t_{aj} = \dots = t_{am} \\t_{b1} &= t_{b2} = \dots = t_{bj} = \dots = t_{bm} \\&\dots \\t_{i1} &= t_{i2} = \dots = t_{ij} = \dots = t_{im} \\&\dots \\t_{n1} &= t_{n2} = \dots = t_{nj} = \dots = t_{nm}\end{aligned}$$

- Aritmetička sredina slučajnih pogrešaka ( $e$ ) u svakom je paralelnom testu jednaka 0, a distribucija im je normalna.
- Iz navedenih pretpostavki može se zaključiti da će:

- aritmetičke sredine i standardne devijacije paralelnih testova izračunatih na nekoj populaciji ispitanika biti jenake,

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_j = \dots = \bar{x}_m \\\bar{\sigma}_1 &= \bar{\sigma}_2 = \dots = \bar{\sigma}_j = \dots = \bar{\sigma}_m\end{aligned}$$

- aritmetičke sredine i standardne devijacije pravih rezultata paralelnih testova izračunatih na nekoj populaciji biti jenake,

$$\begin{aligned}\bar{x}_{t1} &= \bar{x}_{t2} = \dots = \bar{x}_{tj} = \dots = \bar{x}_{tm} \\\bar{\sigma}_{t1} &= \bar{\sigma}_{t2} = \dots = \bar{\sigma}_{tj} = \dots = \bar{\sigma}_{tm}\end{aligned}$$

- aritmetičke sredine komponenti pogrešaka za svakog ispitanika izračunate iz beskonačnog broja paralelnih testova biti jenake nuli,

$$\bar{x}_{ea} = \bar{x}_{eb} = \dots = \bar{x}_{ei} = \dots = \bar{x}_{en} = 0$$

- aritmetičke sredine bruto rezultata za svakog ispitanika izračunate iz beskonačnog broja paralelnih testova biti jenake njegovom pravom rezultatu.

$$\bar{x}_i = t_{i1} = t_{i2} = \dots = t_{ij} = \dots = t_{im}$$

## 16. Metrijske karakteristike I.

- ▶ Uz pretpostavku da komponente pogreške mjerena variraju posve slučajno, odnosno potpuno nesustavno može se zaključiti i sljedeće:
  - korelacija između varijabli pogrešaka bilo koja dva paralelna testa bit će jednaka nuli,
  - korelacija između varijable pogrešaka i varijable pravih rezultata istog paralelnog testa bit će jednaka nuli,
  - korelacija između varijable pogrešaka i varijable pravih rezultata bilo kojeg drugog paralelnog testa bit će jednaka nuli.
- ▶ Ako se uvaže navedene pretpostavke da su:
  - pogreške mjerena međusobno nezavisne,
  - pravi rezultati i pogreške mjerena istog testa međusobno nezavisni i
  - pravi rezultati jednog testa nezavisni od pogrešaka mjerena bilo kojeg drugog testa,moguće je zaključiti da će korelacija između paralelnih testova biti veća što je u bruto rezultatima udio slučajnih pogrešaka mjerena manji, odnosno što je udio pravih rezultata mjerena veći.

### Pouzdanost

- ▶ **Pouzdanost** mjernog instrumenta je nezavisnost mjerena od nesistematskih, tj. slučajnih pogrešaka.
- ▶ Pouzdanost mjernog instrumenta može se kretati u intervalu od 0 do 1 pri čemu 1 označava potpuno odsustvo slučajne pogreške mjerena.
- ▶ Pouzdanost se može utvrditi:
  - test-retest metodom
  - metodom tau-ekvivalentnih testova
  - metodom interne konzistencije.
- ▶ **Test-retest metoda** podrazumijeva primjenu mjernog instrumenta na istoj grupi ispitanika u dva navrata, pri čemu se koeficijentom pouzdanosti smatra korelacija između rezultata prvog i ponovljenog mjerena. Period između testa i retesta mora biti dovoljno dug da prvo mjerene ne utječe na drugo (npr. odgovaranje prema sjećanju, upala mišića od prethodnog testiranja), odnosno dovoljno kratak da se razvijenost predmeta mjerena ne promijeni.

## 16. Metrijske karakteristike I.

- ▶ **Metoda tau-ekvivalentnih testova** podrazumijeva primjenu dva mjerna instrumenta, koji su slični po sadržaju, broju i obliku zadataka, na istoj grupi ispitanika, pri čemu se koeficijentom pouzdanosti smatra korelacija između rezultata primjenjenih testova. Vrijednost koeficijenta pouzdanosti utvrđenog ovom metodom je nešto niža od stvarne pouzdanosti testa jer se korištenjem tau-ekvivalentnih testova u određenoj mjeri ipak aktiviraju ponešto različiti predmeti mjerjenja.
- ▶ **Metoda interne konzistencije** se koristi za utvrđivanje pouzdanosti kompozitnih mjernih instrumenata, a temelji se na pretpostavci da su sve čestice testa međusobno paralelni testovi. Koeficijenti pouzdanosti koji se utvrđuju metodom interne konzistencije odabiru se s obzirom na način kondenzacije rezultata.
- ▶ **Kondenzacija rezultata** je izračunavanje ukupnog rezultata ispitanika na temelju pripadajućih rezultata u česticama testa.

**Tablica:** Načini kondenzacije rezultata i odgovarajući koeficijenti pouzdanosti

kondenzacija rezultata	koeficijent pouzdanosti
jednostavnom linearном kombinacijom originalnih rezultata	Cronbachova $\alpha$
jednostavnom linearnom kombinacijom standardiziranih rezultata	standardizirana ili Spearman-Brownova $\alpha$
prvom glavnom komponentom	Kaiser-Caffreyeva $\alpha$

- ▶ **Cronbachov koeficijent pouzdanosti** ( $\alpha_{Cronbach}$ ) se izračunava formulom:

$$\alpha_{Cronbach} = \frac{m}{m-1} \left( 1 - \frac{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2}{\sigma^2} \right)$$

gdje je

- $m$  - broj čestica testa
- $\sigma_j^2$  - varijanca čestice  $j$
- $\sigma^2$  - varijanca testa

## 16. Metrijske karakteristike I.

**Primjer:** Izračunavanje Cronbachovog koeficijenta pouzdanosti.

ISP.	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X
1	70	115	115	300
2	150	145	142	437
3	100	120	122	342
4	120	92	100	312
5	105	82	87	274
6	94	116	117	327
7	120	100	105	325
8	60	70	76	206
9	99	104	105	308
10	100	110	108	318
$\bar{x}$	101,80	105,40	107,70	314,90
$\sigma^2$	647,73	446,49	336,46	3301,21

$$\alpha_{Cronbach} = \frac{m}{m-1} \left( 1 - \frac{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2}{\sigma^2} \right)$$

$$\alpha_{Cronbach} = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{647,73 + 446,49 + 336,46}{3301,21} \right)$$

$$\alpha_{Cronbach} = 0,85$$

► **Spearman-Brownov koeficijent pouzdanosti** (SB) se izračunava formulom:

$$SB = \frac{m}{m-1} \left( 1 - \frac{m}{\sigma^2} \right)$$

gdje je

- m - broj čestica testa
- $\sigma^2$  - varijanca testa.

**Primjer:** izračunavanje Spearman-Brownovog koeficijenta pouzdanosti.

ISP.	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>	z <sub>3</sub>	z
1	-1,249	0,454	0,398	-0,397
2	1,894	1,874	1,870	5,638
3	-0,071	0,691	0,780	1,400
4	0,715	-0,634	-0,420	-0,339
5	0,126	-1,107	-1,129	-2,110
6	-0,306	0,502	0,507	0,702
7	0,715	-0,256	-0,147	0,312
8	-1,642	-1,675	-1,728	-5,046
9	-0,110	-0,066	-0,147	-0,323
10	-0,071	0,218	0,016	0,163
$\bar{x}$	0	0	0	0
$\sigma^2$	1	1	1	7,180

$$SB = \frac{m}{m-1} \left( 1 - \frac{m}{\sigma^2} \right)$$

$$SB = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{3}{7,180} \right)$$

$$SB = 0,87$$

## 16. Metrijske karakteristike I.

- **Kaiser-Caffreyev koeficijent pouzdanosti** ( $\alpha_{Kaiser-Caffrey}$ ) se izračunava formulom:

$$\alpha_{Kaiser-Caffrey} = \frac{m}{m-I} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

gdje je

- $m$  - broj čestica testa
- $\lambda_1$  - prva svojstvena vrijednost matrice korelacije među česticama.

**Primjer:** izračunavanje Kaiser-Caffreyevog koeficijenta pouzdanosti.

ISP.	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$k_1$
1	-1,249	0,454	0,398	<b>-0,046</b>
2	1,894	1,874	1,870	<b>2,078</b>
3	-0,071	0,691	0,780	<b>0,565</b>
4	0,715	-0,634	-0,420	<b>-0,199</b>
5	0,126	-1,107	-1,129	<b>-0,853</b>
6	-0,306	0,502	0,507	<b>0,308</b>
7	0,715	-0,256	-0,147	<b>0,061</b>
8	-1,642	-1,675	-1,728	<b>-1,865</b>
9	-0,110	-0,066	-0,147	<b>-0,119</b>
10	-0,071	0,218	0,016	<b>0,071</b>
$\bar{x}$	0	0	0	0
$\sigma^2$	1	1	1	2,420

$$\alpha_{Kaiser-Caffrey} = \frac{m}{m-I} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

$$\alpha_{Kaiser-Caffrey} = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{2,42} \right)$$

$$\alpha_{Kaiser-Caffrey} = 0,88$$

### Postupci:

- ▶ **Test-retest i metoda tau-ekvivalentnih testova:** Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije (koji se u ovim slučajevima smatra koeficijentom pouzdanosti) izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Correlation matrices*.
- ▶ **Kondenzacija originalnih rezultata aritmetičkom sredinom:** Kondenzacija rezultata aritmetičkom sredinom izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Statistics of Block Data* → *Block Rows* → *Means*. Prije opisanog postupka je potrebno u matrici podataka označiti željene varijable.
- ▶ **Kondenzacija standardiziranih rezultata aritmetičkom sredinom:** Izračunavanje z-vrijednosti izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Edit* → *Fill/Standardize Block* → *Standardize Columns*. Kondenzacija prethodno standardiziranih rezultata aritmetičkom sredinom izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Statistics of Block Data* → *Block Rows* → *Means*. Prije oba postupka je potrebno u matrici podataka označiti željene varijable.
- ▶ **Izračunavanje Cronbachovog i SB koeficijenta pouzdanosti:** Izračunavanje Cronbachovog koeficijenta pouzdanosti (*Cronbach's alpha*) i Spearman-Brownovog koeficijenta pouzdanosti (*Standardized alpha*) izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Multivariate Exploratory Techniques* → *Reliability/Item analysis*. Prije izračunavanja pouzdanosti potrebno je odabratи čestice testa putem dijaloškog okvira *Variables*.
- ▶ **Kondenzacija čestica prvom glavnom komponentom:** Kondenzacija rezultata na prvu glavnu komponentu provodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Multivariate Exploratory Techniques* → *Factor analysis*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *Variables* potrebno je označiti željene čestice testa. Nakon odabira čestica u dijaloškom okviru *Advanced* potrebno je označiti opciju *Principal components* i definirati kriterij za redukciju broja glavnih komponenata na način da se u polje *Max. no. of factors* unese vrijednost 1. Nakon potvrde unesenog kriterija za redukciju broja glavnih komponenata moguće je pregledati kondenzirane rezultate ispitanika na prvoj glavnoj komponenti (*Scores* → *Factor scores*).
- ▶ U programu STATISTICA ne postoji automatizirana procedura za izračunavanje Kaiser-Caffreyevog koeficijenta pouzdanosti pa je u tu svrhu nakon prethodno opisanog postupka potrebno izračunati prvu svojstvenu vrijednost (*Explained variance* → *Eigenvalues*) te je uvrstiti u formulu za izračunavanje Kaiser-Caffreyevog koeficijenta pouzdanosti.

## 16. Metrijske karakteristike I.

### Zadaci:

- ▶ U datoteci *POD.sta* test-retest metodom utvrdite pouzdanost testa *MPUS*!
  - ▶ Pretpostavimo da su testovi *TAPRUK* i *TRNMRZ* datoteke *TR10M.sta* tau-ekvivalentni testovi. Utvrdite pouzdanost testa *TAPRUK*!
  - ▶ U datoteci *GIM.sta* izvršite kondenzaciju originalnih rezultata čestica testa *FEBML* aritmetičkom sredinom!
  - ▶ U datoteci *GIM.sta* izvršite kondenzaciju standardiziranih rezultata čestica testa *FEBML* aritmetičkom sredinom!
  - ▶ U datoteci *GIM.sta* izračunajte Cronbachov koeficijent pouzdanosti i Spearman-Brownov koeficijent pouzdanosti za test *FEBML*!
  - ▶ Pokrenite datoteku *GIM.sta*! Kondenzirajte čestice testa *FLPRR* prvom glavnom komponentom! Izračunajte Kaiser-Caffreyev koeficijent pouzdanosti testa *FLPRR*!
- 

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 274-293.
- ▶ Mejovšek, M. (2003). *Uvod u metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 55-63, 123-139.

## 16. Metrijske karakteristike I.

### Pitanja i zadaci

1. U datoteci *GIM.sta* kondenzirajte čestice testa *FEDSM* aritmetičkom sredinom standardiziranih rezultata! Koliko iznosi kondenzirani rezultat ispitanika u devetom retku matrice podataka?

- a) 99
- b) -0,18
- c) 98
- d) 0,21

2. Koji je odgovarajući koeficijent pouzdanosti kompozitnog mjernog instrumenta ako se vrši kondenzacija aritmetičkom sredinom standardiziranih rezultata?

- a) Pearsonov koeficijent
- b) Cronbachov koeficijent
- c) Spearman-Brownov koeficijent
- d) Kaiser-Caffreyev koeficijent

3. Pokrenite datoteku *POD.sta*! Kolika je pouzdanost testa *MDM* ako je *MDM\_I* varijabla prvog mjerjenja (testa), a *MDM\_F* varijabla drugog mjerjenja (retesta)!

- a) 0,88
- b) 0,86
- c) 0,83
- d) 0,81

4. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Slučajne pogreške dva paralelna testa su međusobno nezavisne.
- b) Slučajne pogreške jednog testa i pravi rezultati drugog testa su međusobno nezavisni.
- c) Slučajne pogreške jednog testa i bruto rezultati drugog testa su međusobno nezavisni.
- d) Bruto rezultati dva paralelna testa su međusobno nezavisni.

5. Pokrenite datoteku *GIM.sta*! Kondenzirajte originalne rezultate ispitanika u česticama testa *BASKUO* aritmetičkom sredinom! Koliko iznosi odgovarajući koeficijent pouzdanosti?

- a) 0,645
- b) 0,648
- c) 0,656
- d) 0,636

6. Pouzdanost mjernog instrumenta je nezavisnost mjerjenja od...

- a) ... sistematskih pogrešaka.
- b) ... nesistematskih pogrešaka.
- c) ... pravih rezultata.
- d) ... predmeta mjerjenja.

7. Ako se test-retestom želi utvrditi pouzdanost mjernog instrumenta, koja je od navedenih postavki ispravna?

- a) Period između testa i retesta mora biti dovoljno dug da prvo mjerjenje ne utječe na drugo i dovoljno kratak da se razvijenost predmeta mjerjenja ne promjeni.
- b) Period između testa i retesta mora biti dovoljno kratak da prvo mjerjenje utječe na drugo i dovoljno dug da se razvijenost predmeta mjerjenja promjeni.
- c) Period između testa i retesta mora biti dovoljno dug da prvo mjerjenje ne utječe na drugo i dovoljno dug da se razvijenost predmeta mjerjenja promjeni.
- d) Period između testa i retesta mora biti dovoljno kratak da prvo mjerjenje utječe na drugo i dovoljno kratak da se razvijenost predmeta mjerjenja ne promjeni.

8. Prema klasičnom modelu mjerjenja aritmetička sredina bruto rezultata beskonačno mnogo entiteta neke populacije u bilo kojem testu uvijek je jednaka...

- a) ... aritmetičkoj sredini slučajnih pogrešaka svih rezultata.
- b) ... 0.
- c) ... aritmetičkoj sredini pravih rezultata mjerjenih entiteta.
- d) ... 1.

9. Koliki je Cronbachov koeficijent pouzdanosti testa *FEBML* datoteke *GIM.sta*?

- a) 0,758
- b) 0,761
- c) 0,529
- d) 0,765

## 16. Metrijske karakteristike I.

### Pitanja i zadaci

10. Čestice kompozitnog mjernog instrumenta tipa «aparatura za mjerjenje» su...

- a) ... uzastopna mjerena.
- b) ... različiti objekti mjerena.
- c) ... različiti mjeritelji.
- d) ... više međusobno različitih aparatura za mjerjenje.

11. Koji je odgovarajući koeficijent pouzdanosti kompozitnog mjernog instrumenta ako se vrši kondenzacija aritmetičkom sredinom originalnih rezultata?

- a) Spearman-Brownov koeficijent
- b) Kaiser-Caffreyev koeficijent
- c) Pearsonov koeficijent
- d) Cronbachov koeficijent

12. Koliki je Kaiser-Caffreyev koeficijent pouzdanosti testa BASKUO datoteke GIM.sta?

- a) 0,65
- b) 0,64
- c) 0,61
- d) 0,38

13. U datoteci GIM.sta kondenzirajte čestice testa BFPTAP prvom glavnom komponentom! Koliko iznosi kondenzirani rezultat ispitanika u trećem retku matrice podataka?

- a) 20,67
- b) 0,36
- c) 20,74
- d) -0,32

14. Koliko iznosi slučajna pogreška ako je pravi rezultat 15, a bruto rezultat 4?

- a) 11
- b) 60
- c) -11
- d) 3,75

15. Kompozitni mjerni instrumenti su...

- a) ... testovi sastavljeni od više čestica mjerena.
- b) ... različiti testovi koji mjere jedan te isti predmet mjerjenja.
- c) ... testovi bez sistematske pogreške.
- d) ... testovi bez nesistematske pogreške.

16. Kako se nazivaju slučajna odstupanja rezultata mjerjenja od pravog rezultata?

- a) slučajne pogreške
- b) slučajne razlike
- c) sistematske pogreške
- d) sistematske razlike

17. Čestice kompozitnog mjernog instrumenta tipa «subjektivna procjena mjeritelja» su...

- a) ... više međusobno različitih motoričkih zadataka.
- b) ... različiti objekti mjerena.
- c) ... različiti mjeritelji.
- d) ... više međusobno različitih kriterija za suđenje.

18. U datoteci GIM.sta kondenzirajte čestice testa FEBML aritmetičkom sredinom originalnih rezultata! Koliko iznosi kondenzirani rezultat ispitanika u petom retku matrice podataka?

- a) 193,33
- b) -0,34
- c) 0,39
- d) 196,66

19. Pokrenite datoteku GIM.sta! Kondenzirajte rezultate ispitanika u česticama testa FLPRR prvom glavnom komponentom! Koliko iznosi odgovarajući koeficijent pouzdanosti?

- a) 0,980
- b) 0,978
- c) 0,979
- d) 0,977

# 16. Metrijske karakteristike I.

## Pitanja i zadaci

20. Sistematska pogreška je...

- a) ... slučajno odstupanje rezultata mjerena od pravog rezultata.
- b) ... sistematska razlika između rezultata mjerena i standardne devijacije pravih rezultata svih entiteta.
- c) ... odstupanje rezultata mjerena od pravog rezultata koje je jednako za sve entitete.
- d) ... slučajna razlika između rezultata mjerena i standardne devijacije pravih rezultata svih entiteta.

21. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Test-rest metoda je metoda za utvrđivanje pouzdanosti.
- b) Test-rest metoda podrazumijeva primjenu mjernog instrumenta na istoj grupi ispitanika u dva navrata.
- c) Test-retest metoda podrazumijeva primjenu mjernog instrumenta na dvije grupe ispitanika u jednom mjerenu.
- d) Test-retest metoda podrazumijeva izračunavanje povezanosti rezultata testa i rezultata retesta.

22. Pokrenite datoteku *TESTZ.sta!* Kolika je pouzdanost testa *DALJM* uz pretpostavku da su *DALJM* i *DALJZ* tau-ekvivalentni testovi?

- a) 0,45
- b) 0,65
- c) 0,55
- d) 0,35

23. Koji je odgovarajući koeficijent pouzdanosti kompozitnog mjernog instrumenta ako se vrši kondenzacija čestica prvom glavnom komponentom?

