

Kvantitativne metode

Dražan Dizdar



MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU



Dražan Dizdar

Kvantitativne metode



Zagreb, 2006.

<i>Nakladnik:</i>	Kineziološki fakultet Sveučilišta u Zagrebu
<i>Za nakladnika:</i>	prof. dr. sc. Dinko Vuleta, dekan
<i>Recenzenti:</i>	prof. dr. sc. Nataša Viskić-Štalec, Kineziološki fakultet Sveučilišta u Zagrebu
	prof. dr. sc. Milko Mejovšek, Edukacijsko-rehabilitacijski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
	prof. dr. sc. Branko Nikolić, Edukacijsko-rehabilitacijski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
	doc. dr. sc. Damir Vukičević, Fakultet Prirodoslovno- matematičkih znanosti i kineziologije Sveučilišta u Splitu
<i>Redaktura i lektura:</i>	Željka Jaklinović-Fressl, prof., dipl. bibl.
<i>Računalna priprava:</i>	doc. dr. sc. Dražan Dizdar
<i>Oblikovanje naslovnice:</i>	Srećko Sertić
<i>Tisak:</i>	GRAFIČKI ZAVOD HRVATSKE d.o.o.
<i>Naklada:</i>	1000 primjeraka

Zagreb, studeni 2006.

CIP – Katalogizacija u publikaciji

Nacionalna i sveučilišna knjižnica - Zagreb

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 621759

ISBN-10 953-6378-58-2

ISBN-13 978-953-6378-58-6

Odobreno kao sveučilišni udžbenik odlukom Senata Sveučilišta u Zagrebu, na prijedlog Povjerenstva za znanstveno - nastavnu literaturu Sveučilišta u Zagrebu, odlukom br. 02-3248/4-2005, od 14 studenog 2006.

Sveučilišni udžbenik je objavljen uz novčanu potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Copyright © 2006. Kineziološki fakultet Sveučilišta u Zagrebu. Sva prava su zaštićena. Niti jedan dio ove knjige ne može se ponovno tiskati, kopirati ili koristiti u bilo kojem obliku, elektroničkom, mehaničkom ili na bilo koji drugi način poznat sada ili izumljen u budućnosti, uključujući fotokopiranje i snimanje ili bilo kakvu pohranu informacija, bez pismene suglasnosti izdavača.

Predgovor

Osnovna je namjena ove knjige da posluži kao udžbenik za predmet *Kvantitativne metode studentima Kineziološkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu*, ali i studentima ostalih fakulteta koji u svom studijskom programu imaju metode opisane u ovoj knjizi.

Poticaj u pisanju bila mi je činjenica da za predmet *Kvantitativne metode* do sada na *Kineziološkom fakultetu* nije napisan sveobuhvatan udžbenik pa je ona i odredila njegov opseg i sadržaj. U pisanju sam nastojao (vodeći računa da je većina studenata *Kineziološkog fakulteta* nesklona matematici) nastavno gradivo predstaviti na razumljiv i prihvatljiv način prilagođavajući razinu izlaganja mogućnostima i potrebama potencijalnih korisnika.

Knjiga se sastoji od četiri poglavlja. U prvome su poglavlju obrađeni osnovni elementi matrične algebre koji su potrebni za lakši opis, objašnjenje i razumijevanje pojedinih dijelova gradiva, osobito multivarijatnih metoda.

U drugom poglavlju opisani su osnovni statistički pojmovi, metode i postupci za uređivanje i grafičko prikazivanje podataka, potom deskriptivni parametri, teoretske distribucije, KS-test za testiranje normaliteta distribucije, standardizacija podataka, procjena aritmetičke sredine populacije, t-test, univarijatna analiza varijance i korelacijska analiza.

Osnove multivarijatnih metoda (regresijska analiza, komponentni model faktorske analize, kanonička analiza i diskriminacijska analiza) opisane su u trećem poglavlju.

Četvrto poglavlje posvećeno je osnovama kineziometrije u okviru kojega su opisani osnovni kineziometrijski pojmovi, konstrukcija mjernih instrumenata i metrijske karakteristike (pouzdanost, objektivnost, homogenost, osjetljivosti i valjanost).

Koristim priliku osobito se zahvaliti svojoj profesorici prof. dr. sc. Nataši Viskić-Štalec i najbližim suradnicima mr. sc. Darku Katoviću, doc. dr. sc. Goranu Markoviću, Željku Pedišiću, prof., i Toši Maršiću, prof., koji su mi iznimno pomogli savjetima, sugestijama i potporom. Zahvaljujem i recezentima na korisnim primjedbama i sugestijama koje su pomogle u otklanjanju propusta koje nisam uočio. Lekturom i korekturom znatan doprinos kvaliteti teksta dala je Željka Jaklinović-Fressl, prof., na čemu joj iskazujem zahvalnost. Duboku zahvalnost dugujem svojoj obitelji na razumijevanju i potpori.

Iskreno se nadam da će knjiga pomoći studentima diplomskog i poslijediplomskog sveučilišnog studija kineziologije u svladavanju osnova kvantitativnih metoda za analizu podataka te im tako poslužiti kao "odskočna daska" za postizanje više razine metodološke naobrazbe, a time i kvalitete znanstveno-istraživačkoga rada na području kineziologije.

Zagreb, ljeto 2006.