- a) Spearman-Brownov koeficijent
- b) Kaiser-Caffreyev koeficijent
- c) Pearsonov koeficijent
- d) Cronbachov koeficijent

24. Čestice kompozitnog mjernog instrumenta tipa «papir-olovka su»...

- a) ... pitanja, odnosno zadaci.
- b) ... ponuđeni odgovori.
- c) ... različiti objekti mjerjenja.
- d) ... različiti mjeritelji.

25. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Paralelni testovi mjere jedan te isti predmet mjerena.
- b) Aritmetičke sredine paralelnih testova primjenjenih na određenoj populaciji entiteta bit će jednakе.
- c) Paralelni testovi mjere različite predmete mjerena.
- d) Standardne devijacije paralelnih testova primjenjenih na određenoj populaciji entiteta bit će jednakе.

26. Čestice kompozitnog mjernog instrumenta mogu se smatrati...

- a) ... sistematskim testovima.
- b) ... paralelnim testovima.
- c) ... nesistematskim testovima.
- d) ... ortogonalnim testovima.

27. Koliki je Spearman-Brownov koeficijent pouzdanosti testa *BFPTAP* datoteke *GIM.sta?*

- a) 0,90
- b) 0,88
- c) 0,77
- d) 0,80

28. Prema klasičnom modelu mjerena aritmetička sredina bruto rezultata nekog entiteta u beskonačno mnogo paralelnih testova uvijek je jednak...

- a) ... 0.
- b) ... njegovoj slučajnoj pogrešci.
- c) ... njegovom pravom rezultatu.
- d) ... aritmetičkoj sredini populacije kojoj pripada.

## 16. Metrijske karakteristike I.

### Pitanja i zadaci

29. Čestice kompozitnog mjernog instrumenta tipa «primjena motoričkog zadatka» su...

- a) ... više međusobno različitih motoričkih zadataka.
- b) ... različiti objekti mjerjenja.
- c) ... različiti mjeritelji.
- d) ... uzastopna mjerjenja.

30. Pokrenite datoteku GIM.sta! Kondenzirajte standardizirane rezultate ispitanika u česticama testa FEBML aritmetičkom sredinom! Koliko iznosi odgovarajući koeficijent pouzdanosti?

- a) 0,772
- b) 0,765
- c) 0,761
- d) 0,758

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16

# 17

*Metrijske karakteristike II.*

18  
19  
20

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

#### Objektivnost

- koeficijent objektivnosti
- način utvrđivanja objektivnosti kompozitnih mjernih instrumenata
- čimbenici o kojima zavisi objektivnost mjernog instrumenta

#### Homogenost

- koeficijent homogenosti
- prosječna korelacija među česticama

#### Osjetljivost

- procjena osjetljivosti mjernog instrumenta putem mjera varijabilnosti
- procjena osjetljivosti mjernog instrumenta putem obilježja distribucije rezultata

#### Dijagnostička valjanost

- apriorna valjanost
- faktorska valjanost
- načini utvrđivanja faktorske valjanosti

#### Prognostička valjanost

- jednog testa za jednodimenzionalni kvantitativni kriterij
- skupa testova za jednodimenzionalni kvantitativni kriterij
- skupa testova za višedimenzionalni kvantitativni kriterij
- jednog testa za jednodimenzionalni kvalitativni kriterij
- skupa testova za jednodimenzionalni kvalitativni kriterij

### STATISTICA

*Kondenzacija originalnih ocjena sudaca aritmetičkom sredinom*

*Kondenzacija standardiziranih ocjena sudaca aritmetičkom sredinom*

*Izračunavanje Cronbachovog i SB koeficijenta objektivnosti*

*Kondenzacija ocjena sudaca prvom glavnom komponentom*

*Utvrđivanje prve svojstvene vrijednosti u svrhu izračunavanja Kaiser-Caffreyevog koeficijenta objektivnosti*

*Izračunavanje prosječne korelacije među česticama*

*Utvrđivanje osjetljivosti mjernog instrumenta*

- izračunavanje mjera varijabilnosti i oblika distribucije rezultata
- iscrtavanje histograma frekvencija

*Faktorska valjanost - korelacija testa s referentnim testom*

*Faktorska valjanost - korelacija testa s prvom glavnom komponentom*

*Faktorska valjanost - korelacija testa s ciljanim faktorom*

### Objektivnost

- ▶ **Objektivnost** je mjerna karakteristika kojom se određuje nezavisnost rezultata mjerjenja od mjeritelja. Koeficijent objektivnosti se kreće u intervalu od 0 do 1, a vrijednost mu je to veća što je veći broj mjeritelja i što je veći stupanj slaganja između rezultata ispitanika utvrđenih od strane različitih mjeritelja.
- ▶ Postupak za utvrđivanje objektivnosti nekog mjerjenja u kome sudjeluje veći broj mjeritelja identičan je metodi interne konzistencije za utvrđivanje pouzdanosti kompozitnih mjernih instrumenata, pri čemu su čestice mjerena mjeritelji, odnosno suci.
- ▶ Objektivnost mjernog instrumenta zavisi o:
  - znanju i iskustvu mjeritelja/sudaca
  - nezavisnosti mjeritelja od okolnih distraktora
  - jednostavnosti predmeta mjerena
  - jednostavnosti pravila mjerena i kriterija za ocjenjivanje
  - jednoznačnosti pravila mjerena i kriterija za ocjenjivanje
  - tehnološkoj potpori mjeritelju pri mjerenu/ocjenjivanju.

### Homogenost

- ▶ **Homogenost** je mjerna karakteristika kompozitnih mjernih instrumenata koja pokazuje koliko rezultati ispitanika u svim česticama zavise od istog predmeta mjerjenja ili identične kombinacije različitih predmeta mjerena. Koeficijent homogenosti se kreće u intervalu od 0 do 1, a najčešće se utvrđuje izračunavanjem prosječne korelacije među česticama.
- ▶ **Prosječna korelacija među česticama** ( $\bar{r}$ ) se izračunava sljedećom formulom

$$\bar{r} = \frac{\sum_{j,k=1}^m r_{j,k}}{m}, j \neq k$$

gdje je

- $r$  - korelacija među česticama  $j$  i  $k$
- $m$  - broj čestica testa.

## 17. Metrijske karakteristike II.

**Primjer:** Izračunavanje prosječne korelacije među česticama

ISP.	$z_1$	$z_2$	$z_3$
1	-1,249	0,454	0,398
2	1,894	1,874	1,870
3	-0,071	0,691	0,780
4	0,715	-0,634	-0,420
5	0,126	-1,107	-1,129
6	-0,306	0,502	0,507
7	0,715	-0,256	-0,147
8	-1,642	-1,675	-1,728
9	-0,110	-0,066	-0,147
10	-0,071	0,218	0,016

$$r_{z1,z2} = 0,53 \quad \bar{r} = \frac{\sum_{j,k=1}^m r_{zj,zk}}{m}, j \neq k$$

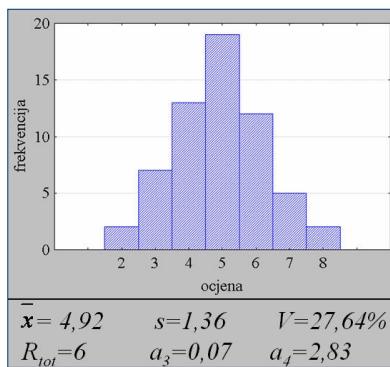
$$r_{z1,z3} = 0,57 \quad \bar{r} = \frac{r_{z1,z2} + r_{z1,z3} + r_{z2,z3}}{3}$$

$$r_{z2,z3} = 0,99 \quad \bar{r} = \frac{0,53 + 0,57 + 0,99}{3} = 0,70$$

### Osjetljivost

- **Osjetljivost** je metrijska karakteristika koja pokazuje koliko uspješno mjerni instrument razlikuje ispitanike po predmetu mjerjenja. Osjetljivost kineziologičkih mjernih instrumenata se procjenjuje na temelju mjera disperzije i oblika distribucije rezultata.

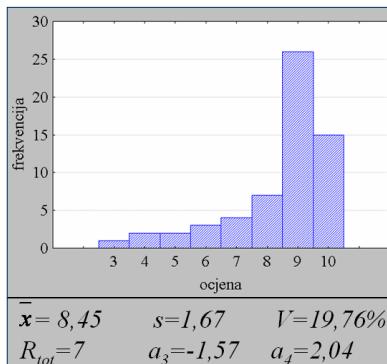
**Primjer 1:** 60 odraslih veslača je izmjereno nekim testom koordinacije u ritmu i dobiveni su sljedeći rezultati:



Mjere varijabilnosti i koeficijent zakrivljenosti distribucije ( $a_4$ ) upućuju na zadovoljavajuću osjetljivost mjernog instrumenta. Uz pretpostavku da je navedeni predmet mjerjenja u populaciji ispitanika normalno distribuiran, simetrija distribucije koja se može uočiti iz oblika histograma frekvencija, kao i iz koeficijenta asimetrije distribucije ( $a_3$ ), upućuje na prilagođenost težine testa izmijerenom uzorku ispitanika.

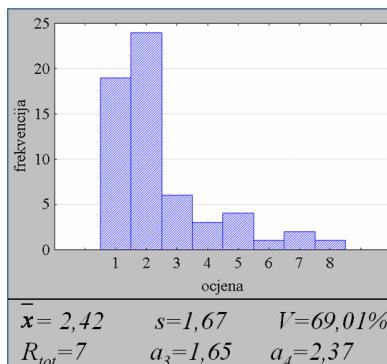
## 17. Metrijske karakteristike II.

**Primjer 2:** 60 odraslih plesača je izmjereno nekim testom koordinacije u ritmu i dobiveni su sljedeći rezultati:



Uz pretpostavku da je navedeni predmet mjerjenja u populaciji ispitanika normalno distribuiran, negativna asimetrija distribucije koja se može uočiti iz oblika histograma frekvencija kao i iz koeficijenta asimetrije distribucije ( $a_3$ ) upućuje na zaključak da je test prelagan za izmjereni uzorak ispitanika. Visoka vrijednost koeficijenta zakrivljenosti distribucije ( $a_4$ ) upućuje na slabu osjetljivost testa.

**Primjer 3:** 60 učenika prvog razreda osnovne škole je izmjereno nekim testom koordinacije u ritmu i dobiveni su sljedeći rezultati:



Uz pretpostavku da je navedeni predmet mjerjenja u populaciji ispitanika normalno distribuiran, pozitivna asimetrija distribucije koja se može uočiti iz oblika histograma frekvencija kao i iz koeficijenta asimetrije distribucije ( $a_3$ ) upućuje na zaključak da je test pretežak za izmjereni uzorak ispitanika. Visoka vrijednost koeficijenta zakrivljenosti distribucije ( $a_4$ ) upućuje na slabu osjetljivost testa.

### Dijagnostička valjanost

- ▶ **Dijagnostička valjanost** je metrijska karakteristika koja pokazuje koliko stvarni predmet mjerjenja odgovara ciljanom predmetu mjerjenja. Dijagnostičku valjanost je prema načinu utvrđivanja moguće podijeliti na apriornu valjanost i faktorsku valjanost.
- ▶ **Apriorna valjanost** se utvrđuje promišljanjem stručnjaka o stvarnom predmetu mjerjenja, a **faktorska valjanost** eksperimentalnom provjerom prepostavke o predmetu mjerjenja.

## 17. Metrijske karakteristike II.

► Faktorska valjanost se može izraziti:

- korelacijom rezultata testa s rezultatima referentnog mjernog instrumenta, odnosno testa za kojeg je potvrđena visoka faktorska valjanost za procjenu ciljanog predmeta mjerjenja (primjerice, korelacija rezultata upitnika za procjenu tjelesne aktivnosti nepoznate faktorske valjanosti s rezultatima sedmodnevног dnevnika tjelesne aktivnosti).
- korelacijom testa s prвom glavnom komponentom izračunatom na temelju rezultata tri ili više testova za koje je potvrđena visoka faktorska valjanost za procjenu ciljanog predmeta mjerjenja (primjerice, korelacija rezultata testa za procjenu eksplozivne snage nepoznate faktorske valjanosti s prвom glavnom komponentom izračunatom na temelju rezultata testova MFESDM - Skok udalj s mjesta, MFESVM - Skok uvis s mjesta i MFEML - Bacanje medicinke iz ležanja na ledjima).
- korelacijom testa s faktorom koji predstavlja ciljani predmet mjerjenja, a koji je utvrđen faktorskom analizom u koju su, osim testova za procjenu ciljanog predmeta mjerjenja, uključeni i testovi drugih predmeta mjerjenja (primjerice, korelacija rezultata testa za procjenu eksplozivne snage nepoznate faktorske valjanosti s faktorom koji predstavlja eksplozivnu snagu utvrđenim faktorskom analizom u koju je uključen skup testova za procjenu različitih motoričkih sposobnosti).

### Prognostička valjanost

- **Prognostička valjanost** je metrijska karakteristika koja pokazuje s kolikom se sigurnošću može predvidjeti uspјešnost u nekoj praktičnoj aktivnosti na temelju rezultata u jednom ili više testova. Može se utvrditi prognostička valjanost:
- jednog testa za jednodimenzionalni kvantitativni kriterij
  - skupa testova za jednodimenzionalni kvantitativni kriterij
  - skupa testova za višedimenzionalni kvantitativni kriterij
  - jednog testa za jednodimenzionalni kvalitativni kriterij
  - skupa testova za jednodimenzionalni kvalitativni kriterij.
- Prognostička valjanost jednog testa za jednodimenzionalni kvantitativni kriterij (npr. uspјešnost u bacanju kugle određena najboljim hicem) utvrđuje se Pearsonovim koeficijentom korelaciјe ili jednostavnom regresijskom analizom između rezultata testa i rezultata u kriterijskoj varijabli.

## 17. Metrijske karakteristike II.

- ▶ Prognostička valjanost skupa testova za jednodimenzionalni kvantitativni kriterij utvrđuje se višestrukom regresijskom analizom pri čemu je mjera valjanosti skupa testova koeficijent multiple korelacije, dok su standardizirani regresijski koeficijenti mjere valjanosti svakog pojedinog testa.
- ▶ Prognostička valjanost skupa testova za višedimenzionalni kvantitativni kriterij (npr. uspješnost u košarkaškoj igri određena nizom parametara situacijske učinkovitosti) utvrđuje se kanoničkom korelacijskom analizom pri čemu se mjerom valjanosti skupa testova smatraju koeficijenti kanoničke korelacije.
- ▶ Prognostička valjanost jednog testa za jednodimenzionalni kvalitativni kriterij (npr. uspješnost tenisača u prvom kolu turnira opisana s dvije kategorije - *pobjeda i poraz*) utvrđuje se t-testom za nezavisne uzorke ili univarijatnom analizom varijance, a mjera valjanosti testa je statistička značajnost i veličina razlike/a između aritmetičkih sredina.
- ▶ Prognostička valjanost skupa testova za jednodimenzionalni kvalitativni kriterij se utvrđuje diskriminacijskom analizom pri čemu su mjeru valjanosti skupa testova koeficijenti kanoničke diskriminacije, a mjeru valjanosti svakog pojedinog testa korelacije testa s diskriminacijskim funkcijama.

**Tablica:** Metode za utvrđivanje prognostičke valjanosti s obzirom na broj testova i tip kriterija

BROJ TESTOVA	TIP KRITERIJA	METODA
jedan	jednodimenzionalni kvantitativni	korelacija, jednostruka regresijska analiza
dva ili više	jednodimenzionalni kvantitativni	višestruka regresijska analiza
dva ili više	višedimenzionalni kvantitativni	kanonička analiza
jedan	jednodimenzionalni kvalitativni	t-test, anova
dva ili više	jednodimenzionalni kvalitativni	diskriminacijska analiza

### Postupci:

- ▶ **Kondenzacija originalnih ocjena sudaca aritmetičkom sredinom:** Kondenzacija originalnih ocjena sudaca aritmetičkom sredinom izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Statistics of Block Data* → *Block Rows* → *Means*. Prije opisanog postupka potrebno je u matrici podataka označiti željene varijable.
- ▶ **Kondenzacija standardiziranih ocjena sudaca aritmetičkom sredinom:** Izračunavanje z-vrijednosti izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Edit* → *Fill/Standardize Block* → *Standardize Columns*. Kondenzacija prethodno standardiziranih ocjena sudaca aritmetičkom sredinom izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Statistics of Block Data* → *Block Rows* → *Means*. Prije oba postupka potrebno je u matrici podataka označiti željene varijable.
- ▶ **Izračunavanje Cronbachovog i SB koeficijenta objektivnosti:** Izračunavanje Cronbachovog koeficijenta objektivnosti (*Cronbach's alpha*) i Spearman-Brownovog koeficijenta objektivnosti (*Standardized alpha*) izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Multivariate Exploratory Techniques* → *Reliability/Item analysis*. Prije izračunavanja objektivnosti potrebno je odabrati čestice testa putem dijaloškog okvira *Variables*.
- ▶ **Kondenzacija ocjena sudaca prvom glavnom komponentom:** Kondenzacija ocjena sudaca na prvu glavnu komponentu provodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Multivariate Exploratory Techniques* → *Factor analysis*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *Variables* potrebno je označiti željene čestice testa. Nakon odabira čestica u dijaloškom okviru *Advanced* potrebno je označiti opciju *Principal components* i definirati kriterij za redukciju broja glavnih komponenata na način da se u polje *Max. no. of factors* unese vrijednost 1. Nakon potvrde unesenog kriterija za redukciju broja glavnih komponenata moguće je pregledati kondenzirane ocjene ispitanika na prvoj glavnoj komponenti (*Scores* → *Factor scores*).
- ▶ U programu STATISTICA ne postoji automatizirana procedura za izračunavanje Kaiser-Caffreyevog koeficijenta objektivnosti pa je u tu svrhu nakon prethodno opisanog postupka potrebno izračunati prvu svojstvenu vrijednost (*Explained variance* → *Eigenvalues*) te je uvrstiti u formulu za izračunavanje Kaiser-Caffreyevog koeficijenta.
- ▶ **Izračunavanje prosječne korelacije među česticama:** Utvrđivanje homogenosti putem prosječne korelacijske među česticama (*Average Inter-Item Correlation*) izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Multivariate Exploratory Techniques* → *Reliability/Item analysis*. Prije izračunavanja prosječne korelacije među česticama potrebno je odabrati čestice testa pomoću dijaloškog okvira *Variables*.
- ▶ **Utvrđivanje osjetljivosti mjernog instrumenta:** Izračunavanje mjera disperzije i oblika distribucije rezultata izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Descriptive statistics* → *Advanced* → *Range* (raspon), *Standard Deviation* (standardna devijacija), *Variance* (varijanca), *Coefficient of variation* (koeficijent varijabilnosti), *Skewness* i *Kurtosis*. IsCRTavanje histograma frekvencija izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Frequency Tables* → *Advanced*. Potrebno je definirati: točan broj razreda (*No. of exact intervals*), približan broj razreda uz uvjet zaokruženih granica razreda ("Neat intervals, approximate no.") ili točan interval razreda (*Step size*), te potom odabrati opciju *Histograms*.

## 17. Metrijske karakteristike II.

- ▶ **Faktorska valjanost - korelacija testa s referentnim testom:** Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije, koji se u ovom slučaju smatra mjerom valjanosti, izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Correlation matrices*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *One variable list* potrebno je označiti dvije ili više varijabli na temelju kojih se želi izračunati korelacijska matrica.
- ▶ **Faktorska valjanost - korelacija testa s prvom glavnom komponentom:** Izračunavanje prve glavne komponente provodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Multivariate Exploratory Techniques* → *Factor analysis*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *Variables* potrebno je označiti željene varijable. Nakon odabira varijabli u dijaloškom okviru *Advanced* potrebno je označiti opciju *Principal components* i definirati kriterij za redukciju broja glavnih komponenata na način da se u polje *Max. no. of factors* unese vrijednost 1. Nakon potvrde unesenog kriterija za redukciju broja glavnih komponenata, moguće je pregledati rezultate ispitanika na prvoj glavnoj komponenti (*Scores* → *Factor scores*). Izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije između testa i prethodno izračunate prve glavne komponente izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Correlation matrices*. Prije izračunavanja korelacije, u maticu originalnih podataka je potrebno iskopirati prethodno utvrđene rezultate ispitanika na prvoj glavnoj komponenti.
- ▶ **Faktorska valjanost - korelacija testa s ciljanim faktorom:** Komponentni model faktorske analize provodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Multivariate Exploratory Techniques* → *Factor analysis*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *Variables* potrebno je označiti manifestne varijable. Nakon odabira varijabli u dijaloškom okviru *Advanced* potrebno je označiti opciju *Principal components* i definirati kriterij za redukciju broja glavnih komponenata. Pri tome je moguće iskoristiti opcije *Max. no. of factors* (maksimalan broj faktora) i *Mini. eigenvalue* (minimalna svojstvena vrijednost). Potom je potrebno odabrati neku od ponuđenih rotacija u padajućem izborniku *Loadings* → *Factor rotation*. Nakon rotacije glavnih komponenata moguće je pregledati maticu strukture, tj. korelacije testova s prethodno izračunatim faktorima (*Loadings* → *Summary: Factor loadings*).

### Zadaci:

- ▶ U datoteci *GIMS.sta* izvršite kondenzaciju originalnih ocjena sudaca u testu *GREDA* aritmetičkom sredinom!
- ▶ U datoteci *GIMS.sta* izvršite kondenzaciju standardiziranih ocjena sudaca u testu *GREDA* aritmetičkom sredinom!
- ▶ U datoteci *GIMS.sta* izračunajte Cronbachov koeficijent objektivnosti i Spearman-Brownov koeficijent objektivnosti za test *GREDA*!
- ▶ U datoteci *GIMS.sta* kondenzirajte čestice testa *GREDA* prvom glavnom komponentom! Izračunajte Kaiser-Caffreyev koeficijent objektivnosti za test *GREDA*!
- ▶ U datoteci *GIM.sta* utvrđite homogenost testa *AGKUS* putem prosječne korelacije među česticama!
- ▶ U datoteci *GIM.sta* izvršite kondenzaciju originalnih rezultata čestica testa *FEBML* aritmetičkom sredinom! Procijenite osjetljivost testa *FEBML* putem parametara disperzije i oblika distribucije rezultata!

## 17. Metrijske karakteristike II.

- ▶ U datoteci GIM.sta iscrtajte histogram frekvencija za varijablu kondenziranih rezultata testa FEBML uz uvjet da je broj razreda jednak 11!
- ▶ Pokrenite datoteku TESTZ.sta! Utvrđite faktorsku valjanost testa LOPTA za procjenu eksplozivne snage uz pretpostavku da je test DALJM referentna metoda za procjenu ciljanog predmeta mjerena!
- ▶ Pokrenite datoteku TESTZ.sta! Utvrđite faktorsku valjanost testa LOPTA za procjenu eksplozivne snage uz pretpostavku da su DALJM, DALJZ i SPRINT mjerni instrumenti visoke faktorske valjanosti za procjenu ciljanog predmeta mjerena!
- ▶ Provedite faktorsku analizu na svim varijablama datoteke Judo.sta uz GK-kriterij za redukciju i normaliziranu Varimax rotaciju! Utvrđite faktorsku valjanost testa CUC za procjenu repetitivne snage uz pretpostavku da su SKL i TRB mjerni instrumenti visoke faktorske valjanosti za procjenu ciljanog predmeta mjerena!

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). **Kvantitativne metode**. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 301-303, 306-314
- ▶ Mejovšek, M. (2003). **Uvod u metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima**. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 49-55, 63-66.

## Pitanja i zadaci

1. Osjetljivost kineziologičkih mjernih instrumenata procjenjuje se pomoću...
- a) ... mjera centralne tendencije.
  - b) ... mjera pouzdanosti i objektivnosti.
  - c) ... mjera disperzije i oblika distribucije rezultata.
  - d) ... mjera homogenosti i valjanosti.

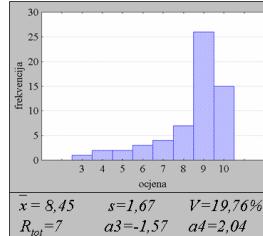
2. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Apriorna valjanost je dijagnostička valjanost.
- b) Faktorska valjanost utvrđuje se eksperimentalno.
- c) Apriorna valjanost se ne utvrđuje eksperimentalno.
- d) Faktorska valjanost je prognostička valjanost.

3. Koliki je Cronbachov koeficijent objektivnosti testa GREDA datoteke GIMS.sta?

- a) 0,88
- b) 0,77
- c) 0,52
- d) 0,85

4. 60 gimnastičara je testirano mjernim instrumentom za procjenu brzine i dobiveni su sljedeći rezultati:



Uz pretpostavku da je navedeni predmet mjerjenja u populaciji ispitanika normalno distribuiran, na što upućuju navedeni rezultati i grafički prikaz?

- a) Težina testa je prilagođena mjerenim ispitanicima.
- b) Test je potpuno neosjetljiv.
- c) Valjanost testa nije zadovoljavajuća.
- d) Test je prelagan za mjerene ispitanike.

5. Pokrenite datoteku GIM.sta! Kondenzirajte originalne rezultate čestica testa FEBML aritmetičkom sredinom! Koliko iznosi standardna devijacija kondenziranih rezultata?

- a) 34,334
- b) 36,356
- c) 38,378
- d) 35,345

6. Prognostička valjanost je mjerna karakteristika koja pokazuje...

- a) ... kolika je sigurnost pri predviđanju uspješnosti u nekoj praktičnoj aktivnosti na temelju rezultata u jednom ili više testova.
- b) ... kolika uspješno mjerni instrument razlikuje ispitanike po predmetu mjerjenja.
- c) ... koliko rezultati u svim česticama testa zavise o istom predmetu mjerjenja.
- d) ... koliko predmet mjerjenja mjernog instrumenta odgovara ciljanom predmetu mjerjenja.

7. Uz pretpostavku da je predmet mjerjenja u populaciji ispitanika normalno distribuiran, a koeficijent asimetrije rezultata testiranja provedenog na nekom uzorku iznosi 0, opravданo je pretpostaviti da je primjenjeni mjerni instrument...

- a) ... primjerene težine za testirane ispitanike.
- b) ... niske faktorske valjanosti.
- c) ... potpuno neosjetljiv.
- d) ... potpuno nepouzdan.

8. Cronbachov koeficijent objektivnosti mjernog instrumenta tipa «subjektivna procjena mjeritelja» opravданo je koristiti u slučaju...

- a) ... kondenzacije standardiziranih rezultata/ocjena aritmetičkom sredinom.
- b) ... kondenzacije originalnih rezultata/ocjena aritmetičkom sredinom.
- c) ... kondenzacije originalnih rezultata/ocjena prvom glavnom komponentom.
- d) ... kondenzacije standardiziranih rezultata/ocjena sumom.

## 17. Metrijske karakteristike II.

### Pitanja i zadaci

9. Pokrenite datoteku *TR10M.sta!* Kolika je prognostička valjanost testa *BRKOCI* za prognozu rezultata u testu *KRITER*?

- a) 0,83
- b) 0,85
- c) 0,79
- d) 0,78

10. Objektivnost je mjerna karakteristika kojom se određuje...

- a) ... nezavisnost aparature za mjerjenje od ispitanika.
- b) ... nezavisnost standardiziranog postupka mjerjenja od mjeritelja.
- c) ... nezavisnost rezultata mjerjenja od mjeritelja.
- d) ... nezavisnost rezultata mjerjenja od predmeta mjerjenja.

11. Uz pretpostavku da je predmet mjerjenja u populaciji ispitanika normalno distribuiran, a koeficijent asimetrije rezultata testiranja provedenog na nekom uzorku iznosi 10, opravdano je pretpostaviti da je primijenjeni mjerni instrument...

- a) ... prelagan za testirane ispitanike.
- b) ... primjerene težine za testirane ispitanike.
- c) ... vrlo pouzdan.
- d) ... pretežak za testirane ispitanike.

12. Dijagnostička valjanost je metrijska karakteristika koja pokazuje...

- a) ... koliko uspješno mjerni instrument razlikuje ispitanike po predmetu mjerjenja.
- b) ... koliko predmet mjerena mjernog instrumenta odgovara ciljanom predmetu mjerjenja.
- c) ... koliko su rezultati mjerena nezavisni od pogreške mjeritelja.
- d) ... koliko su rezultati mjerena nezavisni od slučajne pogreške mjerena.

13. Pokrenite datoteku *TESTZ.sta!* Kolika je prognostička valjanost skupa testova *VISI*, *TEZI*, *DALIM*, *DALIZ* i *SPRINT* za prognozu rezultata u testu *LOPTA*?

- a) 0,66
- b) 0,55
- c) 0,44
- d) 0,33

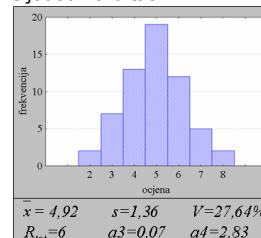
14. Kaiser-Caffreyev koeficijent objektivnosti mjernog instrumenta tipa «subjektivna procjena mjeritelja» opravdano je koristiti u slučaju...

- a) ... kondenzacije originalnih rezultata/ocjena aritmetičkom sredinom.
- b) ... kondenzacije standardiziranih rezultata/ocjena aritmetičkom sredinom.
- c) ... kondenzacije rezultata/ocjena prvom glavnom komponentom.
- d) ... kondenzacije rezultata/ocjena sumom.

15. Osjetljivost je mjerna karakteristika koja pokazuje...

- a) ... koliko uspješno mjerni instrument razlikuje ispitanike po predmetu mjerena.
- b) ... koliko su rezultati mjerena nezavisni od pogreške mjeritelja.
- c) ... koliko su rezultati mjerena nezavisni od slučajne pogreške mjerena.
- d) ... koliko predmet mjerena mjernog instrumenta odgovara ciljanom predmetu mjerena.

16. 60 gimnastičara je testirano mjernim instrumentom za procjenu brzine i dobiveni su sljedeći rezultati:



Uz pretpostavku da je navedeni predmet mjerena u populaciji ispitanika normalno distribuiran, na što upućuju navedeni rezultati i grafički prikaz?

- a) Valjanost testa je zadovoljavajuća.
- b) Valjanost testa nije zadovoljavajuća.
- c) Težina testa je prilagođena mjerenim ispitanicima.
- d) Test je prelagan za mjerene ispitanike.

## 17. Metrijske karakteristike II.

### Pitanja i zadaci

17. Objektivnost mjernog instrumenta je veća što je...

- a) ... manji broj mjeritelja i veća korelacija među ocjenama različitih mjeritelja.
- b) ... veći broj mjeritelja i veća korelacija među ocjenama različitih mjeritelja.
- c) ... veći broj ispitanika i manja korelacija među ocjenama različitih mjeritelja.
- d) ... manji broj ispitanika i manji broj mjeritelja.

18. Homogenost se izražava...

- a) ... prosječnom korelacijom među česticama.
- b) ... prosječnom varijancom čestica.
- c) ... aritmetičkom sredinom čestica.
- d) ... aritmetičkom sredinom koeficijenata asimetrije čestica.

19. Koliki je Spearman-Brownov koeficijent objektivnosti testa MSPG datoteke GIMS.sta?

- a) 0,965
- b) 0,972
- c) 0,924
- d) 0,923

20. Objektivnost mjernog instrumenta tipa «subjektivna potpora mjeritelja» ne zavisi o...

- a) ... znanju i iskustvu mjeritelja.
- b) ... iskustvu ispitanika pri izvođenju zadataka.
- c) ... jednostavnosti i jednoznačnosti pravila mjerjenja i kriterija za ocjenjivanje.
- d) ... tehnološkoj potpori mjeritelju pri ocjenjivanju.

21. Uz pretpostavku da je predmet mjerena u populaciji ispitanika normalno distribuiran, a koeficijent asimetrije rezultata testiranja provedenog na nekom uzorku iznosi -10, opravdano je pretpostaviti da je primjenjeni mjerni instrument...

- a) ... pretežak za testirane ispitanike.
- b) ... primjerene težine za testirane ispitanike.
- c) ... prelagan za testirane ispitanike.
- d) ... vrlo nepouzdani.

22. Pokrenite datoteku GIMS.sta! Kondenzirajte standardizirane rezultate čestica testa GREDA aritmetičkom sredinom! Koliko iznosi koeficijent asimetrije kondenziranih rezultata?

- a) 1,34
- b) 1,56
- c) 1,82
- d) 1,71

23. Provedite faktorsku analizu na svim varijablama datoteke Judo.sta koristeći GK-kriterij za redukciju i normaliziranu Varimax rotaciju! Kolika je faktorska valjanost testa CUC za procjenu prvog faktora?

- a) 0,41
- b) 0,84
- c) 0,52
- d) 0,86

24. Provedite faktorsku analizu na svim varijablama datoteke SKOLA.sta koristeći GK-kriterij za redukciju i normaliziranu Varimax rotaciju! Na temelju rezultata provedene analize opravdano je zaključiti da je faktorska valjanost testa TEZI najveća za...

- a) ... faktor 1.
- b) ... faktor 2.
- c) ... faktor 3.
- d) ... faktor 4.

25. Spearman-Brownov koeficijent objektivnosti mjernog instrumenta tipa «subjektivna procjena mjeritelja» opravdano je koristiti u slučaju...

- a) ... kondenzacije originalnih rezultata/ocjena aritmetičkom sredinom.
- b) ... kondenzacije originalnih rezultata/ocjena prvom glavnom komponentom.
- c) ... kondenzacije standardiziranih rezultata/ocjena aritmetičkom sredinom.
- d) ... kondenzacije standardiziranih rezultata/ocjena prvom glavnom komponentom.

## 17. Metrijske karakteristike II.

### Pitanja i zadaci

26. Kolika je prosječna korelacija među česticama testa FEDSM datoteke GIM.sta?

- a) 0,71
- b) 0,74
- c) 0,76
- d) 0,89

27. Koliki je Kaiser-Caffreyev koeficijent objektivnosti testa KOLUT datoteke GIM.sta?

- a) 0,93
- b) 0,98
- c) 0,91
- d) 0,96

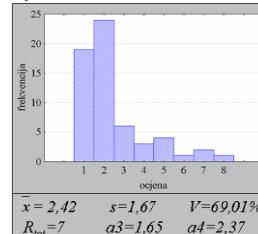
28. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Homogenost je veća što je veći broj čestica mjerena.
- b) Homogenost je mjerna karakteristika kompozitnih mjernih instrumenata.
- c) Homogenost je veća što je veća korelacija među česticama mjerena.
- d) Homogenost se kreće u intervalu od 0 do 1.

29. Pokrenite datoteku TESTZ.sta! Kolika je faktorska valjanost testa LOPTA uz pretpostavku da je test DALZ referentna metoda za procjenu ciljanog predmeta mjerjenja!

- a) 0,58
- b) 0,54
- c) 0,53
- d) 0,59

30. 60 gimnastičara je testirano mjernim instrumentom za procjenu brzine i dobiveni su sljedeći rezultati:



Uz pretpostavku da je navedeni predmet mjerjenja u populaciji ispitanika normalno distribuiran, na što upućuju navedeni rezultati i grafički prikaz?

- a) Test je prelagan za mjerene ispitanike.
- b) Test je pretežak za mjerene ispitanike.
- c) Valjanost testa nije zadovoljavajuća.
- d) Valjanost testa je zadovoljavajuća.

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17

# 18

*Neparametrijske metode I.*

19  
20

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

- namjena neparametrijskih metoda
- podjela neparametrijskih metoda

### Deskriptivna analiza nominalnih varijabli

- frekvencija
- relativna frekvencija
- jednodimenzionalno grupiranje
- tablica frekvencija
- grafikon stupaca
- strukturni krug
- višedimenzionalno grupiranje
- tablica kontingencija
- stacked grafikon stupaca

### Deskriptivna analiza ordinalnih i kvantitativnih varijabli

- interval razreda
- kumulativna frekvencija
- relativna kumulativna frekvencija
- histogram frekvencija
- poligon frekvencija
- modalna vrijednost
- frekvencija modalne vrijednosti
- aproksimativna modalna vrijednost
- medijan
- totalni raspon
- interkvartil
- koeficijent kvartilne devijacije

### MICROSOFT EXCEL

### Deskriptivna analiza nominalnih varijabli

- prebrojavanje podataka funkcijom Countif
- izračunavanje proporcije
- izračunavanje postotka
- grafikon stupaca
- strukturni krug
- stacked grafikon stupaca

### Deskriptivna analiza ordinalnih i kvantitativnih varijabli

- linijski grafikon
- utvrđivanje moda, medijana, minimuma, maksimuma i kvartila

### STATISTICA

### Deskriptivna analiza nominalnih varijabli

- jednodimenzionalno grupiranje
- izračunavanje frekvencije
- izračunavanje relativne frekvencije
- grafikon stupaca
- strukturni krug
- višedimenzionalno grupiranje

### Deskriptivna analiza ordinalnih i kvantitativnih varijabli

- jednodimenzionalno grupiranje
- izračunavanje frekvencije
- izračunavanje relativne frekvencije
- izračunavanje kumulativne frekvencije
- izračunavanje relativne kumulativne frekvencije
- histogram frekvencija
- poligon frekvencija
- utvrđivanje moda, medijana, minimuma, maksimuma, raspona i interkvartila

## 18. Neparametrijske metode I.

- ▶ **Neparametrijske metode** su statističke metode prvenstveno namijenjene obradi kvalitativnih podataka, podataka prikupljenih na malom uzorku entiteta i podataka čija distribucija u populaciji ne prati normalnu distribuciju.
- ▶ Zavisno o tipu varijabli, neparametrijske metode je moguće formalno podijeliti na metode za analizu nominalnih varijabli i metode za analizu ordinalnih i kvantitativnih (intervalnih i omjernih) varijabli.

### Deskriptivna analiza nominalnih varijabli

- ▶ Deskriptivna analiza nominalnih varijabli vrši se grupiranjem podataka, odnosno utvrđivanjem apsolutnih i relativnih frekvencija pojedinih kategorija.
- ▶ **Frekvencija** ili **apsolutna frekvencija** je broj entiteta koji imaju isti oblik obilježja, odnosno broj entiteta u određenoj kategoriji.
- ▶ **Relativna frekvencija** je omjer između frekvencije određene kategorije i zbroja frekvencija svih kategorija, odnosno ukupnog broja entiteta. Relativna frekvencija može se izraziti u postotku ili proporciji, a izračunava se na sljedeći način:

$$p_g = \frac{f_g}{n} \quad \%_g = \frac{f_g}{n} \cdot 100$$

gdje je

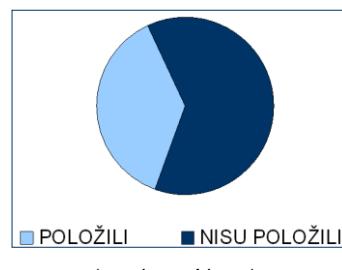
- $p_g$  - proporcija grupe  $g$  ( $g = 1, \dots, k$ )
- $f_g$  - frekvencija grupe  $g$
- $\%_g$  - postotak grupe  $g$  ( $g = 1, \dots, k$ )
- $n$  - ukupan broj entiteta
- $k$  - broj kategorija (grupa).

- ▶ **Jednodimenzionalno grupiranje** je grupiranje entiteta po jednom obilježju (varijabli). Rezultati jednodimenzionalnog grupiranja podataka najčešće se prikazuju putem tablice frekvencija te pomoću grafikona stupaca vertikalne orientacije, grafikona stupaca horizontalne orientacije i strukturnog kruga.

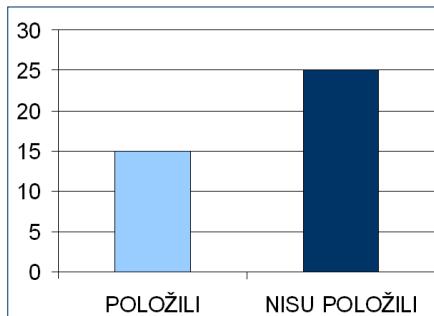
**Primjer:** Praktičnom dijelu ispita iz KM-a pristupilo je 40 studenata; 15 ih je položilo, a 25 nije.

USPJEH NA ISPITU	f	%
NISU POLOŽILI	25	62,5
POLOŽILI	15	37,5
UKUPNO	40	100

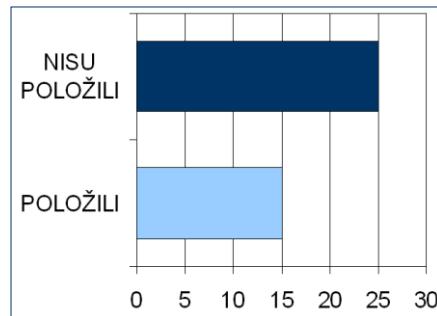
(tablica frekvencija)



## 18. Neparametrijske metode I.



(grafikon stupaca vertikalne orijentacije)



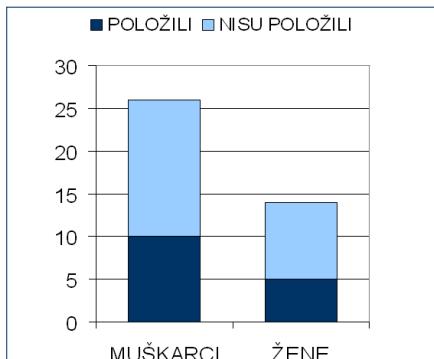
(grafikon stupaca horizontalne orijentacije)

- **Višedimenzionalno grupiranje** je grupiranje entiteta po više obilježja (varijabli). Rezultati višedimenzionalnog grupiranja podataka najčešće se prikazuju putem tablice kontingencija te pomoću *stacked* grafikona stupaca vertikalne orijentacije ili *stacked* grafikona stupaca horizontalne orijentacije.