Autor

Sadržaj

Predgovor	9
Uvod	11
1. Elementi matrice algebre	11
1.1. Pojam i vrste matrica	12
1.1.1. Pojam vektora i matrica	12
1.1.2. Vrste matrica	14
1.2. Računske operacije s matricama	16
1.2.1. Zbrajanje i oduzimanje matrica	16
1.2.2. Množenje matrica	17
1.2.3. Množenje matrice skalarom	19
1.2.4. Hadamarovo množenje matrica	19
1.2.5. Trag matrice	20
1.2.6. Norma vektora	20
1.2.7. Udaljenost između dva vektora	22
1.2.8. Kut između dva vektora	22
1.2.9. Linearna kombinacija vektora	23
1.2.10. Determinanta matrice	24
1.2.11. Inverz matrice	27
1.2.12. Pseudoinverz matrice	31
1.2.13. Ortonormirane i ortogonalne matrice	31
1.2.14. Rang i linearna zavisnost matrice	32
1.2.15. Rješavanje sustava linearnih jednačini u matricnom obliku	33
1.2.16. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori	35
1.2.17. Neka obilježja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora	36
2. Osnovne statističke metode	39
2.1. Pojam i podjela statističkih metoda	40
2.1.1. Statistika	40
2.1.2. Podjela statističkih metoda	41
2.2. Osnovni statistički pojmovi	44
2.2.1. Podatak	44
2.2.2. Entitet	45
2.2.3. Populacija i uzorak entiteta	45
2.2.4. Vrste uzoraka entiteta	46
2.2.5. Varijabla	47
2.2.6. Vrste varijabli	48
2.2.7. Populacija i uzorak varijabli	49
2.2.8. Matrica podataka	49
2.3. Osnovni postupci za uređivanje i prikazivanje podataka	50
2.3.1. Grupiranje podataka	52
2.3.2. Grupiranje i grafičko prikazivanje kvalitativnih podataka	54
2.3.3. Grupiranje i grafičko prikazivanje kvantitativnih podataka	56
2.4. Deskriptivni pokazatelji	63
2.4.1. Mjere centralne tendencije ili središnje mjere	63
2.4.1.1. Aritmetička sredina ili prosječna vrijednost	64
2.4.1.2. Mod ili dominantna vrijednost	70
2.4.1.3. Medijan ili centralna vrijednost	72
2.4.2. Mjere varijabilnosti ili disperzije	74
2.4.2.1. Totalni raspon	75
2.4.2.2. Interkvartil	76
2.4.2.3. Varijanca i standardna devijacija	77
2.4.2.4. Koeficijent varijabilnosti	85
2.4.3. Mjere asimetrije distribucije (skewness)	86
2.4.4. Mjere izduženosti distribucije (kurtosis)	88

2.5. Teoretske distribucije	90
2.5.1. Elementarni pojmovi teorije vjerojatnosti	91
2.5.1.1. Pravilo množenja	91
2.5.1.2. Pravilo permutacija	92
2.5.1.3. Pravilo varijacija	95
2.5.1.4. Pravilo kombinacija	97
2.5.1.5. Vjerojatnost	98
2.5.2. Diskretne teoretske distribucije	99
2.5.2.1. Uniformna distribucija	99
2.5.2.2. Binomna distribucija	100
2.5.2.3. Poissonova distribucija	102
2.5.3. Kontinuirane teoretske distribucije	104
2.5.3.1. Normalna distribucija	104
2.5.3.2. Studentova t-distribucija	107
2.5.3.3. Snedecorova F-distribucija	109
2.5.3.4. χ^2 -distribucija	110
2.6. K-S test normaliteta distribucije	111
2.7. Standardizacija podataka (z - vrijednost)	114
2.7.1. Standardizacija varijabli matičnom algebrom	120
2.8. Procjena aritmetičke sredine populacije	124
2.9. t-test	135
2.9.1. t-test za nezavisne uzorke	137
2.9.2. t-test za zavisne uzorke	145
2.10. Univarijatna analiza varijance	150
2.11. Korelacija	160
2.11.1. Korelacija kao kosinus kuta dvaju vektora	171
2.11.2. Računanje korelacija matičnom algebrom	173
2.11.3. Testiranje značajnosti koeficijenta korelacije	177
3. Multivarijatne metode	181
3.1. Regresijska analiza	182
3.1.1. Jednostavna linearna regresijska analiza	185
3.1.2. Višestruka (multipla) regresijska analiza	199
3.1.3. Testiranje značajnosti regresijskog modela	205
3.1.4. Provjera kvalitete regresijskog modela	208
3.1.5. Dekompozicija varijance jednog skupa varijabli drugim skupom	210
3.2. Faktorska analiza	214
3.2.1. Komponentni model faktorske analize	219
3.2.1.1. Kriteriji za odabir značajnog broja faktora	224
3.2.1.2. Kumulativiteti i unikviteti	227
3.2.1.3. Rotacije	228
3.2.1.4. Procjena rezultata entiteta na faktorima	237
3.3. Kanonička analiza	238
3.3.1. Testiranje značajnosti kanoničkog modela	244
3.4. Diskriminacijska analiza	245
3.4.1. Multivarijatna analiza varijance	246
3.4.2. Diskriminacijska analiza	251
3.4.3. Testiranje značajnosti diskriminacijskog modela	256
4. Osnove kineziometrije	259
4.1. Osnovni kineziometrijski pojmovi	260
4.1.1. Mjerenje	261
4.1.2. Elementi mjerenja	262
4.1.2.1. Objekt mjerenja	262
4.1.2.2. Predmet mjerenja	262
4.1.2.3. Mjerilac	263
4.1.2.4. Mjerne skale	263
4.2. Konstrukcija mjernih instrumenata	267
4.2.1. Definiranje predmeta mjerenja	267
4.2.2. Odabir odgovarajućeg tipa mjernog instrumenta	269