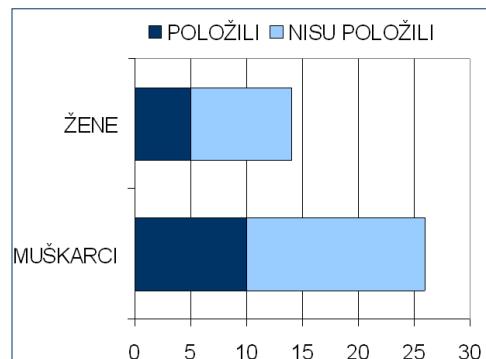
**Primjer:** Od 26 studenata koji su pristupili praktičnom dijelu ispita iz KM-a položilo ih je 10, a od 14 studentica položilo ih je 5.

SPOL/USPJEH NA ISPITU	NISU POLOŽILI	POLOŽILI	UKUPNO
MUŠKARCI	16	10	26
ŽENE	9	5	14
UKUPNO	25	15	40

(tablica kontingencija)



(Stacked grafikon stupaca vertikalne orijentacije)



(Stacked grafikon stupaca horizontalne orijentacije)

## 18. Neparametrijske metode I.

### Deskriptivna analiza ordinalnih i kvantitativnih varijabli

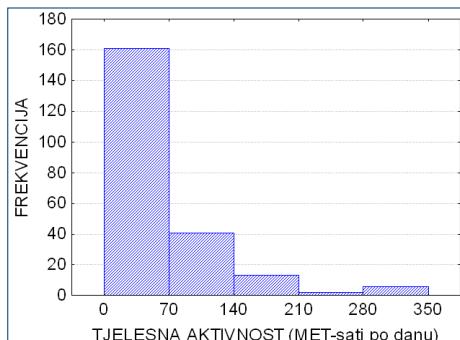
- ▶ Neparametrijska deskriptivna analiza ordinalnih, intervalnih i omjernih varijabli vrši se grupiranjem podataka te izračunavanjem parametara centralne tendencije i mjera varijabilnosti koje nisu osjetljive na odstupanja distribucije rezultata od normalne distribucije.
- ▶ Na vjerodostojnost najčešće korištenih deskriptivnih parametara – aritmetičke sredine i standardne devijacije – ponajviše utječe asimetrija distribucije rezultata, pa se u takvim slučajevima trebaju koristiti alternativni deskriptivni parametri.
- ▶ Podatke ordinalnih i diskretnih kvantitativnih varijabli s malim brojem pojavnih oblika obilježja grupira se jednako kao podatke nominalnih varijabli, odnosno na način da svaka vrijednost predstavlja jednu kategoriju.
- ▶ Ako diskretna varijabla ima veliki broj pojavnih oblika ili ako se radi o kontinuiranoj varijabli tada se podaci grupiraju u manji broj razreda. Za uspješno grupiranje potrebno je odrediti prikladan broj razreda i njihovu veličinu (interval razreda).
- ▶ Moguće je izračunati apsolutne i relativne frekvencije kao i apsolutne i relativne kumulativne frekvencije.
- ▶ **Kumulativna frekvencija** predstavlja broj entiteta s manjim ili jednakim rezultatima od gornje granice odgovarajućeg razreda, a izračunava se na način da se frekvencija (apsolutna ili relativna) razreda zbroji sa sumom frekvencija svih prethodnih razreda.
- ▶ Rezultate grupiranja je moguće prikazati pomoću tablice frekvencija te grafički putem histograma frekvencija ili poligona frekvencija.

**Primjer:** Grupiranje 223 osobe prema tjelesnoj aktivnosti procijenjenoj upitnikom tjelesne aktivnosti IPAQ

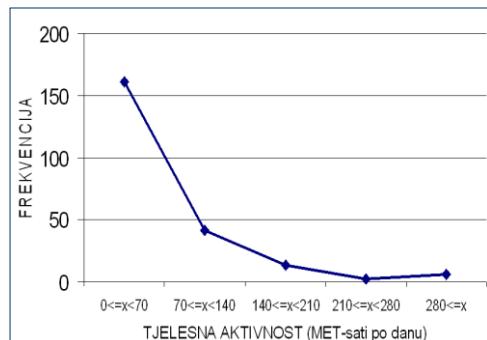
Interval razreda	f	rf (%)	cf	rcf (%)
0<=x<70	161	72,20	161	72,20
70<=x<140	41	18,39	202	90,58
140<=x<210	13	5,83	215	96,41
210<=x<280	2	0,90	217	97,31
280<=x	6	2,69	223	100,00

(tablica frekvencija)

## 18. Neparametrijske metode I.



(histogram frekvencija)



(poligon frekvencija)

- **Mod ili dominantna vrijednost** ( $\mu_o$ ) je vrijednost kvalitativne ili kvantitativne varijable koja se najčešće pojavljuje, odnosno koja ima najveću frekvenciju.

**Primjer:** 10 entiteta je postiglo sljedeće rezultate u nekom motoričkom testu: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5.

Ocjena	f
1	1
2	2
3	4
4	2
5	1

Iz prikazane tablice može se uočiti da je mod jednak 3.

- Kontinuirane kvantitativne varijable često imaju više od jedne modalne vrijednosti. Osim toga, utvrđene modalne vrijednosti mogu imati vrlo nisku frekvenciju u odnosu na ukupan broj entiteta u uzorku. U navedenim je slučajevima interpretacija modalne vrijednosti uvelike otežana.
- Da bi se navedeni problem izbjegao, na temelju rezultata grupiranja podataka izračunava se aproksimativna modalna vrijednost. **Aproksimativna modalna vrijednost** ( $\mu_o$ ) izračunava se sljedećom fomulom:

$$\mu_o = L_1 + \frac{(b-a)}{(b-a)+(b-c)} \cdot I$$

gdje je

- $L_1$  - donja granica modalnog razreda
- $a$  - frekvencija razreda prije modalnog razreda
- $b$  - frekvencija modalnog razreda
- $c$  - frekvencija razreda poslije modalnog razreda
- $\sigma^2$  - interval modalnog razreda.

## 18. Neparametrijske metode I.

**Primjer:** Izračunavanje aproksimativne modalne vrijednosti tjelesne aktivnosti 223 osobe ispitane IPAQ-om

Interval razreda	f
0<=x<70	161
70<=x<140	41
140<=x<210	13
210<=x<280	2
280<=x	6

$$\mu_o = L_I + \frac{(b-a)}{(b-a)+(b-c)} \cdot I$$

$$\mu_o = 0 + \frac{(161-0)}{(161-0)+(161-41)} \cdot 70$$

$$\mu_o = 40,11$$

- **Medijan ili centralna vrijednost** ( $\mu_e$ ) je vrijednost koja se nalazi na sredini uređenog niza podataka (uzlazno ili silazno sortiranog), odnosno vrijednost koja uređeni niz podataka dijeli na dva jednakobrojna dijela.

**Primjer:** 15 entiteta (neparan niz) je izmjereno nekim motoričkim testom. Rezultati su uzlazno sortirani:

X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>	X <sub>10</sub>	X <sub>11</sub>	X <sub>12</sub>	X <sub>13</sub>	X <sub>14</sub>	X <sub>15</sub>
1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5

Iz prikazane tablice može se uočiti da je medijan jednak 3.

- Ako je broj entiteta paran onda je medijan jednak aritmetičkoj sredini dvaju središnjih rezultata sortiranog niza podataka.

**Primjer:** 16 entiteta (paran niz) je izmjereno nekim motoričkim testom. Rezultati su uzlazno sortirani:

X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>	X <sub>10</sub>	X <sub>11</sub>	X <sub>12</sub>	X <sub>13</sub>	X <sub>14</sub>	X <sub>15</sub>	X <sub>16</sub>
1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5

Medijan se izračuna na sljedeći način:  $\mu_e = (x_8+x_9)/2 = (3+3)/2 = 3$

**Primjer:** Usporedba parametara centralne tendencije tjelesne aktivnosti 223 osobe procijenjene IPAQ-om

aritmetička sredina	61,97
medijan	42,65
modalna vrijednost	1,65
frekvencija modalne vrijednosti	3
aproksimativna modalna vrijednost	40,11

## 18. Neparametrijske metode I.

- Aritmetička sredina je nerealno velika zbog pozitivne asimetrije distribucije rezultata. Modalna vrijednost ima premalu frekvenciju da bi bila interpretabilna. U ovakvom bi slučaju bilo opravdano interpretirati medijan ili aproksimativnu modalnu vrijednost.

- Totalni raspon** ( $R_{tot}$ ) je razlika između maksimalne ( $x_{max}$ ) i minimalne ( $x_{min}$ ) vrijednosti.

$$R_{tot} = x_{\max} - x_{\min}$$

- Raspon je nesigurna mjera varijabilnosti jer i jedan ekstremni rezultat može znatno povećati njegovu vrijednost. Povećanjem broja entiteta u uzorku obično se povećava i totalni raspon jer se povećava vjerojatnost uključivanja entiteta s ekstremnim (maksimalnim i minimalnim) vrijednostima.

- Interkvartil** ( $Q$ ) je raspon između vrijednosti 50% središnjih članova sortiranog niza podataka. Interkvartil, za razliku od totalnog raspona, nije osjetljiv na ekstremne rezultate, a izračunava se formulom

$$Q = Q_3 - Q_1$$

gdje je

- $Q_3$  - vrijednost trećeg kvartila, odnosno 75. centila
- $Q_1$  - vrijednost prvog kvartila, odnosno 25. centila.

- Koeficijent kvartilne devijacije** ( $K$ ) je relativna mjera varijabilnosti čija se vrijednost kreće između 0 i 1, a izračunava se formulom

$$K = \frac{Q}{Q_3 + Q_1}$$

gdje je

- $Q$  - interkvartil
- $Q_1$  - vrijednost prvog kvartila odnosno 25. centila
- $Q_3$  - vrijednost trećeg kvartila odnosno 75. centila.

**Primjer:** Deset ispitanika je izmjereno nekim motoričkim testom  $x$  i rezultati su uzlazno sortirani. Potrebno je izračunati  $Q$  i  $K$ !

ISP.	$x$	ISP.	$x$
1	55	11	102
2	60	12	105
3	64	13	111
4	70	14	115
5	77	15	117
6	81	16	120
7	88	17	125
8	94	18	132
9	99	19	144
10	100	20	150

$$Q_1 = 77 \quad Q_3 = 117$$

$$Q = 117 - 77 = 40$$

$$K = \frac{40}{77 + 117} = 0,21$$

### Microsoft Excel

#### Postupci:

- ▶ **Prebrojavanje podataka:** Utvrđivanje frekvencije pojedine kategorije vrši se prebrojavanjem pomoću funkcije *Countif*. Funkcija se unosi u označeno polje matrice odabirom opcije *Function...* padajućeg izbornika *Insert*.
- ▶ **Grafikon stupaca i strukturni krug:** Isrtavanje grafikona stupaca vertikalne orientacije (*Column*), grafikona stupaca horizontalne orientacije (*Bar*) i strukturnog kruga (*Pie*) vrši se odabirom opcije *Chart...* padajućeg izbornika *Insert*.
- ▶ **Stacked grafikon stupaca:** Isrtavanje stacked grafikona stupaca vertikalne orientacije (*Column → Stacked Column*), odnosno horizontalne orientacije (*Bar → Stacked Bar*) vrši se odabirom opcije *Chart...* padajućeg izbornika *Insert*.
- ▶ **Linijski grafikon:** Isrtavanje linijskog grafikona (*Line*) vrši se odabirom opcije *Chart...* padajućeg izbornika *Insert*.
- ▶ **Izračunavanje deskriptivnih pokazatelia:** Izračunavanje deskriptivnih pokazatelia vrši se pomoću funkcija: *Mode* (mod), *Median* (medijan), *Min* (minimum) i *Max* (maksimum). Funkcija se unosi u označeno polje matrice odabirom opcije *Function...* padajućeg izbornika *Insert*.
- ▶ **Izračunavanje kvartila:** Izračunavanje kvartila vrši se pomoću funkcije *Quartile*. Funkcija se unosi u označeno polje matrice odabirom opcije *Function...* padajućeg izbornika *Insert*. Putem trake *Array* je potrebno definirati niz podataka, a pomoću trake *Quart* željeni kvartil (1., 2., 3., ili 4.).

---

#### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.xls* utvrdite frekvencije i relativne frekvencije (u postotku) za pojedine razrede učenika! Iskoristite funkciju *Countif*!
- ▶ Na temelju frekvencija utvrđenih u prethodnom zadatku iscrtajte grafikone stupaca horizontalne i vertikalne orientacije te strukturni krug!
- ▶ Na temelju frekvencija utvrđenih u prvom zadatku iscrtajte stacked grafikone stupaca horizontalne i vertikalne orientacije!
- ▶ Na temelju frekvencija utvrđenih u prvom zadatku iscrtajte poligon frekvencija i poligon kumulativnih frekvencija!
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.xls* izračunajte mod, medijan, minimum, maksimum i raspon za sve kvantitativne varijable!
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.xls* izračunajte interkvartil i koeficijent kvartilne devijacije za sve kvantitativne varijable!

### Postupci:

- ▶ **Jednodimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka:** Jednodimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Basic Statistics/Tables → Frequency Tables → Advanced → All distinct values.
- ▶ **Grafikon stupaca i strukturni krug:** Isrtavanje grafikona stupaca izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Graphs → 2D Graphs → Bar/Column Plots. Isrtavanje strukturnog kruga izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Graphs → 2D Graphs → Pie Charts.
- ▶ **Jednodimenzionalno grupiranje kvantitativnih podataka:** Izbornik za jednodimenzionalno grupiranje kvantitativnih podataka pokreće se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Basic Statistics/Tables → Frequency Tables → Advanced. Moguće je definirati: točan broj razreda (No. of exact intervals), približan broj razreda uz uvjet zaokruženih granica razreda ("Neat" intervals, approximate no.) i točan interval razreda (Step size).
- ▶ **Histogram frekvencija i poligon frekvencija:** Isrtavanje histograma frekvencija izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Graphs → 2D Graphs → Histograms. Isrtavanje poligona frekvencija izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Graphs → 2D Graphs → Line Plots (Variables). Pri isrtavanju poligona frekvencija ulazni podaci moraju biti frekvencije razreda, a ne originalni rezultati entiteta.
- ▶ **Izračunavanje deskriptivnih pokazatelia:** Izračunavanje deskriptivnih pokazatelia izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Basic Statistics/Tables → Descriptive statistics → Advanced → Mode (mod), Median (medijan), Minimum & maximum, Range (raspon) i Quartile range (interkvartil).

---

### Zadaci:

- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* utvrđite frekvencije i relativne frekvencije (u postotku) za pojedine razrede učenika (RAZRED)!
  - ▶ Na temelju frekvencija utvrđenih u prethodnom zadatku isrtajte strukturni krug!
  - ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* utvrđite apsolutne i relativne frekvencije i kumulativne frekvencije razreda prema varijabli *MSDM*. Isprobajte različite opcije!
  - ▶ Na temelju grupiranja podataka proведенog u prethodnom zadatku isrtajte histogram frekvencija i poligon frekvencija!
  - ▶ U datoteci *Ucenici-OS.xls* izračunajte mod, medijan, minimum, maksimum, raspon i interkvartil za sve kvantitativne varijable!
-

## 18. Neparametrijske metode I.

### Preporučena literatura

- ▶ Dizdar, D. (2006). **Kvantitativne metode**. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 52-62, 63, 70-76.
- ▶ Petz, B. (2002). **Osnovne statističke metode za nematematičare**. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 45, 53-56, 59-60, 67-78.
- ▶ Langer, M. (2004). **Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows**. Zagreb: Miš, str. 75-103, 153-181.

# 18. Neparametrijske metode I.

## Pitanja i zadaci

1. Deskriptivna analiza ordinalnih i kvantitativnih varijabli se vrši...

- a) ... grupiranjem podataka i putem parametara centralne tendencije i varijabilnosti koji nisu osjetljivi na odstupanja distribucije rezultata od normalne distribucije.
- b) ... grupiranjem podataka i putem parametara centralne tendencije i varijabilnosti koji su osjetljivi na odstupanja distribucije rezultata od normalne distribucije.
- c) ... nominalnom analizom i ordinalnom analizom.
- d) ... ordinalnom, intervalnom i omjernom analizom.

2. Rezultati jednodimenzionalnog grupiranja kvalitativnih podataka najčešće se prikazuju putem...

- a) ... tablice kontingencija i stacked grafikona stupaca.
- b) ... tablice frekvencija, histograma frekvencija i poligona frekvencija.
- c) ... tablice frekvencija, grafikona stupaca i strukturnog kruga.
- d) ... tablice kontingencija, histograma frekvencija i poligona frekvencija.

3. Apsolutna frekvencija je...

- a) ... broj entiteta u određenoj varijabli.
- b) ... ukupan broj absolutnih entiteta.
- c) ... broj entiteta u određenoj kategoriji.
- d) ... ukupan broj absolutnih varijabli.

4. Neparametrijske metode su statističke metode prvenstveno namijenjene obradi...

- a) ... kvalitativnih podataka, podataka prikupljenih na malom uzorku ispitanika i podataka čija distribucija u populaciji ne prati normalnu distribuciju.
- b) ... kvantitativnih podataka, podataka prikupljenih na velikom uzorku ispitanika i podataka čija distribucija u populaciji prati normalnu distribuciju.
- c) ... varijabli čiji su elementi isključivo neparni brojevi.
- d) ... varijabli čiji su elementi isključivo parni brojevi.

5. Aritmetička sredina neke varijable iznosi 270, standardna devijacija 15, totalni raspon 165, intekvartil 45, a ukupan broj entiteta u izmjerrenom uzorku 100. Ako se provede grupiranje entiteta prema opisanoj varijabli u 5 razreda jednakе veličine, koliki će biti interval razreda?

- a) 20
- b) 3
- c) 33
- d) 54

6. Utvrđen je spol deset entiteta i zapisani su sljedeći rezultati: m, m, ž, m, m, ž, m, ž, m, ž. Kolika je apsolutna frekvencija kategorije m?

- a) 0,6
- b) 6
- c) 60%
- d) entitete nije moguće grupirati

7. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Interkvartil je razlika između vrijednosti 75. i 25. centila.
- b) Interkvartil je razlika između vrijednosti 4. i 2. kvartila.
- c) Interkvartil je raspon između vrijednosti 50% središnjih članova uzlazno sortiranog niza podataka.
- d) Interkvartil je raspon između vrijednosti 50% središnjih članova silazno sortiranog niza podataka

8. Koji deskriptivni pokazatelj najčešće utječe na vjerodostojnost aritmetičke sredine i standardne devijacije pri deskriptivnoj analizi kvantitativnih varijabli?

- a) kurtosis
- b) skewness
- c) interkvartil
- d) kvartil

9. Aproksimativna modalna vrijednost izračunava se na temelju...

- a) ... rezultata faktorske analize.
- b) ... asimetrije distribucije podataka.
- c) ... raspona i standardne devijacije.
- d) ... rezultata grupiranja podataka.

## 18. Neparametrijske metode I.

### Pitanja i zadaci

10. Koji je od navedenih parametara relativna mjera disperzije?

- a) koeficijent kvartilne devijacije
- b) interkvartil
- c) modalna vrijednost
- d) aproksimativna modalna vrijednost

11. Pokrenite datoteku *Ucenici-OS.sta!* Kolika je relativna frekvencija entiteta koji u varijabli *RAZRED* imaju oznaku *II*?

- a) 50%
- b) 80%
- c) 159%
- d) 25,16%

12. Pokrenite datoteku *Ucenici-OS.sta!* Kolika je relativna frekvencija entiteta koji u varijabli *RAZRED* imaju oznaku *I* i u varijabli *SPOL* oznaku *z*?

- a) 12,26%
- b) 12,58%
- c) 24,84%
- d) 25,16%

13. Koje je parametre disperzije opravdano koristiti u svrhu neparametrijske deskriptivne analize kvantitativnih varijabli?

- a) aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju
- b) interkvartil i koeficijent kvartilne devijacije
- c) standardnu devijaciju i koeficijent kvartilne devijacije
- d) modalnu vrijednost, aproksimativnu modalnu vrijednost i medijan

14. Rezultati jednodimenzionalnog grupiranja kvantitativnih podataka najčešće se prikazuju putem...

- a) ... tablice kontingencija i stacked grafikona stupaca.
- b) ... tablice frekvencija, histograma frekvencija i poligona frekvencija.
- c) ... tablice kontingencija, histograma frekvencija i poligona frekvencija.
- d) ... tablice frekvencija, grafikona stupaca i strukturnog kruga.

15. Grupiranje entiteta prema jednoj varijabli naziva se...

- a) ... jednostavno kategoriziranje.
- b) ... jednovektorsko dimenzioniranje.
- c) ... univarijatno simuliranje.
- d) ... jednodimenzionalno grupiranje.

16. Ako na svakih 20000 ljudi ima 3 vrhunska sportaša, koliko vrhunskih sportaša ima u uzorku od 500000 ljudi?

- a) 58
- b) 85
- c) 75
- d) 57

17. Koja neparametrijska metoda se koristi za deskriptivnu analizu nominalnih varijabli?

- a) regresijska analiza
- b) jednostavno linearno kombiniranje podataka
- c) grupiranje podataka
- d) nominalna analiza

18. Relativna frekvencija je...

- a) ... omjer broja entiteta u određenoj kategoriji i ukupnog broja entiteta.
- b) ... omjer frekvencije određene kategorije i apsolutne frekvencije iste kategorije.
- c) ... zbroj frekvencija svih kategorija podijeljen s ukupnim brojem entiteta.
- d) ... ukupan broj apsolutnih entiteta podijeljen s ukupnim brojem apsolutnih varijabli.

19. Pokrenite datoteku *Judo.sta!* Koliko iznosi interkvartil varijable *BML*?

- a) 465
- b) 410
- c) 93
- d) 130

20. Pokrenite datoteku *Skola.xls!* Koliko iznosi vrijednost 3. kvartila varijable *POL*?

- a) 17
- b) 12,5
- c) 3
- d) 21

# 18. Neparametrijske metode I.

## Pitanja i zadaci

21. Pokrenite datoteku *Ucenici-OS.sta!* Kolika je apsolutna frekvencija entiteta koji u varijabli *RAZRED* imaju oznaku *II* i u varijabli *MJESTO* oznaku *Čabar*?

- a) 17
- b) 18
- c) 19
- d) 20

22. Relativna frekvencija može se izraziti u...

- a) ... postotku i proporciji.
- b) ... postotku i permutaciji.
- c) ... proporciji i permutaciji.
- d) ... postotku, proporciji i permutaciji.

23. Pokrenite datoteku *Ucenici-OS.sta!* Kolika je frekvencija entiteta koji u varijabli *MJESTO* imaju oznaku *Čabar*?

- a) 158
- b) 78
- c) 24,53
- d) 49,69

24. Koje je parametre centralne tendencije opravdano koristiti u svrhu neparametrijske deskriptivne analize kvantitativnih varijabli?

- a) aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju
- b) modalnu vrijednost, aproksimativnu modalnu vrijednost i medijan
- c) interkvartil i koeficijent kvartilne devijacije
- d) aritmetičku sredinu i koeficijent kvartilne devijacije

25. Raspon neke varijable iznosi 230, vrijednost 75. centila iznosi 180, vrijednost drugog kvartila iznosi 130, a vrijednost prvog kvartila 70. Koliko iznosi interkvartil opisane varijable?

- a) 60
- b) 100
- c) 50
- d) 110

26. Utvrđen je spol deset entiteta i zapisani su sljedeći rezultati: *m, m, ž, m, m, ž, m, ž, m, ž*. U koliko je kategorija moguće grupirati ispitane entitete prema navedenom obilježju?

- a) 1
- b) 2
- c) 10
- d) entiteti nije moguće grupirati

27. Rezultati višedimenzionalnog grupiranja kvalitativnih podataka najčešće se prikazuju putem...

- a) ... tablice frekvencija, histograma frekvencija i poligona frekvencija.
- b) ... tablice kontingencija, histograma frekvencija i poligona frekvencija.
- c) ... tablice kontingencija i *stacked* grafikona stupaca.
- d) ... tablice frekvencija, grafikona stupaca i struktornog kruga.

28. Aritmetička sredina neke varijable iznosi 270, standardna devijacija 15, totalni raspon 165, intekvartil 45, a ukupan broj entiteta u izmjerrenom uzorku 100. U koliko je razreda moguće grupirati entitete ako je interval razreda 15?

- a) 18
- b) 3
- c) 11
- d) 1

29. Utvrđen je spol deset entiteta i zapisani su sljedeći rezultati: *m, m, ž, m, m, ž, m, ž, m, ž*. Kolika je relativna frekvencija kategorije *ž*?

- a) 4
- b) 10
- c) 40%
- d) entiteti nije moguće grupirati

30. Vrijednost koeficijenta kvartilne devijacije kreće se uvijek između...

- a) ... 0 i 1.
- b) ... 0 i 100.
- c) ... -3 i 3.
- d) ... -100 i 100.

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18

# 19

Neparametrijske metode II.

20

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

#### *Analize razlika prema nominalnim varijablama*

- $\chi^2$  test za jedan uzorak
- $\chi^2$  test za dva ili više nezavisnih uzorka
- McNemarov  $\chi^2$  test za dva zavisna uzorka
- opažene frekvencije
- teoretske frekvencije
- izračunavanje  $\chi^2$  vrijednosti
- određivanje broja stupnjeva slobode
- kritična  $\chi^2$  vrijednost
- opća pravila za korištenje  $\chi^2$  testa
- pravila za korištenje  $\chi^2$  testa na  $2 \times 2$  tablicama
- Yatesova korekcija za kontinuitet

#### *Analize razlika prema ordinalnim i kvantitativnim varijablama*

- Mann-Whitneyev U test
- suma rangova grupe
- prosječan rang grupe
- Sign test
- odnos pozitivnih i negativnih predznaka razlika
- Wilcoxonov test ekvivalentnih parova
- odnos sume rangova apsolutnih vrijednosti pozitivnih i negativnih razlika
- Kruskal-Wallisov test

### STATISTICA

$\chi^2$  test za jedan uzorak

$\chi^2$  test za dva nezavisna uzorka

$\chi^2$  test za dva zavisna uzorka

Mann-Whitneyev U test

Sign test

Wilcoxonov test ekvivalentnih parova

Kruskal-Wallisov test

## 19. Neparametrijske metode II.

- ▶ Odabir neparametrijske metode zavisiće o ciljnoj usmjerenošći obrade podataka, o tipu korištenih varijabli te o broju i zavisnosti/nezavisnosti uzorka entiteta.

### Analize razlika prema nominalnim varijablama

- ▶ Testiranje statističke značajnosti razlika prema nominalnim varijablama vrši se pomoću:
  - $\chi^2$  testa za jedan uzorak,
  - $\chi^2$  testa za dva ili više nezavisnih uzoraka i
  - McNemarovog  $\chi^2$  testa za dva zavisna uzorka.
- ▶  **$\chi^2$  testom za jedan uzorak** utvrđuje se statistička značajnost odstupanja frekvencija utvrđenih jednodimenzionalnim grupiranjem od frekvencija očekivanih pod određenom hipotezom. Pri tome se najčešće testira da li se udjeli entiteta u pojedinim kategorijama statistički značajno razlikuju, odnosno da li utvrđene frekvencije odstupaju statistički značajno od frekvencija očekivanih pri posve slučajnoj raspodjeli. Prije provođenja  $\chi^2$  testa za jedan uzorak potrebno je izvršiti grupiranje entiteta prema analiziranoj varijabli.

**Primjer:** Praktičnom dijelu ispita iz KM-a pristupilo je 40 studenata; 15 ih je položilo, a 25 nije.

USPJEH NA ISPITU	f	%
NISU POLOŽILI	25	62,5
POLOŽILI	15	37,5
UKUPNO	40	100

Da li se udio studenata koji su položili praktični dio ispita iz KM-a statistički značajno ( $p<0,05$ ) razlikuje od udjela studenata koji nisu uspjeli položiti?

Najprije je potrebno izračunati teoretske frekvencije. Teoretske frekvencije se pod pretpostavkom posve slučajne raspodjele izračunavaju na način da se ukupan broj entiteta, tj. suma frekvencija svih kategorija podijeli s brojem kategorija (u ovom primjeru  $f_t=40/2=20$ ).

USPJEH NA ISPITU	f <sub>t</sub>	%
NISU POLOŽILI	20	50
POLOŽILI	20	50
UKUPNO	40	100

Statistička značajnost razlike između opaženih frekvencija i teoretskih frekvencija se testira putem  $\chi^2$  distribucije s  $df=N-1$  stupnjeva slobode gdje  $N$  označava ukupan broj polja.  $\chi^2$  vrijednost se izračunava sljedećom formulom:

## 19. Neparametrijske metode II.

$$\chi^2 = \sum_{g=1}^N \frac{(f_{o_g} - f_{t_g})^2}{f_{t_g}}$$

gdje je

- $f_{og}$  - opažena frekvencija polja  $g$  ( $g=1,\dots,N$ )
- $f_{tg}$  - teoretska frekvencija polja  $g$  ( $g=1,\dots,N$ )
- $N$  - ukupan broj polja.

U ovom primjeru  $\chi^2$  vrijednost se izračunava na sljedeći način:

$$\chi^2 = \sum_{g=1}^N \frac{(f_{o_g} - f_{t_g})^2}{f_{t_g}} = \frac{(25-20)^2}{20} + \frac{(15-20)^2}{20} = 2,5$$

$$df = (2-1) = 1$$

$$\chi^2 = 2,5 \quad df = 1 \quad p < 0,114$$

Izračunata  $\chi^2$  vrijednost i pripadajuća minimalna pogreška statističkog zaključka upućuju da se udjeli studenata ne razlikuju statistički značajno na razini pogreške 5%.

- **$\chi^2$  testom za dva ili više nezavisnih uzoraka** utvrđuje se statistička značajnost razlike između dviju ili više grupa entiteta prema nekoj nominalnoj varijabli. Prije provođenja  $\chi^2$  testa za dva ili više nezavisnih uzoraka potrebno je izvršiti dvodimenzionalno grupiranje entiteta pri čemu je jedna varijabla selektorska (određuje pripadnost entiteta određenoj grupi), a druga varijabla ona prema kojoj se žele testirati razlike između grupa.

**Primjer:** Od 26 studenata koji su pristupili praktičnom dijelu ispita iz KM-a položilo ih je 10, a od 14 studentica položilo ih je 5. U tablici su prikazane opažene frekvencije.

SPOL/USPJEH NA ISPITU	NISU POLOŽILI	POLOŽILI	UKUPNO
MUŠKARCI	16 (62%)	10 (38%)	26
ŽENE	9 (64%)	5 (36%)	14
UKUPNO	25	15	40

Da li se studenti statistički značajno razlikuju od studentica prema uspješnosti na praktičnom ispitu iz KM-a?

Najprije je potrebno izračunati teoretske frekvencije. Teoretske frekvencije se pod pretpostavkom posve slučajne raspodjele izračunavaju na način da se suma frekvencija retka u kojoj se nalazi teoretska frekvencija pomnoži sa sumom frekvencija stupca u kojoj se nalazi teoretska frekvencija te se izračunati produkt podijeli sa sumom frekvencija svih kategorija.

## 19. Neparametrijske metode II.

U tablici su prikazane teoretske frekvencije.

SPOL/USPJEH NA ISPITU	NISU POLOŽILI	POLOŽILI	UKUPNO
MUŠKARCI	25x26/40=16,25 (62,5%)	15x26/40=9,75 (62,5%)	26
ŽENE	25x14/40=8,75 (37,5%)	15x14/40=5,25 (37,5%)	14
UKUPNO	25	15	40

Statistička značajnost razlike između opaženih frekvencija i teoretskih frekvencija testira se pomoću  $\chi^2$  distribucije s  $df=(n-1)\times(m-1)$  stupnjeva slobode gdje  $n$  označava broj redaka, a  $m$  broj stupaca. U ovom primjeru  $\chi^2$  vrijednost se izračunava na sljedeći način:

$$\chi^2 = \sum_{g=1}^N \frac{(f_{o_g} - f_{t_g})^2}{f_{t_g}} = \frac{(16-16,25)^2}{16,25} + \frac{(10-9,75)^2}{9,75} + \frac{(9-8,75)^2}{8,75} + \frac{(5-5,25)^2}{5,25} = 0,03$$

$$df = (2-1) \cdot (2-1) = 1$$

$$\chi^2=0,03 \quad df=1 \quad p<0,864$$

Izračunata  $\chi^2$  vrijednost i pripadajuća minimalna pogreška statističkog zaključka upućuju da se udjeli studenata i studentica ne razlikuju statistički značajno.

- **McNemarovim  $\chi^2$  testom za dva zavisna uzorka** utvrđuje se statistička značajnost razlike jedne grupe entiteta u dva mjerena prema nekoj nominalnoj varijabli. Na ovaj način se mogu testirati promjene entiteta u određenom nominalnom svojstvu između dvije vremenske točke. Prije provođenja  $\chi^2$  testa za dva zavisna uzorka potrebno je izvršiti dvodimenzionalno grupiranje entiteta pri čemu svaka varijabla predstavlja jedno mjerjenje. Pri tome kategorija prvog retka tablice obvezno treba odgovarati kategoriji drugog stupca, a kategorija drugog retka kategoriji prvog stupca.

**Primjer:** Od ukupno 75 studenata prvi kolokvij iz KM-a je položilo 41, a drugi 58.

		2. KOLOKVIJ		
		NISU POLOŽILI	POLOŽILI	UKUPNO
1. KOLOKVIJ	POLOŽILI	7	34	41
	NISU POLOŽILI	10	24	34
	UKUPNO	17	58	75

Da li se uspješnost studenata na drugom kolokviju statistički značajno povećala u odnosu na prvi kolokvij?

## 19. Neparametrijske metode II.

		2. KOLOKVIJ		
		NISU POLOŽILI	POLOŽILI	UKUPNO
1. KOLOKVIJ	POLOŽILI	A	B	A+B
	NISU POLOŽILI	C	D	C+D
	UKUPNO	A+C	B+D	A+B+C+D

Frekvencija polja A i frekvencija polja D predstavljaju entitete koji su promijenili svoj uspjeh na drugom kolokviju u odnosu na prvi kolokvij. Pod pretpostavkom da nije došlo ni do kakvih promjena navedene frekvencije bi trebale biti jednake. S obzirom na to teoretska frekvencija za polja A i D iznosi  $(A+D)/2$ , a za polja B i C teoretske frekvencije su jednake opaženim frekvencijama. Teoretske frekvencije kategorija pod pretpostavkom da nije došlo ni do kakvih promjena iznose

		2. KOLOKVIJ		
		NISU POLOŽILI	POLOŽILI	UKUPNO
1. KOLOKVIJ	POLOŽILI	15,5	34	49,5
	NISU POLOŽILI	10	15,5	25,5
	UKUPNO	25,5	49,5	75

zato jer je  $(A+D)/2=(7+24)/2=15,5$ .

Statistička značajnost razlike između ovaženih frekvencija i teoretskih frekvencija se testira pomoću  $\chi^2$  distribucije s  $df=1$  stupnjem slobode. U ovom primjeru  $\chi^2$  vrijednost izračunava se na sljedeći način:

$$\chi^2 = \sum_{g=1}^N \frac{(f_{o_g} - f_{t_g})^2}{f_{t_g}} = \frac{(7-15,5)^2}{15,5} + \frac{(34-34)^2}{34} + \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(24-15,5)^2}{15,5} = 8,26$$

$$df = 1$$

$$\chi^2 = 8,26 \quad df = 1 \quad p < 0,004$$

Izračunata  $\chi^2$  vrijednost i pripadajuća minimalna pogreška statističkog zaključka upućuju da je došlo do statistički značajne ( $p < 0,05$ ) promjene u uspješnosti.

► Opća pravila za korištenje  $\chi^2$  testa:

- polja moraju biti disjunktna, odnosno niti jedan entitet ne smije biti član više od jednog polja/kategorije
- najviše 20% teoretskih frekvencija smije biti manje od 5, a niti jedna ne smije biti manja od 1.

## 19. Neparametrijske metode II.

- ▶ Pravila za korištenje  $\chi^2$  testa na  $2 \times 2$  tablicama:
  - sve teoretske frekvencije moraju biti veće od 10
  - ako je neka teoretska frekvencija manja od 10, ali veća od 5, neki autori predlažu da se koristi Yates-ovu korekciju za kontinuitet (svaku očekivenu frekvenciju koja je veća od teoretske potrebno je smanjiti za 0,5 te svaku očekivenu frekvenciju koja je manja od teoretske povećati za 0,5).

### Analiza razlika prema ordinalnim i kvantitativnim varijablama

- ▶ Primjena neparametrijskih metoda na intervalnim i omjernim varijablama najčešće uzrokuje gubitak informacija o entitetima (primjerice, ako se rezultati ispitanika u utrci na 100 metara transformiraju u rangove, gubi se informacija o veličini razlika među ispitanicima) stoga je takva primjena opravdana samo u slučaju kada prikupljeni podaci ne zadovoljavaju neku od prepostavki odabrane parametrijske metode.

**Tablica:** Parametrijske metode i odgovarajuće neparametrijske metode

PARAMETRIJSKA METODA	NEPARAMETRIJSKA METODA
t-test za nezavisne uzorke	Mann-Whitneyev U test
t-test za zavisne uzorke	Sign test/Wilcoxonov test ekvivalentnih parova
univariatna analiza varijance	Kruskal-Wallisov test

- ▶ **Mann-Whitneyev U test** je neparametrijska metoda kojom se utvrđuje statistička značajnost razlike između dva nezavisna uzorka entiteta u jednoj ordinalnoj ili kvantitativnoj varijabli. Originalni rezultati ispitanika se transformiraju u rangove te se izračuna suma rangova za svaku grupu zasebno. Što se grupe ispitanika prema sumi rangova više razlikuju, veća je vjerojatnost da je razlika između grupa statistički značajna.

**Primjer:** Šest učenika i četiri učenice izmjereno je nekim motoričkim testom. Mann-Whitneyevim U testom je potrebno utvrditi statističku značajnost razlike između učenika i učenica prema rezultatima u testu.

Rezultati se transformiraju u rangove pri čemu rang 1 označava ispitanika s najmanjim rezultatom. Potom se zbroje rangovi za svaku grupu posebno. Suma rangova učenika ( $T_1$ ) iznosi 42, a suma rangova učenica ( $T_2$ ) 13. Sumu rangova korisno je u svrhu interpretacije podjeliti s brojem entiteta u odgovarajućoj grupi, tj. izračunati prosječan rang grupe. Prosječan rang učenika iznosi  $42/6=7$ , a učenica  $13/4=3,25$ .

## 19. Neparametrijske metode II.

ISP.	Rezultati	Rang	Suma rangova T	Spol
2	150	10	T <sub>1</sub> = 42	M
3	100	5,5		M
4	120	8,5		M
7	120	8,5		M
9	99	4		M
10	100	5,5		M
1	70	2	T <sub>2</sub> = 13	Z
5	105	7		Z
6	94	3		Z
8	60	1		Z

Statistička značajnost razlike između grupa testira se putem normalne distribucije pri čemu se odgovarajuća z-vrijednost izračunava formulom

$$z = \left| \frac{T_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \frac{n_1n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1n_2(n+1)}{12}}} \right| \quad \text{ili} \quad z = \left| \frac{T_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \frac{n_1n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1n_2(n+1)}{12}}} \right|$$

gdje je

- $T_1$  i  $T_2$  - suma rangova prve, odnosno druge grupe
- $n_1$  i  $n_2$  - broj entiteta u prvoj, odnosno drugoj grupi
- $n$  - ukupan broj entiteta.

U prethodnom primjeru z-vrijednost se izračunava na sljedeći način:

$$z = \left| \frac{T_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \frac{n_1n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1n_2(n+1)}{12}}} \right| = \left| \frac{42 - \frac{6(6+1)}{2} - \frac{6 \cdot 4}{2}}{\sqrt{\frac{6 \cdot 4(10+1)}{12}}} \right| = 1,92$$

Izračunatoj z-vrijednosti odgovara minimalna pogreška statističkog zaključka  $p=0,053$  što upućuje na zaključak da se učenici i učenice ne razlikuju statistički značajno ni na razini pogreške 5% ni na razini pogreške 1%.