4.2.3. Izbor podražajnih situacija.....	270
4.2.4. Standardizacija mjernog postupka.....	271
4.2.5. Utvrđivanje metrijskih karakteristika.....	272
4.3. Metrijske karakteristike.....	274
4.3.1. Pouzdanost.....	274
4.3.1.1. Klasični model mjerenja.....	275
4.3.1.2. Guttmanov model mjerenja.....	293
4.3.2. Objektivnost.....	301
4.3.3. Homogenost.....	302
4.3.4. Osjetljivost.....	306
4.3.5. Valjanost.....	308
4.3.5.1. Dijagnostička valjanost.....	308
4.3.5.2. Pragmatička valjanost.....	311
Tablice.....	315
Literatura.....	325
Kazalo pojmova.....	330
Pojmovnik.....	333
O autoru.....	357

Uvod

Utvrđivanje zakonitosti po kojima se odvijaju prirodne i društvene pojave osnovni je cilj znanstvenih istraživanja. Za ostvarenje tog cilja znanstvenici se koriste odgovarajućim postupcima (znanstvenim metodama) koji omogućavaju prikupljanje podataka o istraživanom problemu, njihovu obradu, testiranje odgovarajućih hipoteza te formuliranje zakonitosti. Skup postupaka pomoću kojih se provode znanstvena istraživanja, odnosno rješavaju znanstveni problemi, čini *metodologiju* (grč. *methodos* – put, traženje) znanstvenog istraživanja. Pritom valja odmah napomenuti da se pod metodologijom ne podrazumjeva samo skup svih metoda koje se koriste u znanstvenim istraživanjima, već i njihova logička osnova. Stoga, Milas (2005:14) definira metodologiju kao „sustav pravila na temelju kojih se provode istraživački postupci, izgrađuju teorije i obavlja njihova provjera“, a cilj joj je „opis i analiza temeljnih metoda što se koriste u različitim znanstvenim disciplinama, upoznavanje s njihovim prednostima i ograničenjima, pretpostavkama na kojima počivaju i mogućim ishodima njihove upotrebe“.

Kineziološka metodologija predstavlja međuzavisni skup disciplina koje proučavaju principe, sustave i postupke mjerenja, prikupljanja i obrade podataka i upotrebe elektroničkih računala u rješavanju tipičnih kinezioloških problema. To su:

- *kineziometrija* - proučava probleme mjerenja, odnosno, konstrukcije i evaluacije mjernih instrumenata za procjenu kinezioloških fenomena
- *kineziološka statistika* - proučava metode za transformaciju prikupljenih podataka u oblik koji omogućava jasnije prikazivanje i interpretaciju te testiranje postavljenih hipoteza
- *kineziološka informatika* - proučava mogućnosti primjene elektroničkih računala za analizu podataka u kineziološkim istraživanjima te u pojedinim područjima primijenjene kineziologije (Mraković, 1992).

Navedene se discipline na sveučilišnom diplomskom studiju Kineziološkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu poučavaju u okviru predmeta *Kvantitativne metode*. Osnovni je cilj predmeta upoznavanje studenata s teoretskim osnovama metoda za analizu podataka (osnovne statističke metode i multivarijatne metode) i teorijom mjerenja (kineziometrija) te primjenom informatičke tehnologije

(statističke aplikacije, mrežni informacijski servisi i protokoli) u području kineziologije. Stoga je osnovna namjena ove knjige da studentima Kineziološkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu posluži kao udžbenik za predmet Kvantitativne metode, ali i svima onima koji u svom stručnom ili znanstvenom radu koriste metode opisane u ovoj knjizi.

1

Elementi matrične algebre

Matrična algebra najpogodnija je za objašnjavanje temeljnih postupaka multivarijatne analize podataka jer se opsežni računski postupci jednostavnije i kraće opisuju matričnom algebrom nego elementarnom (skalarnom) algebrom. Stoga je potrebno usvojiti one elemente matrične algebre koji su neophodni za razumijevanje pojedinih dijelova gradiva, osobito onih u kojima se putem složenih sustava linearnih jednažbi u multivarijantnim metodama polazni podaci kondenziraju i transformiraju u oblik koji omogućava jasniji uvid i interpretaciju istraživanog problema. Pritom valja naglasiti da su u ovom poglavlju krajnje pojednostavljeno predstavljeni dijelovi matrične algebre (koji su nepohodni za usvajanje jednog dijela metoda opisanih u ovoj knjizi) te da je za svladavanje ovog, vrlo zahtjevnog dijela matematike, potrebno koristiti dodatnu literaturu.

1.1

Pojam i vrste matrica

1.1.1. Pojam vektora i matrica

Dio matematike koji se bavi računskim operacijama s matricama naziva se *matrična algebra*. *Matrica* je skup brojeva smještenih u n redaka i m stupaca. Matrice se označavaju velikim masno otisnutim (*bold*) slovima **A**, **B**, **C**,..., dok se elementi matrice (brojevi koji se nalaze u matrici) označavaju malim slovima s odgovarajućim indeksima $a_{11}, a_{12}, \dots$

Oznaka matrice

$\mathbf{A} =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Element a_{1m} nalazi se u 1.-retku i m -stupcu

Primjer: Matrica **A** reda 3×4 ima 3 retka i 4 stupca.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ -4 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ako matrica ima više redaka i jedan stupac zove se *vektor*. Vektori se označavaju malim masno otisnutim (*bold*) slovima **a**, **b**, **c**,... Dakle, vektor je posebna vrsta matrice.

Primjer: Vektor **c** reda 3×1 ima tri retka i jedan stupac.

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Pod nazivom *vektor* podrazumijeva se vektor stupca (dakle, više redaka i jedan sutpac), a *vektori retka* smatraju se transponiranim vektorima stupca i označavaju se tako da se oznaci vektora doda eksponent ^T.