## 19. Neparametrijske metode II.

- **Sign test ili test predznaka** je neparametrijska metoda kojom se utvrđuje statistička značajnost razlike između dva zavisna uzorka entiteta u jednoj ordinalnoj ili kvantitativnoj varijabli (npr. jednog uzorka entiteta mjerеног u dvije vremenske točke). Za svakog ispitanika se izračuna razlika između rezultata u prvom i drugom mjerenu te se utvrdi predznak svake pojedine razlike. Što je veći nesrazmjer u broju pozitivnih i negativnih predznaka razlike, to je veća vjerojatnost da je razlika statistički značajna.

**Primjer:** Ocijenjena je izvedba koluta naprijed desetorice učenika na početku (I) i na kraju (F) školske godine. Sign testom je potrebno utvrditi statističku značajnost razlike između ocjena učenika u inicijalnom i finalnom stanju.

Izračuna se razlika između ocjena u finalnom i inicijalnom stanju (F-I) za svakog učenika te se utvrdi predznak svake razlike (pr.). Prebroje se pozitivni i negativni predznaci. Manji od dva prethodno utvrđena broja se testira pomoću tablice graničnih vrijednosti za test predznaka. Ako je utvrđeni broj predznaka s manjim udjelom manji ili jednak graničnoj vrijednosti u tablici prihvata se alternativna hipoteza.

ISP.	I	F	F-I	pr.
1	2	3	1	+
2	4	5	1	+
3	3	4	1	+
4	2	4	2	+
5	2	5	3	+
6	3	2	-1	-
7	2	1	-1	-
8	1	3	2	+
9	2	2	0	
10	1	4	3	+

U ovom je primjeru broj pozitivnih predznaka bio 7, a broj negativnih predznaka 2. Granična vrijednost za 9 entiteta (u obzir se ne uzimaju entiteti bez predznaka) na razini statističke pogreške 5% iznosi 1, a na razini 1% iznosi 0. Pošto utvrđeni broj predznaka s manjim udjelom iznosi 2, te je stoga veći od graničnih vrijednosti, nije moguće zaključiti da se učenici u inicijalnom i finalnom stanju statistički značajno razlikuju.

- **Wilcoxonov test ekvivalentnih parova** je neparametrijska metoda kojom se utvrđuje statistička značajnost razlike između dva zavisna uzorka entiteta u jednoj ordinalnoj ili kvantitativnoj varijabli (npr. jednog uzorka entiteta mjerенog u dvije vremenske točke). Uvjet za provođenje Wilcoxonovog testa jest da je varijabla kvantitativna (intervalna ili omjerna). Za svakog ispitanika se izračuna razlika između rezultata u prvom i drugom mjerenu te se absolutne vrijednosti razlika prema veličini rangiraju. Što je veći nesrazmjer između prvog i drugog mjerjenja u sumi rangova apsolutnih vrijednosti pozitivnih i negativnih razlika, veća je vjerojatnost da je razlika statistički značajna.

## 19. Neparametrijske metode II.

**Primjer:** Deset učenika je testirano nekim testom motorike na početku ( $I$ ) i na kraju ( $F$ ) školske godine. Wilcoxonovim testom ekvivalentnih parova potrebno je utvrditi statističku značajnost razlike između rezultata učenika u inicijalnom i finalnom stanju.

Izračuna se razlika između rezultata u finalnom i inicijalnom stanju ( $F-I$ ) za svakog učenika. Apsolutne vrijednosti razlika (bez obzira na predznak) se rangiraju ( $Rang$ ). Potom se zasebno zbroje rangovi razlika s pozitivnim predznakom i rangovi razlika s negativnim predznakom. Ako je manja suma rangova manja od granične vrijednosti u tablici graničnih vrijednosti za Wilcoxonov test prihvaća se alternativna hipoteza.

ISP.	I	F	F-I	Rang
1	115	120	5	1
2	145	195	50	8
3	120	110	-10	2,5
4	92	122	30	5
5	82	99	17	4
6	116	178	62	9
7	100	90	-10	2,5
8	70	105	35	6,5
9	104	188	84	10
10	110	145	35	6,5

U ovom primjeru suma rangova pozitivnih razlika iznosi 122, a negativnih 5. Granična vrijednost za 10 entiteta (u obzir se ne uzimaju entiteti bez promjene u rezultatu) na razini statističke pogreške 5% iznosi 8, a na razini 1% iznosi 3. Pošto utvrđena (manja) suma rangova iznosi 5, moguće je zaključiti da se učenici u inicijalnom i finalnom stanju statistički značajno razlikuju na razini pogreške 5%, ali ne i na razini pogreške 1%.

- **Kruskal-Wallisov test** je neparametrijska metoda kojom se utvrđuje statistička značajnost razlike između dva ili više nezavisnih uzoraka entiteta u jednoj ordinalnoj ili kvantitativnoj varijabli. Originalni rezultati ispitanika se transformiraju u rangove te se izračuna suma rangova za svaku grupu zasebno. Što se grupe ispitanika prema sumi rangova više razlikuju, veća je vjerojatnost da je razlika između grupa statistički značajna.

**Primjer:** Pet sportaša i pet nesportaša je izmjereno nekim motoričkim testom x. Kruskal-Wallisovim testom potrebno je testirati statističku značajnost razlike između sportaša i nesportaša prema rezultatima u testu. Rezultati se transformiraju u rangove pri čemu rang 1 označava ispitanika s najmanjim rezultatom. Potom se zbroje rangovi za svaku grupu zasebno. Suma rangova sportaša ( $T_s$ ) iznosi 40, a suma rangova nesportaša ( $T_n$ ) 15. Sumu rangova je u svrhu interpretacije korisno podijeliti s brojem entiteta u odgovarajućoj grupi, tj. izračunati prosječan rang grupe. Prosječan rang sportaša iznosi  $40/5=8$ , a nesportaša  $15/5=3$ .

## 19. Neparametrijske metode II.

ISP.	Rezultati	Rang	Sport
1	115	7	DA
2	145	10	DA
3	120	9	DA
4	92	3	NE
5	82	2	NE
6	116	8	DA
7	100	4	NE
8	70	1	NE
9	104	5	NE
10	110	6	DA

Statistička značajnost razlike između grupa testira se pomoću  $\chi^2$  distribucije s  $k-1$  stupnjeva slobode gdje je  $k$  broj grupa. Odgovarajuća  $H$  vrijednost izračunava se formulom

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \cdot \sum_{g=1}^k \frac{T_g^2}{n_g} - 3(n+1)$$

gdje je

- $n$  - ukupan broj entiteta
- $T_g$  - suma rangova grupe  $g$  ( $g=1, \dots, k$ )
- $n_g$  - broj entiteta grupe  $g$  ( $g=1, \dots, k$ ).

U ovom primjeru  $H$ -vrijednost izračunava se na sljedeći način:

$$H = \frac{12}{10(10+1)} \cdot \left( \frac{40^2}{5} + \frac{15^2}{5} \right) - 3(10+1) = 6,82$$

Izračunatoj  $H$ -vrijednosti odgovara minimalna pogreška statističkog zaključka  $p=0,009$  što upućuje na zaključak da se sportaši i nesportaši statistički značajno razlikuju na razini pogreške 1%.

### Postupci:

- ▶ **Jednodimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka:** Jednodimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Basic Statistics/Tables → Frequency Tables → Advanced → All distinct values.
- ▶  **$\chi^2$  test za jedan uzorak:** Prije provođenja  $\chi^2$  testa za jedan uzorak potrebno je kreirati novu matricu podataka te u jedan stupac unijeti opažene frekvencije utvrđene jednodimenzionalnim grupiranjem podataka, a u drugi teoretske frekvencije.  $\chi^2$  test za jedan uzorak izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Nonparametrics → Observed versus expected  $X^2$ .
- ▶ **Višedimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka:** Višedimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Basic Statistics/Tables → Tables and banners. Odabirom opcije Specify Tables (select variables) potrebno je odabrati varijable prema kojime će se izvršiti grupiranje.
- ▶  **$\chi^2$  test za dva ili više nezavisnih uzoraka:**  $\chi^2$  test za  $2 \times 2$  tablice izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Nonparametrics →  $2 \times 2$  Tables ( $X^2/V^2/\Phi^2$ , McNemar, Fisher exact). U predloženu tablicu je potrebno unijeti opažene frekvencije te odabrati opciju Summary. Iz tablice se može očitati  $\chi^2$  vrijednost i odgovarajuća pogreška statističkog zaključka (Chi-square ( $df=1$ )) ili Yatesova korigirana vrijednost (Yates corrected Chi-square).
- ▶  **$\chi^2$  test za dva zavisna uzorka:**  $\chi^2$  test za  $2 \times 2$  tablice izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Nonparametrics →  $2 \times 2$  Tables ( $X^2/V^2/\Phi^2$ , McNemar, Fisher exact). U predloženu tablicu je potrebno unijeti opažene frekvencije te odabrati opciju Summary. Iz tablice se mogu očitati rezultati  $\chi^2$  testa za dva zavisna uzorka (McNemar Chi-square (A/D)).
- ▶ **Mann-Whitneyev U test:** Mann-Whitney U test izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Nonparametrics → Comparing two independent samples (groups) → Mann-Whitney U test. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije Variables potrebno je označiti selektorsku varijablu (Indep. (grouping) variable) i jednu ili više zavisnih varijabli (Dependent variable list).
- ▶ **Sign test:** Sign test se izvodi slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Nonparametrics → Comparing two dependent samples (variables) → Sign test. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije Variables potrebno je označiti varijablu prvog mjerena (First variable list) i varijablu drugog mjerena (Second variable list).
- ▶ **Wilcoxonov test ekvivalentnih parova:** Wilcoxonov test ekvivalentnih parova izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Nonparametrics → Comparing two dependent samples (variables) → Wilcoxon matched pairs test. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije Variables potrebno je označiti varijablu prvog mjerena (First variable list) i varijablu drugog mjerena (Second variable list).
- ▶ **Kruskal-Wallisov test:** Kruskal-Wallisov test izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik Statistics → Nonparametrics → Comparing multiple indep. samples (groups) → Summary. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije Variables potrebno je označiti selektorsku varijablu (Indep. (grouping) variable) i jednu ili više zavisnih varijabli (Dependent variable list).

## 19. Neparametrijske metode II.

### Zadaci:

- ▶ Pokrenite datoteku *TA.sta!* Utvrdite frekvencije tjelesno aktivnih i tjelesno neaktivnih osoba u inicijalnom testiranju (*TA-I*)! Na temelju prethodno provedenog grupiranja podataka  $\chi^2$  testom utvrdite da li se udjeli tjelesno aktivnih i tjelesno neaktivnih osoba statistički značajno razlikuju na razini pogreške 5% !
- ▶ Pokrenite datoteku *TA.sta!* Utvrdite frekvencije tjelesno aktivnih i tjelesno neaktivnih muškaraca, te tjelesno aktivnih i tjelesno neaktivnih žena u inicijalnom testiranju (*TA-I*)! Na temelju prethodno provedenog grupiranja podataka  $\chi^2$  testom utvrdite da li se udjeli tjelesno aktivnih i tjelesno neaktivnih osoba statistički značajno razlikuju po spolu na razini pogreške 5% !
- ▶ Pokrenite datoteku *TA.sta!* Grupirajte podatke istovremeno prema tjelesnoj aktivnosti u inicijalnom mjerenu (*TA-I*) i tjelesnoj aktivnosti u finalnom mjerenu (*TA-F*)! Na temelju prethodno provedenog grupiranja podataka  $\chi^2$  testom utvrdite da li se udjeli tjelesno aktivnih i tjelesno neaktivnih osoba statistički značajno razlikuju u inicijalno i finalnom mjerenu na razini pogreške 5% !
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* Mann-Whitneyevim testom uz pogrešku  $p=0,01$  testirajte da li se učenici *III.* i *IV.* razreda (*RAZRED*) statistički značajno razlikuju prema rezultatima u varijabli *MPOL*!
- ▶ U datoteci *POD.sta* Sign testom uz pogrešku  $p=0,01$  testirajte da li se rezultati prvog mjerjenja (*MKUS\_I*) i drugog mjerjenja (*MKUS\_F*) statistički značajno razlikuju!
- ▶ U datoteci *POD.sta* Wilcoxonovim testom ekvivalentnih parova uz pogrešku  $p=0,01$  testirajte da li se rezultati prvog mjerjenja (*MKUS\_I*) i drugog mjerjenja (*MKUS\_F*) statistički značajno razlikuju!
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* Kruskal-Wallis testom uz pogrešku  $p=0,01$  testirajte da li se rezultati učenika *I.*, *II.*, *III.* i *IV.* razreda (*RAZRED*) statistički značajno razlikuju prema rezultatima u varijabli *MPOL*!

### Preporučena literatura

- ▶ Petz, B. (2002). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 249-273, 321-322, 327-330, 333-337, 338-341.
- ▶ Šošić, I. (2004). *Primijenjena statistika*. Zagreb: Školska knjiga, str. 331-335, 340-348, 352-366, 369-377.

# 19. Neparametrijske metode II.

## Pitanja i zadaci

1. Pri McNemarovom  $\chi^2$  testu za dva zavisna uzorka kategorija prvog retka tablice mora odgovarati...

- a) ... kategoriji prvog stupca tablice.
- b) ... kategoriji drugog stupca tablice.
- c) ... kategoriji drugog retka tablice.
- d) ... kategoriji trećeg retka tablice.

2. Pri provođenju  $\chi^2$  testa na 2x2 tablicama Yatesovu korekciju za kontinuitet preporučuje se provesti u slučaju kada je...

- a) ... neka teoretska frekvencija manja od 20, ali veća od 5.
- b) ... neka teoretska frekvencija manja od 5, ali veća od 1.
- c) ... neka teoretska frekvencija manja od 10, ali veća od 1.
- d) ... neka teoretska frekvencija manja od 10, ali veća od 5.

3. Koja od ponuđenih neparametrijskih metoda odgovara univarijatnoj analizi varijance?

- a) Wilcoxonov test ekvivalentnih parova
- b) Kruskal-Wallisov test
- c) Test predznaka
- d)  $\chi^2$  test

4. U datoteci POD.sta Sign testom utvrđite da li je razlika između rezultata inicijalnog (MDM\_I) i finalnog (MDM\_F) mjerjenja testa Skok udalj s mjesta statistički značajna! Koliko iznosi pripadajuća minimalna pogreška statističkog zaključka?

- a) 0,35
- b) 0,41
- c) 0,31
- d) 0,45

5. Prije provođenja  $\chi^2$  testa za jedan uzorak potrebno je izvršiti...

- a) ... dvodimenzionalno grupiranje podataka.
- b) ... izračunavanje parametara centralne tendencije.
- c) ... jednodimenzionalno grupiranje podataka.
- d) ... izračunavanje parametara disperzije.

6. Koliko iznosi broj stupnjeva slobode u McNemarovom  $\chi^2$  testu za dva zavisna uzorka?

- a) 1
- b) N-1
- c) N x M
- d) 2

7. Od ukupno 120 sportaša na prvom testiranju kriterij je zadovoljilo 45 sportaša, a na drugom testiranju 65 sportaša. Odgovarajuća tablica kontingencija izgleda ovako:

		2. TESTIRANJE	
		NE	DA
1. TESTIRANJE	DA	30	15
	NE	25	50

Ako se provodi McNemarov  $\chi^2$  test za dva zavisna uzorka, koliko iznosi teoretska frekvencija kategorije sportaša koji su i na prvom i na drugom testiranju zadovoljili kriterij (DA)?

- a) 30
- b) 20
- c) 15
- d) 60

8. Od ukupno 25 sportaša desetorica studiraju. Od ukupno 53 nesportaša dvadesetorica studiraju. Koliko iznosi broj stupnjeva slobode ako se statistička značajnost razlika u udjelima studenata među sportašima i nesportašima testira  $\chi^2$  testom za dva nezavisna uzorka?

- a) 1
- b) 2
- c) 78
- d) 77

9. Pri provođenju  $\chi^2$  testa vrijedi pravilo da sva polja tablice frekvencija ili tablice kontingencija moraju biti disjunktna, što znači da...

- a) ... u svakoj kategoriji moraju biti entiteti iz različitih uzoraka.
- b) ... u svakoj kategoriji moraju biti entiteti iz različitih populacija.
- c) ... niti jedan entitet ne smije biti član više od 20% kategorija.
- d) ... niti jedan entitet ne smije biti član više od jedne kategorije.

## 19. Neparametrijske metode II.

### Pitanja i zadaci

10. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Statistička značajnost razlike u Mann-Whitneyevom U testu testira se pomoću normalne distribucije.
- b) Statistička značajnost razlike u Sign testu testira se pomoću F-distribucije.
- c) Statistička značajnost razlike u Kruskal-Wallisovom testu testira se pomoću  $\chi^2$  distribucije.
- d) Statistička značajnost razlike u Wilcoxonov testu ekvivalentnih parova testira se pomoću tablice graničnih vrijednosti za Wilcoxonov test ekvivalentnih parova.

11. U datoteci *Ucenici-OS.sta* Mann-Whitneyevim U testom utvrđite da li je razlika između učenika (M) i učenica (Z) (varijabla *SPOL*) u varijabli *MPRR* statistički značajna! Koliko iznosi suma rangova grupe učenika (M)?

- a) 26742
- b) 23979
- c) 11099
- d) 160

12. Pri provođenju  $\chi^2$  testa na 2x2 tablicama vrijedi pravilo da...

- a) ... sve teoretske frekvencije moraju biti veće od 10.
- b) ... sve teoretske frekvencije moraju biti manje od 10.
- c) ... sve teoretske frekvencije moraju biti veće od 20.
- d) ... sve teoretske frekvencije moraju biti manje od 20.

13. Koja od ponuđenih neparametrijskih metoda odgovara t-testu za zavisne uzorke?

- a) Kruskal-Wallisov test
- b) Mann-Whitneyev U test
- c) McNemarov test
- d) Sign test

14. Prije provođenja  $\chi^2$  testa za tri nezavisna uzorka potrebno je izvršiti...

- a) ... jednodimenzionalno grupiranje podataka.
- b) ... izračunavanje parametara centralne tendencije.
- c) ... dvodimenzionalno grupiranje podataka.
- d) ... trodimenzionalno grupiranje podataka.

15. Od ukupno 78 ispitanika 25 su sportaši, a 53 nesportaši. Koliko iznosi teoretska frekvencija kategorije nesportaša pod pretpostavkom potpuno slučajne raspodjele?

- a) 39
- b) 26,5
- c) 68%
- d) 47

16. U datoteci *Ucenici-OS.sta* Kruskal-Wallisovim testom utvrđite da li je razlika između I., II., III., i IV. razreda (RAZRED) u varijabli *AOP* statistički značajna! Koliko iznosi prosječan rang IV. razreda?

- a) 17571
- b) 4392,75
- c) 222,42
- d) 72,71

17. Pri provođenju  $\chi^2$  testa na 4x4 tablicama vrijedi pravilo da...

- a) ... najviše 50% teoretskih frekvencija smije biti manje od 2, a niti jedna ne smije biti manja od 1.
- b) ... najviše 10% teoretskih frekvencija smije biti manje od 5, a niti jedna ne smije biti manja od 2.
- c) ... najviše 10% teoretskih frekvencija smije biti manje od 2, a niti jedna ne smije biti veća od 5.
- d) ... najviše 20% teoretskih frekvencija smije biti manje od 5, a niti jedna ne smije biti manja od 1.

18. Prije provođenja McNemarovog  $\chi^2$  testa za dva zavisna uzorka potrebno je izvršiti...

- a) ... dvodimenzionalno grupiranje podataka.
- b) ... jednodimenzionalno grupiranje podataka.
- c) ... izračunavanje parametara centralne tendencije.
- d) ... izračunavanje koeficijenta korelacije.

# 19. Neparametrijske metode II.

## Pitanja i zadaci

19. Od ukupno 120 sportaša na prvom testiranju kriterij je zadovoljilo 45 sportaša, a na drugom testiranju 65 sportaša. Odgovarajuća tablica kontingenčija izgleda ovako:

		2. TESTIRANJE	
		NE	DA
1. TESTIRANJE	DA	30	15
	NE	25	50

Ako se provodi McNemarov  $\chi^2$  test za dva zavisna uzorka, koliko iznosi teoretska frekvencija kategorije sportaša koji su na prvom testiranju zadovoljili kriterij (DA), a na drugom nisu (NE)?

- a) 40
- b) 30
- c) 22,5
- d) 60

20. Koja od ponuđenih neparametrijskih metoda odgovara t-testu za nezavisne uzorke?

- a) Sign test
- b) Wilcoxonov test ekvivalentnih parova
- c) Mann-Whitneyev U test
- d) McNemarov test

21. Statistička značajnost razlike jedne grupe entiteta u dva mjerena prema nekoj nominalnoj varijabli se testira...

- a) ... Wilcoxonovim testom ekvivalentnih parova
- b) ... McNemarovim  $\chi^2$  testom za dva zavisna uzorka.
- c) ...  $\chi^2$  testom za dva ili više nezavisnih uzoraka.
- d) ...  $\chi^2$  testom za jedan uzorak.

22. Od ukupno 78 ispitanika 25 su sportaši, a 53 nesportaši. Koliko iznosi broj stupnjeva slobode ako se statistička značajnost razlike u udjelu sportaša i nesportaša u uzorku testira  $\chi^2$  testom za jedan uzorak?

- a) 1
- b) 2
- c) 77
- d) 78

23. Broj entiteta u grupi sportaša je 22, a u grupi nesportaša 38. Suma rangova u nekoj varijabli utvrđena Mann-Whitneyevim U testom za grupu sportaša iznosi 656, a za grupu nesportaša 1175. Koliko iznosi prosječan rang grupe nesportaša?

- a) 1,79
- b) 0,63
- c) 30,92
- d) 19,58

24. Pokrenite datoteku TA.sta!  $\chi^2$  testom uz Yatesovu korekciju za kontinuitet utvrdite da li se udjeli tjelesno aktivnih i tjelesno neaktivnih osoba (TA-F) statistički značajno razlikuju po spolu (SPOL)! Koliko iznosi pripadajuća minimalna pogreška statističkog zaključka?

- a) 0,62
- b) 0,64
- c) 0,67
- d) 0,69

25. Statistička značajnost odstupanja frekvencija utvrđenih jednodimenzionalnim grupiranjem kvalitativnih podataka od frekvencija očekivanih pod određenom hipotezom testira se...

- a) ...  $\chi^2$  testom za dva ili više nezavisnih uzoraka.
- b) ... Mann-Whitneyevim U testom.
- c) ...  $\chi^2$  testom za jedan uzorak.
- d) ... McNemarovim  $\chi^2$  testom za dva zavisna uzorka.

26. U datoteci POD.sta Wilcoxonovim testom ekvivalentnih parova utvrdite da li je razlika između rezultata inicijalnog (MDM\_I) i finalnog (MDM\_F) mjerena testa Skok udalj s mjesta statistički značajna! Koliko iznosi pripadajuća minimalna pogreška statističkog zaključka?

- a) 0,45
- b) 0,35
- c) 0,31
- d) 0,41

## 19. Neparametrijske metode II.

### Pitanja i zadaci

27. Na temelju tablice kontingencija provedite McNemarov  $\chi^2$  test za dva zavisna uzorka!

		2. TESTIRANJE	
		NE	DA
1. TESTIRANJE	DA	30	15
	NE	25	50

Koliko iznosi pripadajuća minimalna pogreška statističkog zaključka?

- a) 0,157
- b) 0,001
- c) 0,067
- d) 0,034

28. Od ukupno 25 sportaša desetorica studiraju. Od ukupno 53 nesportaša, dvadesetorica studiraju. Koliko iznosi teoretska frekvencija kategorije studenata nesportaša pod pretpostavkom potpuno slučajne raspodjele?

- a) 16,99
- b) 39
- c) 20,38
- d) 15

29. Statistička značajnost razlika između dva ili više nezavisnih uzoraka entiteta prema nekoj nominalnoj varijabli testira se...

- a) ...  $\chi^2$  testom za jedan uzorak.
- b) ... Mann-Whitneyevim U testom.
- c) ...  $\chi^2$  testom za dva ili više nezavisnih uzoraka.
- d) ... Kruskal-Wallisovim testom.

30. Pokrenite datoteku TA.sta!  $\chi^2$  testom utvrdite da li se udjeli muškaraca (M) i žena (Ž) (varijabla SPOL) u uzorku statistički značajno razlikuju! Koliko iznosi izračunata  $\chi^2$  vrijednost?

- a) 1,63
- b) 1,32
- c) 2,26
- d) 3,22

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19

# 20

*Neparametrijske metode III.*

---

## Sadržaj poglavlja

### TEORIJSKE OSNOVE

#### *Analiza relacija između nominalnih varijabli*

- Cramerov  $\phi$  koeficijent
- odnos  $\chi^2$  vrijednosti i Cramerovog  $\phi$  koeficijenta
- testiranje statističke značajnosti Cramerovog  $\phi$  koeficijenta

#### *Analiza relacija između ordinalnih i kvantitativnih varijabli*

- Spearmanov koeficijent rang korelacije
- primjena Spearmanovog koeficijenta rang korelacije na kvantitativnim varijablama
- testiranje statističke značajnosti Spearmanovog koeficijenta rang korelacije
- određivanje broja stupnjeva slobode pri testiranju statističke značajnosti Spearmanovog koeficijenta rang korelacije
- utjecaj veličine uzorka na statističku značajnost Spearmanovog koeficijenta rang korelacije
- utjecaj veličine Spearmanovog koeficijenta rang korelacije na pripadajuću statističku značajnost

#### *Analiza relacija između dihotomne i kvantitativne varijable*

- Point-biserijalni koeficijent korelacije
- dihotomna varijabla
- odnos Point-biserijalnog i Pearsonovog koeficijenta korelacije
- zamjena oznaka dihotomne varijable numeričkim kodovima

- interpretacija veličine povezanosti između varijabli na temelju Point-biserijalnog koeficijenta korelacije
- testiranje statističke značajnosti Point-biserijalnog koeficijenta korelacije
- određivanje broja stupnjeva slobode pri testiranju statističke značajnosti Point-biserijalnog koeficijenta korelacije
- utjecaj veličine uzorka na statističku značajnost Point-biserijalnog koeficijenta korelacije
- utjecaj veličine Point-biserijalnog koeficijenta korelacije na pripadajuću statističku značajnost

### STATISTICA

#### *Izračunavanje Cramerovog $\phi$ koeficijenta*

#### *Izračunavanje Spearmanovog koeficijenta rang korelacije*

#### *Testiranje statističke značajnosti Spearmanove rang korelacije*

#### *Izračunavanje Point-biserijalnog koeficijenta korelacije*

#### *Testiranje statističke značajnosti Point-biserijalnog koeficijenta korelacije*

## 20. Neparametrijske metode III.

### Analiza relacija između nominalnih varijabli

- **Cramerovim  $\phi$  koeficijentom** izražava se povezanost između dviju nominalnih varijabli. Koeficijent se kreće u intervalu od 0 do 1 pri čemu 0 označava nultu, a 1 potpunu povezanost analiziranih varijabli. Prije izračunavanja Cramerovog  $\phi$  koeficijenta potrebno je provesti  $\chi^2$  test za dva ili više nezavisnih uzoraka. Ako se  $\chi^2$  testom utvrdi da je razlika između uzoraka statistički značajna onda je i Cramerov  $\phi$  koeficijent statistički značajan. Cramerov  $\phi$  koeficijent izračunava se formulom:

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(s-1)}}$$

gdje je

- $\chi^2$  - izračunata  $\chi^2$  vrijednost
- $s$  - broj kategorija varijable s manjim brojem kategorija
- $N$  - suma opaženih frekvencija.

**Primjer:** Od 26 studenata koji su pristupili praktičnom dijelu ispita iz KM-a položilo ih je 10, a od 14 studentica položilo ih je 5.

SPOL/USPJEH NA ISPITU	NISU POLOŽILI	POLOŽILI	UKUPNO
MUŠKARCI	16 (62%)	10 (38%)	26
ŽENE	9 (64%)	5 (36%)	14
UKUPNO	25	15	40

Kolika je povezanost spola i uspešnosti na praktičnom dijelu ispita iz KM-a i da li je statistički značajna na razini pogreške 5% ?

$\chi^2$  testom izračunati su sljedeći parametri  $\chi^2=0,03$ ,  $df=1$ ,  $p=0,864$  te su uvršteni u formulu za Cramerov  $\phi$  koeficijent

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(s-1)}} = \sqrt{\frac{0,03^2}{40(2-1)}} = \sqrt{\frac{0,009}{40}} = 0,005$$

Cramerov  $\phi$  koeficijent iznosi 0,005. Proporcija pogreške ( $p=0,864$ ) upućuje na zaključak da povezanost između varijabli nije statistički značajna.

### Analiza relacija između ordinalnih i kvantitativnih varijabli

- **Spearmanov koeficijent rang korelacije ( $\rho$ )** je neparametrijski koeficijent koji odražava veličinu povezanosti između dviju ordinalnih varijabli. Ako se Spearmanovim koeficijentom korelaciije želi utvrditi povezanost između dviju kvantitativnih varijabli prethodno ih je potrebno svesti na ordinalnu skalu, odnosno pripadajuće rezultate transformirati u rangove. Spearmanova rang korelacija izračunava se na temelju rangova, a kreće se između -1 i 1 pri čemu -1 označava potpunu negativnu, 0 nultu, a 1 potpunu pozitivnu povezanost. Spearmanov koeficijent rang korelaciije ( $\rho$ ) izračunava se formulom:

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} - x_{2i})^2}{n(n^2 - 1)}$$

gdje je

- $x_{1i}$  - rang entiteta  $i$  u varijabli  $x_1$ , a  $i=1,\dots,n$
- $x_{2i}$  - rang entiteta  $i$  u varijabli  $x_2$ , a  $i=1,\dots,n$
- $n$  - broj entiteta.

**Primjer:** Deset učenika je testirano nekim testom motorike na početku ( $x_1$ ) i na kraju ( $x_2$ ) školske godine. Spearmanovim koeficijentom rang korelaciije je potrebno utvrditi povezanost između rezultata učenika u inicijalnom i u finalnom stanju.

ISP.	Rezultat $x_1$	Rezultat $x_2$	Rang $x_1$	Rang $x_2$	$x_1-x_2$	$(x_1-x_2)^2$
1	115	120	7	5	2	4
2	145	195	10	10	0	0
3	120	110	9	4	5	25
4	92	122	3	6	-3	9
5	82	99	2	2	0	0
6	116	178	8	8	0	0
7	100	90	4	1	3	9
8	70	105	1	3	-2	4
9	104	188	5	9	-4	16
10	110	145	6	7	-1	1

Originalni rezultati ispitanika transformiraju se u rangove. Izračuna se razlika između ranga u prvoj i ranga u drugoj varijabli za svakog ispitanika ( $x_1-x_2$ ). Izračunate razlike se kvadriraju i zbroje. Suma kvadrata razlika u rangovima u ovom primjeru iznosi 68.

## 20. Neparametrijske metode III.

U ovom se primjeru Spearmanov koeficijent rang korelacijske ( $\rho$ ) izračunava na sljedeći način:

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} - x_{2i})^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 68}{10(10^2 - 1)} = 0,59$$

- ▶ Statistička značajnost Spearmanovog koeficijenta rang korelacijske testira se pomoću t-distribucije s  $df=n-2$  stupnjeva slobode. Vrijednost koja se uspoređuje s kritičnom t-vrijednošću izračunava se formulom

$$t = \rho \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}}$$

gdje je

- $t$  - vrijednost koja se distribuira prema t-distribuciji s  $df=n-2$
- $\rho$  - Spearmanov koeficijent rang korelacijske
- $n$  - broj entiteta.

**Primjer:** Spearmanov koeficijent rang korelacijske izračunat na uzorku od 10 entiteta iznosi 0,59. Potrebno je utvrditi statističku značajnost izračunatog koeficijenta.

$$t = \rho \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}} = 0,59 \sqrt{\frac{10-2}{1-0,59^2}} = 2,07$$

$$df = n - 2 = 10 - 2 = 8$$

Minimalna pogreška s kojom je moguće zaključiti da je izračunati koeficijent statistički značajan iznosi 0,072 odnosno 7,2%.

### Analiza relacija između dihotomne i kvantitativne varijable

- ▶ **Point-biserijalni koeficijent korelacijske** je mera povezanosti između dihotomne varijable i kvantitativne varijable. **Dihotomna varijabla** je naziv za nominalnu varijablu s dva moguća pojedinačna oblika obilježja (npr. spol). Point-biserijalni koeficijent korelacijske izračunava se jednako kao i Pearsonov koeficijent korelacijske, uz uvjet da se označi kategorija dihotomne varijable prethodno zamijene proizvoljno odabranim numeričkim kodovima (npr. za varijablu spol: muškarac=1, žena=2). Ako je zadovoljen prethodno navedeni uvjet, Point-biserijalni koeficijent korelacijske ( $r_{pb}$ ) moguće je izračunati formulom

## 20. Neparametrijske metode III.

$$r_{pb} = \frac{\sum_{i=1}^n (z_{x_i} z_{y_i})}{n}$$

gdje je

- $z_{xi}$  - standardizirani kod entiteta  $i$  u dihotomnoj varijabli  $x$
- $z_{yi}$  - standardizirani rezultat entiteta  $i$  u kvantitativnoj varijabli  $y$
- $n$  - broj entiteta.

- ▶ Point-biserialni koeficijent korelacijske funkcije kreće se u intervalu između -1 i 1. Pri utvrđivanju veličine povezanosti analiziranih varijabli dovoljno je interpretirati apsolutnu vrijednost izračunatog koeficijenta. Apsolutna vrijednost jednaka 1 označava potpunu, a 0 nikakvu povezanost između varijabli.
- ▶ Pošto je jedna od varijabli nominalna (ne postoje razlike u vrijednosti između kategorija) negativna vrijednost Point-biserialnog koeficijenta korelacijske funkcije ne upućuje na negativnu povezanost varijabli.
- ▶ Negativna vrijednost Point-biserialnog koeficijenta korelacijske funkcije upućuje na zaključak da entiteti iz kategorije čija je oznaka zamijenjena većom numeričkom vrijednošću postižu niže, a entiteti iz kategorije čija je oznaka zamijenjena manjom numeričkom vrijednošću više rezultate u kvantitativnoj varijabli.
- ▶ Pozitivna vrijednost koeficijenta upućuje na zaključak da entiteti iz kategorije čija je oznaka zamijenjena većom numeričkom vrijednošću postižu više, a entiteti iz kategorije čija je oznaka zamijenjena manjom numeričkom vrijednošću niže rezultate u kvantitativnoj varijabli.

**Primjer:** Šest učenika ( $m$ ) i pet učenica ( $z$ ) je testirano nekim testom motorike  $x$ . Potrebno je utvrditi povezanost spola i rezultata na provedenom testu motorike Point-biserialnim koeficijentom korelacijske funkcije.

ISP.	spol	x	k <sub>spol</sub>	Z <sub>spol</sub>	Z <sub>x</sub>	Z <sub>spol · Zx</sub>
1	m	165	1	-0,77	0,64	-0,50
2	m	195	1	-0,77	1,53	-1,18
3	z	110	2	1,16	-0,97	-1,13
4	m	138	1	-0,77	-0,15	0,12
5	z	99	2	1,16	-1,30	-1,51
6	z	143	2	1,16	0,00	0,00
7	z	120	2	1,16	-0,68	-0,79
8	m	118	1	-0,77	-0,74	0,57
9	m	198	1	-0,77	1,61	-1,25
10	m	145	1	-0,77	0,06	-0,04

## 20. Neparametrijske metode III.

Originalne oznake ispitanika u dihotomnoj varijabli se zamijene numeričkim kodovima ( $k_{spol}$ ) te se izračunaju standardizirane vrijednosti u dihotomnoj ( $Z_{spol}$ ) i u kvantitativnoj ( $z_x$ ) varijabli. Potom se izračunaju umnošci z-vrijednosti za svakog ispitanika. Zbroj umnožaka z-vrijednosti u ovom primjeru iznosi -5,71. Prethodno izračunat zbroj umnožaka standardiziranih vrijednosti entiteta u dihotomnoj i kvantitativnoj varijabli se uvrsti u formulu

$$r_{pb} = \frac{\sum_{i=1}^n (z_{x_i} z_{y_i})}{n} = \frac{-5,71}{10} = -0,57$$

Point-biserialni koeficijent korelaciije iznosi -0,571 što ukazuje na veliku povezanost spola i rezultata na provedenom motoričkom testu. Negativan predznak koeficijenta upućuje na zaključak da pripadnici muškog spola postižu više rezultate u ovom motoričkom testu nego žene.

Statistička značajnost Point-biserialnog koeficijenta korelaciije testira se pomoću t-distribucije s  $df=n-2$  stupnjeva slobode. Vrijednost koja se uspoređuje s kritičnom t-vrijednosti izračunava se formulom

$$t = r_{pb} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{pb}^2}}$$

gdje je

- $t$  - vrijednost koja se distribuira prema t-distribuciji s  $df=n-2$
- $r_{pb}$  - Point-biserialni koeficijent korelaciije
- $n$  - broj entiteta.

**Primjer:** Point-biserialni koeficijent korelaciije izračunat na uzorku od 10 entiteta iznosi -0,57. Potrebno je utvrditi statističku značajnost izračunatog koeficijenta.

$$t = r_{pb} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{pb}^2}} = -0,57 \sqrt{\frac{10-2}{1+0,57^2}} = -2,90$$

$$df = n - 2 = 10 - 2 = 8$$

Minimalna pogreška s kojom je moguće zaključiti da je izračunati koeficijent statistički značajan iznosi 0,02, odnosno 2%.

## 20. Neparametrijske metode III.

StatSoft



### Postupci:

- ▶ **Višedimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka:** Višedimenzionalno grupiranje kvalitativnih podataka izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics → Basic Statistics/Tables → Tables and banners*. Odabirom opcije *Specify Tables (select variables)* potrebno je odabratи varijable prema kojиме će se izvršiti grupiranje.
- ▶ **Izračunavanje Cramerovog  $\phi$  koeficijenta:**  $\chi^2$  test za  $2 \times 2$  tablice izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics → Nonparametrics → 2 × 2 Tables (X2/V2/Phi2, McNemar, Fisher exact)*. U predloženu tablicu potrebno je unijeti opažene frekvencije te odabratи opciju *Summary*. Iz tablice se može očitati  $\chi^2$  vrijednost i odgovarajuća pogreška statističkog zaključka (*Chi-square (df=1)*) ili Yatesova korigirana vrijednost (*Yates corrected Chi-square*), te kvadrirana vrijednost Cramerovog  $\phi$  koeficijenta (*Phi-square*).
- ▶ **Izračunavanje Spearmanovog koeficijenta rang korelacije:** Izračunavanje Spearmanovog koeficijenta rang korelacije izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics → Nonparametrics → Correlations (Spearman, Kendall tau, gamma) → Spearman rank R*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *One variable list* potrebno je označiti dvije ili više varijabli na temelju kojih se želi izračunati korelacijska matrica.
- ▶ **Testiranje statističke značajnosti Spearmanove rang korelacije:** Testiranje statističke značajnosti Spearmanovog koeficijenta rang korelacije izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics → Nonparametrics → Correlations (Spearman, Kendall tau, gamma) → Spearman rank R*. U traku *p-level for highlighting* potrebno je upisati željenu proporciju pogreške statističkog zaključka. Sve korelacije koje su statistički značajne na razini upisane pogreške će u korelacijskoj matrici biti označene crvenom bojom.
- ▶ **Izračunavanje Point-biserialnog koeficijenta korelacije:** Izračunavanje Point-biserialnog koeficijenta korelacije izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics → Basic Statistics/Tables → Correlation matrices*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *One variable list* potrebno je označiti dvije ili više varijabli na temelju kojih se želi izračunati korelacijska matrica. Prije opisanog postupka potrebno je zamijeniti tekstualne oznake dihotomne varijable numeričkim kodovima pomoću dijaloškog okvira *Replace* koji se pokreće kombinacijom tipki *Ctrl+H*.
- ▶ **Testiranje statističke značajnosti koeficijenta  $r_{pb}$ :** Testiranje statističke značajnosti Point-biserialnog koeficijenta korelacije izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics → Basic Statistics/Tables → Correlation matrices → Options*. U traku *p-level for highlighting* potrebno je upisati željenu proporciju pogreške statističkog zaključka. Sve korelacije koje su statistički značajne na razini upisane pogreške će u korelacijskoj matrici biti označene crvenom bojom.