Primjer: Transponirani vektor $\mathbf{c}^T$ reda 1×3 ima jedan redak i tri stupca.

$$\mathbf{c}^T = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Za dva vektora stupca ili vektora retka kaže se da su jednaki onda i samo onda ako su im svi korespodentni¹ elementi jednaki.

Primjer: Vektori **a** i **b** su jednaki jer su istog reda i svi su im korespodentni elementi jednaki.

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

Osnovne računske operacije s vektorima izvode se identičano kao i s matricama, o čemu će više riječi biti u poglavlju 1.2.

¹ korespodentni elementi matrica **A** i **B** su: a_{11} i b_{11} , a_{12} i b_{12} , a_{13} , i b_{13} ... a_{nm} i b_{nm}

1.1.2. Vrste matrica

Kvadratna matrica

Matrica s jednakim brojem redaka i stupaca naziva se *kvadratna matrica*.

Primjer:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Transponirana matrica

Matricu koja je dobivena iz neke matrice A zamjenom stupaca recima, ili redaka stupcima naziva se *transponirana matrica* i označava se kao A^T . Postupak se zove transponiranje matrice.

Primjer: Matrica A je reda 3×4

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a transponirana matrica A^T je reda 4×3

$$A^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Simetrična matrica

Matrica A je simetrična ako je jednaka transponiranoj matrici A^T . Dakle, ako je

$$A = A^T,$$

matrice su simetrične. Odnosno, ako se elementi matrice A označe s a_{ij} , onda za sve elemente simetrične matrice vrijedi da je

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{gdje je } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Primjer:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad A^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Dijagonalna matrica

Kvadratna matrica, kojoj su u dijagonali² elementi različiti od nule, dok su svi ostali elementi jednaki nuli, naziva se *dijagonalna matrica*.

Primjer:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Skalarna matrica

Skalarna matrica je posebna vrsta dijagonalne matrice kod koje su dijagonalni elementi jednaki.

Primjer:

$$S = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Matrica identiteta

Posebna vrsta skalarne matrice je *matrica identiteta*. Matrica identiteta je skalarna matrica u kojoj su dijagonalni elementi jednaki 1.

Primjer:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

² pritom se uvijek misli na tzv. glavnu dijagonalu $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

1.2

Računske operacije s matricama

1.2.1. Zbrajanje i oduzimanje matrica

Matrice se mogu zbrajati i oduzimati uz uvjet da su istog reda. Zbraja se tako da se zbroje korespondentni elementi matrica. Općenito, dvije se matrice zbrajaju na sljedeći način:

$$A + B = C = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdot & \cdot & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdot & \cdot & a_{2m} + b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nm} + b_{nm} \end{vmatrix}$$

Primjer:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad A + B = C = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 4 \\ 8 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Ista pravila vrijede i za oduzimanje.

1.2.2. Množenje matrica

Matrice se množe tako da se zbrajaju produkti elemenata iz retka prve matrice i elemenata iz stupca druge matrice uz uvjet da je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice. Općenito vrijedi ako je

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix},$$

onda je

$$A \cdot B = C = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = c_{11} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = c_{12} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = c_{13} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = c_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = c_{22} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = c_{23} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = c_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = c_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} = c_{33} \\ a_{41} \cdot b_{11} + a_{42} \cdot b_{21} = c_{41} & a_{41} \cdot b_{12} + a_{42} \cdot b_{22} = c_{42} & a_{41} \cdot b_{13} + a_{42} \cdot b_{23} = c_{43} \end{vmatrix}$$

Dakle, množenjem matrice **A** reda $n \times m$ matricom **B** reda $m \times k$ dobije se matrica **C** reda $n \times k$.

Primjer: Ako je

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

onda je

$$A \cdot B = C = \begin{vmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 7 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 4 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 0 \end{vmatrix}$$

odnosno

$$A \cdot B = C = \begin{vmatrix} 15 & 14 & 13 & 22 \\ 27 & 34 & 19 & 22 \end{vmatrix}$$

Množenje bilo koje matrice matricom identiteta ostavlja matricu nepromijenjenom.

$$I \cdot A = A$$

Množenjem nekog vektora $\mathbf{a}$ nekim transponiranim vektorom $\mathbf{b}^T$ (pritom vektori moraju imati jednak broj elemenata) uvijek se dobije kvadratna matrica jednaka redu tih vektora.

Primjer: Ako je

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b}^T = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

onda je

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 12 \\ 2 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Množenjem nekog transponiranog vektora $\mathbf{a}^T$ (vektor retka) nekim vektorom $\mathbf{b}$ (vektor stupca) uvijek se dobije skalar. Dakle,

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Primjer: Ako je $\mathbf{a}^T = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, a $\mathbf{b} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$, onda je

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = (1 \cdot 3) + (-3 \cdot 2) + (4 \cdot 0) = -3.$$

Osim toga, za množenje matrica vrijede sljedeća pravila:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

ako je $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, ne mora biti ni $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ni $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

1.2.3. Množenje matrice skalarom

Matrica $\mathbf{A}$ se množi nekim skalarom φ tako da se svaki element matrice $\mathbf{A}$ pomnoži skalarom φ . Općenito vrijedi

$$\varphi \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \varphi a_{11} & \varphi a_{12} & \cdot & \cdot & \varphi a_{1m} \\ \varphi a_{21} & \varphi a_{22} & \cdot & \cdot & \varphi a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi a_{1n} & \varphi a_{2n} & \cdot & \cdot & \varphi a_{nm} \end{vmatrix}$$

Množenjem matrice skalarom dobije se isti rezultat kao kod množenja matrice skalarnom matricom.