## 20. Neparametrijske metode III.

### Zadaci:

- ▶ Pokrenite datoteku *TA.sta!* Utvrđite frekvencije tjelesno aktivnih i tjelesno neaktivnih muškaraca te tjelesno aktivnih i tjelesno neaktivnih žena u inicijalnom testiranju (*TA-I*)!
- ▶ Na temelju prethodno provedenog grupiranja podataka  $\chi^2$  testom utvrđite kolika je povezanost između spola i tjelesne aktivnosti u inicijalnom testiranju (*TA-I*) i testirajte statističku značajnost utvrđene povezanosti!
- ▶ U datoteci *Judo.sta* izračunajte Spearmanov koeficijent korelacije između varijabli *BML* i *SDM*!
- ▶ U datoteci *Judo.sta* testirajte statističku značajnost korelacije između varijabli *SDM* i *BML* uz pogrešku  $p=1\%$ .
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* izračunajte korelaciju između spola (*SPOL*) i kožnog nabora nadlaktice (*ANN*)!
- ▶ U datoteci *Ucenici-OS.sta* testirajte statističku značajnost korelacije između varijabli *SPOL* i *ANN* uz pogrešku  $p=5\%$  !

### Preporučena literatura

- ▶ Petz, B. (2002). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jastrebarsko: Naklada Slap, str. 199-206, 223-225, 227-229.
- ▶ Šošić, I. (2004). *Primijenjena statistika*. Zagreb: Školska knjiga, str. 424-427.

## 20. Neparametrijske metode III.

### Pitanja i zadaci

1. Tri košarkaša su izmjerena s dva testa motorike. Košarkaš Toni u jednom testu ima rang 3 i u drugom testu rang 3. Košarkaš Dino u jednom testu ima rang 2 i u drugom testu rang 2. Košarkaš Franjo u jednom testu ima rang 1 i u drugom testu rang 1. Koliko iznosi odgovarajući Spearmanov koeficijent rang korelacije?

- a) 1
- b) -1
- c) 100
- d) 0

2. U datoteci *Ucenici-OS.sta* utvrdite povezanost između spola (SPOL) i rezultata u testu *Skok udalj s mjesta (MSDM)*! Koliko iznosi apsolutna vrijednost Point-biserialnog koeficijenta korelacije?

- a) 0,18
- b) 0,16
- c) 0,19
- d) 0,20

3. Ako je Cramerov  $\varphi$  koeficijent jednak 1, kakva je povezanost između analiziranih varijabli?

- a) potpuna
- b) nepotpuna pozitivna
- c) nulta
- d) nepotpuna pozitivna

4. Cramerov  $\varphi$  koeficijent je statistički značajan ako je...

- a) ... razlika između očekivanih i slučajnih teoretskih frekvencija utvrđena odgovarajućim  $\chi^2$  testom veća od 1.
- b) ... istovjetnost očekivanih i slučajnih teoretskih frekvencija utvrđena odgovarajućim  $\chi^2$  testom statistički značajna.
- c) ... istovjetnost očekivanih i slučajnih teoretskih frekvencija utvrđena odgovarajućim  $\chi^2$  testom veća od 1.
- d) ... razlika između očekivanih i slučajnih teoretskih frekvencija utvrđena odgovarajućim  $\chi^2$  testom statistički značajna.

5. Povezanost između dvije ordinalne varijable može se izraziti...

- a) ... t-testom za zavisne uzorke.
- b) ... Cramerovim  $\varphi$  koeficijentom.
- c) ... Spearmanovim koeficijentom rang korelacije.
- d) ... Point-biserialnim koeficijentom korelacije.

6. Ako se Spearmanovim koeficijentom rang korelacije želi utvrditi povezanost između dviju kvantitativnih varijabli potrebno je...

- a) ... udružiti rezultate u varijablama i transformirati ih u zajedničke rangove.
- b) ... izvršiti jednodimenzionalno grupiranje podataka u dvije kategorije za svaku varijablu zasebno.
- c) ... rezultate u svakoj varijabli zasebno transformirati u rangove.
- d) ... izvršiti dvodimenzionalno grupiranje podataka u četiri kategorije za obje varijable zajedno.

7. Spearmanov koeficijent rang korelacije -1...

- a) ... označava nepotpunu negativnu korelaciju.
- b) ... ne postoji.
- c) ... označava najmanju moguću povezanost između dvije varijable.
- d) ... označava potpunu negativnu korelaciju.

8. Pokrenite datoteku *POD.sta!* Utvrdite povezanost varijabli *ATV\_I* i *MPUS\_I* Spearmanovim koeficijentom rang korelaciјe! Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Izračunati koeficijent korelacije statistički je značajan na razini pogreške 5%, ali nije statistički značajan na razini pogreške 1%.
- b) Izračunati koeficijent korelacije statistički je značajan na razini pogreške 1%, ali nije statistički značajan na razini pogreške 5%.
- c) Izračunati koeficijent korelacije nije statistički značajan ni na razini pogreške 5% ni na razini pogreške 1%.
- d) Izračunati koeficijent korelacije statistički je značajan na razini pogreške 5% i na razini pogreške 1%.

## 20. Neparametrijske metode III.

### Pitanja i zadaci

9. Testiranje statističke značajnosti Point-biserialnog koeficijenta korelacije vrši se pomoću...

- a) ... t-distribucije s  $df=n-2$  stupnjeva slobode.
- b) ...  $\chi^2$  distribucije s  $df=N-1$  stupnjeva slobode.
- c) ... t-distribucije s  $df=n-1$  stupnjeva slobode.
- d) ...  $\chi^2$  distribucije s  $df=N-2$  stupnjeva slobode.

10. Spearmanov koeficijent rang korelacije kreće se u intervalu od...

- a) ... 0 do 1.
- b) ... -100 do 100.
- c) ... 0 do 100.
- d) ... -1 do 1.

11. U datoteci *Ucenici-OS.sta* utvrdite povezanost između spola (SPOL) i rezultata u testu Skok udalj s mesta (MSDM)! Koja je od navedenih tvrdnji točna?

- a) Izračunati koeficijent korelacije statistički je značajan na razini pogreške 5%, ali nije statistički značajan na razini pogreške 1%.
- b) Izračunati koeficijent korelacije statistički je značajan na razini pogreške 5% i na razini pogreške 1%.
- c) Izračunati koeficijent korelacije statistički je značajan na razini pogreške 1%, ali nije statistički značajan na razini pogreške 5%.
- d) Izračunati koeficijent korelacije nije statistički značajan ni na razini pogreške 5% ni na razini pogreške 1%.

12. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Dihotomna varijabla je nominalna.
- b) Dihotomna varijabla ima dva moguća pojavnna oblika.
- c) Dihotomna varijabla je ordinalna.
- d) Dihotomna varijabla je kvalitativna.

13. Point-biserialni koeficijent korelacija -1...

- a) ... označava potpunu negativnu povezanost nominalne i kvantitativne varijable.
- b) ... ne postoji.
- c) ... označava nepotpunu negativnu povezanost nominalne i kvantitativne varijable.
- d) ... označava potpunu povezanost nominalne i kvantitativne varijable.

14. Koja od navedenih tvrdnji nije točna?

- a) Cramerov  $\phi$  koeficijent bit će veći što je  $\chi^2$  vrijednost veća.
- b) Cramerov  $\phi$  koeficijent bit će veći što je zbroj umnožaka standardiziranih vrijednosti veći.
- c) Cramerov  $\phi$  koeficijent bit će veći što je suma ojačenih frekvencija manja.
- d) Cramerov  $\phi$  koeficijent bit će veći što je manji broj kategorija varijable s manjim brojem kategorija.

15.  $\chi^2$  testom za dva nezavisna uzorka provedenom na dvije dihotomne varijable izračunati su sljedeći parametri:  $\chi^2=2,43$   $N=95$   $df=1$   $p=0,119$ . Koliko iznosi odgovarajući Cramerov  $\phi$  koeficijent?

- a) 0,16
- b) 0,02
- c) 0,01
- d) 0,11

16. Prije izračunavanja Point-biserialnog koeficijenta korelacijske potrebno je...

- a) ... zamijeniti označke kategorija dihotomne varijable proizvoljno odabranim numeričkim kodovima.
- b) ... izvršiti grupiranje podataka kvantitativne varijable u dvije kategorije i dodijeliti im proizvoljno odabранe numeričke kodove.
- c) ... transformirati rezultate u kvantitativnoj varijabli u odgovarajuće rangove.
- d) ... transformirati označke kategorija dihotomne varijable u proizvoljno odabranе tekstualne kodove.

## 20. Neparametrijske metode III.

### Pitanja i zadaci

17. Povezanost između dihotomne i kvantitativne varijable može se izraziti...

- a) ...  $\chi^2$  testom za jedan uzorak.
- b) ... Cramerovim  $\phi$  koeficijentom.
- c) ... Point-biserialnim koeficijentom korelacije.
- d) ... Spearmanovim koeficijentom rang korelacija.

18. Vjerovatnost da je Spearmanov koeficijent rang korelacija statistički značajan je...

- a) ... manja što je broj entiteta u uzorku veći i manja što je apsolutna vrijednost izračunate korelacije veća.
- b) ... veća što je broj entiteta u uzorku veći i veća što je apsolutna vrijednost izračunate korelacije veća.
- c) ... veća što je broj entiteta u uzorku veći i manja što je apsolutna vrijednost izračunate korelacije veća.
- d) ... manja što je broj entiteta u uzorku veći i veća što je apsolutna vrijednost izračunate korelacije veća.

19. Point-biserialni koeficijent korelacije može se izračunati jednakom formulom kao i...

- a) ... Cramerov  $\phi$  koeficijent.
- b) ... koeficijent determinacije.
- c) ... Pearsonov koeficijent korelacija.
- d) ... prva glavna komponenta.

20. Tri košarkaša su izmjerena s dva testa motorike. Košarkaš Toni u jednom testu ima rang 1, a u drugom testu rang 3. Košarkaš Dino u jednom testu ima rang 2 i u drugom testu rang 2. Košarkaš Franjo u jednom testu ima rang 3, a u drugom testu rang 1. Koliko iznosi odgovarajući Spearmanov koeficijent rang korelacija?

- a) 1
- b) -1
- c) 100
- d) 0

21. Point-biserialni koeficijent korelacije kreće se u intervalu od...

- a) ... 0 do 1.
- b) ... -3 do 3.
- c) ... -1 do 1.
- d) ... 0 do 100.

22. Povezanost između dviju nominalnih varijabli može se izraziti...

- a) ... Point-biserialnim koeficijentom korelacija.
- b) ... Spearmanovim koeficijentom rang korelacija.
- c) ... Cramerovim  $\phi$  koeficijentom.
- d) ... Pearsonovim koeficijentom korelacija.

23.  $\chi^2$  testom za dva nezavisna uzorka provedenom na dvije dihotomne varijable izračunati su sljedeći parametri:  $\chi^2=2,43$   $N=95$   $df=1$   $p=0,119$ . Koliko iznosi minimalna pogreška s kojom je moguće zaključiti da je odgovarajući Cramerov  $\phi$  koeficijent statistički značajan?

- a) 1%
- b) 1,19%
- c) 0,119%
- d) 11,9%

24. Kojim znakom se označava Spearmanov koeficijent rang korelacija?

- a)  $\phi$
- b)  $\rho$
- c)  $\chi$
- d)  $\lambda$

25. Testiranje statističke značajnosti Spearmanovog koeficijenta rang korelacija vrši se pomoću...

- a) ...  $\chi^2$  distribucije.
- b) ... t-distribucije.
- c) ... normalne distribucije.
- d) ... f-distribucije.

## 20. Neparameetrijske metode III.

### Pitanja i zadaci

26. Pokrenite datoteku *TA.sta!* Utvrdite da li je tjelesna aktivnost/neaktivnost (*TA-F*) povezana sa spolom (*SPOL*)! Koliko iznosi odgovarajući Cramerov  $\phi$  koeficijent?

- a) 0,078
- b) 0,087
- c) 0,78
- d) 0,87

27. Prije izračunavanja Cramerovog  $\phi$  koeficijenta potrebno je provesti...

- a) ...  $\chi^2$  test za dva ili više nezavisnih uzoraka.
- b) ...  $\chi^2$  test za jedan uzorak.
- c) ... t-test za nezavisne uzorke.
- d) ... t-test za zavisne uzorke.

28. Cramerov  $\phi$  koeficijent kreće se u intervalu od...

- a) ... -1 do 1.
- b) ... 0 do 1.
- c) ... -100 do 100.
- d) ... 1 do 100.

29. Pokrenite datoteku *TESTZ.sta!* Koliko iznosi Spearmanov koeficijent rang korelacije između varijabli *VISI* i *TEZI*?

- a) 0,85
- b) 0,83
- c) 0,84
- d) 0,86

30. Ako je Spearmanov koeficijent rang korelacije jednak 0,01, povezanost između analiziranih varijabli sigurno je...

- a) ... potpuna.
- b) ... nulta.
- c) ... nepotpuna pozitivna.
- d) ... statistički značajna.

1. Bala, G. (1986). Logičke osnove metoda za analizu podataka iz istraživanja u fizičkoj kulturi. Novi Sad: Vlastita naklada.
2. Bartlett, M.S. (1941). The statistical significance of canonical correlations. *Biometrika*, 32, 29-38.
3. Cattell, R. B. (1966). The scree test for the number of factors. *Multivariate Behavioral Research*, 1, 245-276.
4. Crawford, C. B. & G. A. Ferguson (1970). A general rotation criterion and its use in orthogonal rotation. *Psychometrika*, 35 (3), 321-332.
5. Cronbach, L.J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of test. *Psychometrika*, 16, 297-334.
6. Dizdar, D. (1997). Vrednovanje jednog metodološkog postupka za prognozu rezultata u nekim sportovima. (Magistarski rad). Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
7. Dizdar, D. (1999). RTT.stb – Program za utvrđivanje metrijskih karakteristika kompozitnih mjernih instrumenata. U D. Milanović (ur.), *Zbornik radova 2. međunarodne znanstvene konferencije „Kineziologija za 21. stoljeće“*, Dubrovnik (str. 450-454). Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
8. Dizdar, D. (2006.). Kvantitativne metode. Zagreb: Kinezološki fakultet.
9. Dizdar, D., N. Viskić-Štalec (2002). Algorithm and program for quantitative analysis of changes under the model of differences. 3th International scientific conference “Kinesiology new perspectives”, pp. 656-659. Opatija, Croatia, 25-29.09.2002.
10. Dizdar, D. i T. Maršić (2000). Priručnik za korištenje programskega sustava STATISTICA. Zagreb: Dizidor.

## Literatura

11. Fédération internationale de gymnastique (2007). Code of points – women's artistic gymnastics. Preuzeto 1. 12. 2008. s <http://figdocs.lx2.sportcentric.com>
12. Fulgosi, A. (1984). Faktorska analiza. Zagreb: Školska knjiga.
13. Galton, F. (1888). Co-relations and their measurement, chiefly from anthropometric data. Proceedings of the Royal Society 45: 135-145.
14. Gjenero, I. i V. Vojvodić-Rosenzrieg (2000). Linearna algebra. Zagreb: Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika.
15. Guilford, J. P. (1968). Osnove psihološke i pedagoške statistike. Beograd: Savremena administracija.
16. Harman, H. H. (1960). Modern factor analysis. Chicago: University of Chicago Press.
17. Heimer, S. i sur. (1997). Praktikum kineziološke fiziologije. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
18. Hotelling, H. (1931). The generalization of Student's ratio, Annals of Mathematical Statistics, 2, 360-378.
19. Hotelling, H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables into principal componentes. Journal of Educational Psychology, 24, 417-441; 498-520.
20. Hotelling, H. (1936). Relations between two sets variates. Biometrika, 28, 321-377.
21. IPAQ Research Committee (2005). International Physical Activity Questionnaire. Preuzeto 1. 6. 2008. s <http://www.ipaq.ki.se/>
22. Ivanković, D., J. Božikov, J. Kern, B. Kopjar, G. Luković, S. Vuletić (1989). Osnove statističke analize za medicinare. Zagreb: Medicinski fakultet.
23. Kaiser, H.F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. Psychometrika, 25, 187-200.

## Literatura

24. Kendall, M. G. (1975). Rank correlation methods (4th ed.). London: Griffin.
25. Krković, A. (1978). Elementi psihometrije 1. Zagreb: Filozofski fakultet.
26. Krković, A., K. Momirović, B. Petz (1966). Odabrana poglavlja iz psihometrije i neparametrijske statistike. Zagreb: Društvo psihologa Hrvatske, Republički zavod za zapošljavanje.
27. Kolesarić, V. i B. Petz (1999). Statistički rječnik. Jastrebarsko: Naklada Slap.
28. Langer, M. (2004.). Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows. Zagreb: Miš.
29. Mejovšek, M. (2003). Uvod u metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima. Jastrebarsko: Naklada Slap.
30. Metikoš, D., Hofman, E., Prot, F., Pintar, Ž., Oreb, G. (1989). Mjerenje bazičnih motoričkih dimenzija sportaša. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
31. Milas, G. (2005). Istraživačke metode u psihologiji i drugim društvenim znanostima. Jastrebarsko: Naklada Slap.
32. Mišigoj-Duraković, M. (2008). Kinantropologija. Zagreb: Kineziološki fakultet.
33. Momirović, K. (1977). Dvije alternativne definicije homogenosti mjernog instrumenta. Psihologija, 1, 87-90.
34. Momirović, K. (1984). Kvantitativne metode za programiranje i kontrolu treninga. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
35. Momirović, K., F. Prot, D. Dugić, Z. Knezović, K. Bosnar, N. Erjavec, M. Gredelj, J. Kern, V. Dobrić, J. Radaković (1987). Metode, algoritmi, i programi za analizu kvantitativnih i kvalitativnih promjena. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.

## Literatura

36. Momirović, K., B. Wolf i D. Popović (1999). Uvod u teoriju mjerenja: Interne mjerne karakteristike kompozitnih testova. Priština: Fakultet za fizičku kulturu Univerziteta u Prištini.
37. Momirović, K., M. Gredelj i L. Sirovicza (1977). Multivarijatna analiza. Zagreb: ZPN.
38. Mraković, M. (1992). Uvod u sistematsku kineziologiju. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
39. Nunnally, J. C. (1967). Psychometric theory. New York: McGraw-Hill.
40. Ostrow, A.C. (1996). Directory of Psychological Tests in the Sport and Exercise Sciences. Morgantown, WV: Fitness Information Technology.
41. Pauše, Ž. (1993). Uvod u matematičku statistiku. Zagreb: Školska knjiga.
42. Pavić, I. (1970). Statistička teorija i primjena. Zagreb: Tehnička knjiga.
43. Pearson, E.S. (1939). Student as a statistician, Biometrika, 30, 210-250.
44. Pearson, K. (1894). Contributions to the mathematical theory of evolution. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A, 185, 71-110.
45. Petz, B. (2002.). Osnovne statističke metode za nematematičare. Jastrebarsko: Naklada Slap.
46. Rao, C. R. (1951). An asymptotic expansion of the distribution of Wilks' criterion. Bulletin of the International Statistical Institute, 33, 177-181.
47. Rao, C. R. (1952). Advanced statistical methods in biometric research. New York: Wiley.
48. Rao, C. R. (1965). Linear statistical inference and its applications. New York: Wiley.

## Literatura

49. Spearman, C. (1904). General intelligence, objectively determined and measured. *American Journal of Psychology*, 15: 201-293
50. Student (1908). The Probable Error of Mean. *Biometrika*, 6, 1-25.
51. Šošić, I. (2004). Primijenjena statistika. Zagreb: Školska knjiga.
52. Šošić, I. i V. Sedar (1992). Uvod u statistiku. Zagreb: Školska knjiga.
53. Štalec, J. i K. Momirović (1971). Ukupna količina valjane varijance kao osnov kriterija za određivanje broja značajnih glavnih komponenata. *Kineziologija*, 1(1), 79-81.
54. Thurstone, L. L. (1931). Multiple factor analysis. *Psychological Review*, 38, 406-427.
55. Thurstone, L. L. (1947). Multiple factor analysis. Chicago: University of Chicago.
56. Vasilj, Đ. (2000). Biometrika i eksperimentiranje u bilinogojstvu. Zagreb: Hrvatsko agronomsko društvo.
57. Viskić - Štalec, N. (1991). Elementi faktorske analize. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
58. Viskić-Štalec, N.(1987). Usporedba različitih komponentnih i faktorskih tehnika u određivanju latentnih motoričkih dimenzija. (Disertacija) Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu Sveučilišta u Zagrebu.
59. Viskić-Štalec, N. (1997). Osnove statistike i kineziometrije. U D. Milanović (ur.), Priručnik za sportske trenere (str. 349-432). Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
60. Yule, G. U. (1897). On the theory of correlation. *Journal of the Royal Statistical Society*, 60, 812-854.