Primjer: Ako je

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{vmatrix},$$

onda je

$$3 \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 6 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 15 & 6 & 18 \\ 3 & 9 & 9 \\ 18 & 15 & 15 \end{vmatrix}$$

1.2.4. Hadamarovo množenje matrica

Hadamarovo množenje dviju matrica izvodi se na istovjetan način kao i zbrajanje dviju matrica, odnosno množenjem korespondentnih elemenata matrice.

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdot & \cdot & a_{1m}b_{1m} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdot & \cdot & a_{2m}b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}b_{n1} & a_{n2}b_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nm}b_{nm} \end{vmatrix}$$

Primjer:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad A \otimes B = C = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 20 \\ 1 & 20 & 4 \\ 15 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

1.2.5. Trag matrice

Trag matrice A predstavlja zbroj elemenata u glavnoj dijagonali te matrice

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{trag}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Primjer:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{trag}(A) = 2 + 4 + 3 = 9$$

1.2.6. Norma vektora

Duljina ili norma vektora dobije se operacijom

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2},$$

odnosno

$$|a| = (a^T a)^{1/2}$$

Vektor čija je duljina jednaka 1 zove se *normirani vektor*. Normirani vektor dobije se operacijom *normiranja*, odnosno tako da se vektor podijeli sa svojom duljinom

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

ili

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{a}^T \mathbf{a})^{-1/2}$$

Svaki se nenulti vektor može transformirati u normirani vektor.

Primjer: Ako je

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

onda je norma vektora $\mathbf{a}$ jednaka

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 16 + 9 + 1 + 25} = \sqrt{55} = 7,42$$

a normirani vektor je

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7,42} = \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,54 \\ 0,4 \\ 0,13 \\ 0,67 \end{pmatrix}$$

jer je

$$|\hat{\mathbf{a}}| = \sqrt{0,27^2 + 0,54^2 + 0,4^2 + 0,13^2 + 0,67^2} = \sqrt{1} = 1$$

1.2.7. Udaljenost između dvaju vektora

Neka su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ dva vektora istog reda. Udaljenost između njih dobije se kao norma razlike dvaju vektora, a naziva se *euklidska udaljenost*

$$d = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \left[(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \right]^{1/2}$$

odnosno

$$d = \left(\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right)^{1/2}$$

Primjer: Ako je

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ a } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

onda je

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ a } (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

pa je

$$d = \left[(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \right]^{1/2} = \left[\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{1/2} = \sqrt{9} = 3$$

1.2.8. Kut između dvaju vektora

Kosinus kuta koji zatvaraju dva vektora istog reda $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ izračuna se kao omjer skalarnog produkta dvaju vektora i umnoška njihovih normi

$$\cos \alpha = (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) (\mathbf{a}^T \mathbf{a})^{-1/2} (\mathbf{b}^T \mathbf{b})^{-1/2}$$

odnosno

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

Iz toga slijedi da je skalarni produkt dvaju vektora jednak produktu njihovih normi i kosinusa kuta njihova kuta

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$$

Ako su vektori normirani na 1, onda je kosinus kuta jednak skalarnom produktu tih dvaju vektora

$$\hat{\mathbf{a}}^T \hat{\mathbf{b}} = \cos \alpha$$

Ako je skalarni produkt dvaju vektora jednak nuli, $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0$, onda je $\cos \alpha = 0$, što znači da su vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ ortogonalni (kut između njih je 90°).

Primjer: Ako je

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ a } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

onda je

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29} = 5,39$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 7,07$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 4) + (4 \cdot 5) + (3 \cdot 3) = 37$$

$$\text{pa je } \cos \alpha = \frac{37}{5,39 \cdot 7,07} = \frac{37}{38,11} = 0,97$$

1.2.9. Linearna kombinacija vektora

Linearna kombinacija vektora je vektor koji je nastao zbrajanjem produkata drugih vektora s pripadajućim skalarima. Ako su $\mathbf{a}_j$ ($j=1, \dots, m$) vektori istog reda, a β_j pripadajući skalari, onda je vektor $\mathbf{b}$ linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_j$

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{a}_j = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{a}_m$$

Za novi vektor **b** kažemo da je dobiven *jednostavnom linearnom kombinacijom* ako je nastao zbrajanjem drugih vektora istog reda $\mathbf{a}_j$ ($j=1, \dots, m$), a *diferencijalno ponderiranom linearnom kombinacijom* ako je dobiven zbrajanjem produkata drugih vektora istog reda $\mathbf{a}_j$ ($j=1, \dots, m$) s odgovarajućim skalarima β_j (ponderima).

Primjer: Ako su **a**, **b** i **c** vektori istog reda, a α , β , γ skalari, novi vektor **d** nastao je linearnom kombinacijom vektora **a**, **b** i **c** i skalara α , β , γ ako je

$$\mathbf{d} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n + \gamma \cdot c_n \end{vmatrix}$$

1.2.10. Determinanta matrice

Determinanta neke kvadratne matrice **A** predstavlja karakterističan broj te matrice, označava se s $\det(A)$, a ima veći broj svojstava od kojih su neka:

- determinantu je moguće izračunati samo iz kvadratnih matrica
- determinanta je jednaka nuli ako je bilo koji redak ili stupac jednak nuli
- determinanta je jednaka nuli ako su njezini stupci ili reci linearno zavisni
- determinanta dijagonalne matrice jednaka je produktu dijagonalnih elemenata te matrice
- determinanta produkta matrica jednaka je produktu determinanata tih matrica
- determinanta kvadratne matrice kojoj je neki stupac ili redak pomnožen s nekim skalarom jednaka je produktu tog skalara i determinante originalne matrice itd.

Postoji više načina računanja determinanata. Jedan od mogućih načina određivanja determinante temelji se na *kofaktorima*, odnosno na zbroju produkata jednog retka ili stupca s pripadajućim kofaktorima. Kofaktori predstavljaju *minore* nekog elementa matrice a_{ij} kojemu je

pridružen predznak. Predznak se dobije tako da se izračuna $(-1)^{i+j}$, pri čemu je i broj retka, a j broj stupca. Ako je zbroj $i+j$ paran, predznak je “+”, ako je $i+j$ neparan predznak je “-”. Minori su determinante neke matrice koje se izračunaju nakon što se izbaci jednak broj redaka i stupaca te matrice. Ako se iz neke matrice izbaci i -redak i j -stupac, koji se sijeku u elementu a_{ij} , preostala determinanta $n-1$ reda zove se minor elementa a_{ij} .

Primjerice, determinanta matrice reda 1×1 jednaka je jedinom elementu te matrice

$$A = |a_{11}|, \quad \det(A) = a_{11}$$

Determinanta matrice reda 2×2 izračuna se

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Determinanta matrice reda 3×3

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

izračuna se tako da se izračunaju *minori* triju elemenata a_{11} , a_{12} , a_{13} , odnosno *determinante drugog reda*

$$m_{11} = \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, m_{12} = \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, m_{13} = \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$m_{11} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$$

$$m_{12} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}$$

$$m_{13} = a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}$$

Izračunatim minorima (determinantama drugog reda) odrede se predznaci čime se dobiju kofaktori

$$k_{11} = (-1)^{1+1} \cdot m_{11} = m_{11}, k_{12} = (-1)^{1+2} \cdot m_{12} = -m_{12}, k_{13} = (-1)^{1+3} \cdot m_{13} = m_{13}$$

Zbrajanjem umnožaka elemenata jednog stupca ili retka s pripadajućim kofaktorima izračuna se determinanta matrice **A**

$$\det(A) = a_{11} \cdot k_{11} + a_{12} \cdot k_{12} + a_{13} \cdot k_{13}$$

odnosno

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

Kod izračunavanja determinanta matrica višeg reda treba najprije odrediti prve minore i kofaktore, zatim druge itd. Dakle, determinanta bilo koje matrice može se svesti na determinantu drugog reda.

Primjer 1: Determinanta matrice

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (3 \cdot (-5)) - (4 \cdot 1) = -19$$

Primjer 2: Determinanta matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot m_{11} - 3 \cdot m_{12} + 4 \cdot m_{13} - 5 \cdot m_{14}$$

$$m_{11} = \det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - 4 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) + 2 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) =$$

$$= 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-5) = 2 + 12 - 10 = 4$$

$$\begin{aligned}
 m_{12} &= \det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 4 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) + 2 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) = \\
 &= 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (-7) = 2 + 16 - 14 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{13} &= \det \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) + 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3) = \\
 &= 2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 = -6 + 8 + 2 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{14} &= \det \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + 4 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3) = \\
 &= 2 \cdot (-5) - 2 \cdot (-7) + 4 \cdot (-1) = -10 + 14 + 4 = 8
 \end{aligned}$$

$$\det(A) = 1 \cdot m_{11} - 3 \cdot m_{12} + 4 \cdot m_{13} - 5 \cdot m_{14} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 - 5 \cdot 8 = -32$$

1.2.11. Inverz matrice

Inverz neke matrice moguć je samo ako je matrica kvadratna i punog ranga (ima determinantu različitu od nule). Invertiranje matrice u matričnoj algebri odgovara recipročnoj vrijednosti broja (skalara) u skalarnoj algebri. Matrica $\mathbf{A}^{-1}$ je inverz matrice $\mathbf{A}$ ako je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

gdje je $\mathbf{I}$ matrica identiteta, odnosno matrica koje su dijagonalni elementi 1, a izvandijagonalni jednaki 0. Poznaju li se pojmovi determinante, minora i kofaktora, može se pokazati postupak invertiranja matrice. Inverz matrice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

dobije se operacijom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathbf{K}^T = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{22} & k_{33} \end{vmatrix}$$

gdje se kofaktori k_{ij} (kako je prethodno rečeno) dobiju tako da se iz matrice izbaci i redak i j stupac te se izračuna determinanta preostalog dijela matrice.

Dakle, inverz matrice $\mathbf{A}$ dobije se tako da se:

- izračuna matrica $\mathbf{M}$ minora
- izračuna matrica kofaktora $\mathbf{K}$ prema opisanom pravilu dodjeljivanja predznaka minorima
- transponira matrica kofaktora $\mathbf{K}$ u matricu $\mathbf{K}^T$
- svaki element matrice $\mathbf{K}^T$ podijeli determinantom matrice $\mathbf{A}$.

Primjer: Inverz matrice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

izračuna se u nekoliko koraka:

- odredi se matrica minora

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}$$

$$m_{11} = \det \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2$$

$$m_{12} = \det \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 6 - 8 = -2$$

$$m_{13} = \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 2 - 4 = -2$$

$$m_{21} = \det \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 9 - 5 = -4$$

$$m_{22} = \det \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 3 - 10 = -7$$

$$m_{23} = \det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1 - 6 = -5$$

$$m_{31} = \det \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 12 - 10 = 2$$

$$m_{32} = \det \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 4 - 10 = -6$$

$$m_{33} = \det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -7 & -5 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

- minorima se odrede predznaci tako da se elementi matrice minora m_{ij} pomnože s $(-1)^{i+j}$ i dobije matrica kofaktora

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -7 & 5 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

- transponira se matrica kofaktora

$$\mathbf{K}^T = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -7 & 6 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

- izračuna se determinanta

$$\det(A) = a_{11} \cdot k_{11} + a_{12} \cdot k_{12} + a_{13} \cdot k_{13} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) = 2 + 6 - 10 = -2$$

- izračuna se inverz

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathbf{K}^T = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -7 & 6 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3,5 & -3 \\ 1 & -2,5 & 2 \end{vmatrix}$$

Može se provjeriti da je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3,5 & -3 \\ 1 & -2,5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matrica kojoj je determinanta 0 nema inverz i naziva se *singularna matrica*. Ako matrica ima determinantu različitu od 0, onda matrica ima inverz i zove se *nesingularna matrica*, odnosno *regularna matrica*. Je li neka kvadratna matrica regularna ili singularna, zavisi od toga jesu li vektori te matrice linearno zavisni ili nisu. Ako se niti jedan vektor te matrice ne može izračunati kao linearna kombinacija preostalih vektora, onda je ta matrica regularna. Ako su matrice **A** i **B** regularne, tada i njihov umnožak daje regularnu matricu, odnosno, vrijedi

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

Pored toga, ako je **A** neka regularna matrica, vrijedi

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

1.2.12. Pseudoinverz matrice

Kako je već rečeno, inverz matrice moguće je izračunati samo iz matrica kojih je determinanta različita od nule (kvadratnih matrica punog ranga). Ako to nije slučaj, onda matrica nema inverz (matrica je singularna). Međutim, i za takve matrice moguće je izračunati *pseudoinverz*.

Neka je neka matrica A reda $n \times m$ za koju vrijedi da je $\det(A^T A) \neq 0$. Operacijom $A^T A$ dobije se kvadratna simetrična matrica iz koje je moguće izračunati inverz $(A^T A)^{-1}$, stoga je

$$A^T A (A^T A)^{-1} = I$$

ili

$$A A^T (A A^T)^{-1} = I$$

gdje je I matrica identiteta.

1.2.13. Ortonormirane i ortogonalne matrice

Za neku kvadratnu matricu A reda $n \times n$ kaže se da je ortonormirana ako vrijedi

$$A^T A = A A^T = I$$

gdje je I matrica identiteta reda $n \times n$. Stoga je vidljivo da je

$$A^{-1} = A^T$$

Dakle, inverz ortonormirane matrice jednak je njenoj transpoziciji, a to je moguće jedino u slučaju kada su svi vektori u matrici međusobno ortogonalni i normirani na 1. Za neku kvadratnu matricu A reda $n \times n$ kaže se da je ortogonalna ako vrijedi

$$A^T A = A A^T = D$$

gdje je D dijagonalna matrica reda $n \times n$. Dakle, očito je da se radi o međusobno ortogonalnim vektorima kojima su norme različite.

1.2.14. Rang i linearna zavisnost matrice

Za neki redak ili stupac kažemo da je linearno zavisan ako se može izraziti kao linearna kombinacija drugih redaka ili stupaca. Rang matrice jednak je minimalnom broju redaka ili stupaca u matrici čijom se linearnom kombinacijom mogu izraziti svi ostali reci ili stupci te matrice. To vrijedi za ne-nul matricu jer je rang nul-matrice jednak nuli.

Ako se svaki redak matrice može izraziti linearnom kombinacijom samo jednog retka, onda je rang te matrice jedan; ako se svaki redak može izraziti linearnom kombinacijom dvaju redaka, onda je rang matrice dva itd.

Primjer: Rang matrice

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 13 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

je 2 jer se, primjerice, elementi prvog stupca dobiju kao linearna kombinacija elemenata drugog i trećeg stupca, odnosno

$$a_{11} = a_{12} \cdot 2 + a_{13} = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$a_{21} = a_{22} \cdot 2 + a_{23} = 0 \cdot 2 + 3 = 3$$

$$a_{31} = a_{32} \cdot 2 + a_{33} = 4 \cdot 2 + 5 = 13$$

1.2.15. Rješavanje sustava linearnih jednadžbi u matričnom obliku

Sustav od n jednadžbi sa n nepoznanica

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = y_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = y_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \dots + a_{3n} \cdot x_n = y_3$$

.

.

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = y_n$$

moguće je prikazati u matričnom obliku

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

gdje je

- $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda $n \times n$ s poznatim vrijednostima
- $\mathbf{x}$ vektor stupca reda $n \times 1$ nepoznatih vrijednosti
- $\mathbf{y}$ vektor stupca reda $n \times 1$ poznatih vrijednosti.

Sustav linearnih jednadžbi izražen u obliku

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

može se rješavati primjenom inverza matrice $\mathbf{A}$. Ako se obje strane te jednadžbe pomnože sa $\mathbf{A}^{-1}$, dobije se

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$$

Iz toga slijedi da je

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$$

Primjer: Neka je

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}^{\mathbf{A}} \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}}^{\mathbf{y}}$$

Nepoznati vektor $\mathbf{x}$ izračuna se tako da se:

- odredi matrica minora matrice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

- elementi matrice minora m_{ij} pomnože sa $(-1)^{i+j}$ da bi se dobila matrica kofaktora

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

- transponira matrica kofaktora $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}^T = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

- izračuna determinanta matrice $\mathbf{A}$

$$\det(\mathbf{A}) = (2 \cdot (-1)) - (3 \cdot 2) = -8$$

- izračuna inverz matrice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{8} & -\frac{2}{8} \end{vmatrix}$$

- izračunaju nepoznati elementi vektora $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{8} & -\frac{2}{8} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\frac{1}{8} \cdot 5) + (\frac{3}{8} \cdot 1) \\ (\frac{2}{8} \cdot 5) - (\frac{2}{8} \cdot 1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

1.2.16. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Prema Eckart-Yungovoj hipotezi (Eckart i Young, 1936), koju je dokazao Johnson (1963), svaku realnu matricu A moguće je pomnožiti dvjema ortogonalnim matricama Y i X tako da se kao rezultat dobije dijagonalna matrica λ koja neće imati negativnih elemenata. Dakle, vrijedi

$$Y^T A X = \lambda$$

odnosno, da je svaku matricu moguće dekomponirati

$$A = Y \lambda X^T$$

gdje je

- Y matrica lijevih svojstvenih (karakterističnih) vektora matrice A , za koju vrijedi da je $Y^T Y = Y Y^T = I$, dakle vektori matrice Y su ortonormirani
- X matrica desnih svojstvenih (karakterističnih) vektora matrice A , za koju vrijedi da je $X^T X = X X^T = I$, dakle vektori matrice X su ortonormirani
- λ dijagonalna matrica svojstvenih (karakterističnih) vrijednosti matrice A .

Osim toga, isti su autori dokazali da je matrica X matrica svojstvenih vektora matrice $A^T A$,

$$A^T A = X D X^T$$

a matrica Y matrica svojstvenih vektora matrice $A A^T$,

$$A A^T = Y D Y^T$$

dok matrica D sadrži nenegativne svojstvene vrijednosti matrice $A^T A$ i $A A^T$. Može se dokazati da je

$$Y^T A X = D^{1/2} = \lambda$$

iz čega slijedi da je

$$Y = A X D^{-1/2} = A X \lambda^{-1}$$

odnosno

$$X = A^T Y D^{-1/2} = A^T Y \lambda^{-1}$$

Ako je matrica A kvadratna i ujedno simetrična, onda vrijedi

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \boldsymbol{\lambda}$$

odnosno

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{X}^T$$

gdje je

- $\mathbf{X}$ matrica svojstvenih vektora za koju vrijedi da je $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T = \mathbf{I}$, dakle vektori matrice $\mathbf{X}$ su ortonormalni
- $\boldsymbol{\lambda}$ dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti.

Matrice $\mathbf{X}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ predstavljaju bazičnu strukturu matrice $\mathbf{A}$. Matrice svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora izračunavaju se rješavanjem tzv. *karakteristične jednadžbe*

$$(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{I}) \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Rješavanje karakteristične jednadžbe vrlo je složen i dugotrajan matematički postupak. Stoga je pojavom elektroničkih računala za rješavanje karakteristične jednadžbe, odnosno za utvrđivanje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora, konstruiran veći broj algoritama pogodnih za izradu računalnih programa. U knjizi Ante Fulgosija: *Faktorska analiza*, opisano je nekoliko takvih postupaka (primjerice, Hotellingov iterativni postupak ekstrakcije faktora, Jacobijeva metoda, Householderov postupak dijagonalizacije...).

1.2.17. Neka obilježja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora

Ako je matrica $\mathbf{A}$ kvadratna i ujedno simetrična matrica, onda vrijedi

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \boldsymbol{\lambda}$$

odnosno

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{X}^T$$

gdje je $\mathbf{X}$ matrica svojstvenih vektora za koju vrijedi da je $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T = \mathbf{I}$, a $\boldsymbol{\lambda}$ dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti. Tada vrijedi

$$\text{trag}(\mathbf{A}) = \text{trag}(\boldsymbol{\lambda})$$

dakle, *trag* neke simetrične matrice jednak je sumi njenih svojstvenih vrijednosti. Osim toga, za svaku kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda $n \times n$ vrijedi da je njena determinanta jednaka produktu njenih svojstvenih vrijednosti

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Iz ovoga slijedi da će determinanta neke kvadratne matrice biti jednaka 0 ako je barem jedna svojstvena vrijednost jednaka 0. Dakle, matrica će biti singularna ako je barem jedna svojstvena vrijednost jednaka 0. Stoga se rang matrice može definirati kao

$$\text{rang}(A) = n - k$$

gdje je k broj svojstvenih vrijednosti jednakih 0. Dakle, rang neke kvadratne matrice jednak je broju nenulih svojstvenih vrijednosti te matrice. Pored toga, inverz matrice A moguće je izračunati operacijom

$$A^{-1} = X \lambda^{-1} X^T$$

gdje je inverz matrice λ jednak inverzu (recipročnoj vrijednosti) njezinih pojedinačnih elemenata

$$\lambda^{-1} = (\lambda_{jj}^{-1})$$

2

Osnovne statističke metode

2.1

Pojam i podjela statističkih metoda

2.1.1. Statistika

Što je *statistika*? Što je predmet proučavanja statistike? Odgovor na ova pitanja nije ni jednostavan ni jednoznačan. U svakodnevnom životu pojam statistike najčešće se poistovjećuje s prikupljanjem podataka. No, samo prikupljanje podataka, odnosno evidentiranje, ni približno ne definira pojam statistike. U literaturi se može pronaći puno definicija statistike, a i područje njezine primjene vrlo je široko. Tako jedni smatraju da je statistika znanost koja se bavi proučavanjem masovnih pojava.

Drugi je pak smatraju znanstvenom metodom, odnosno skupom metoda i postupaka za analizu velike količine podataka. Vrlo zanimljivu ilustraciju statistike dao je u svom udžbeniku J. P. Guilford:

Pojam *Statistika* vjerojatno potječe od latinske riječi *status* – stanje ili od talijanske riječi *stato* – država jer se polazilo od činjenice da se statistika bavi državnim interesima. Naime, nastankom i razvitkom većih država, njihovi vladari su (kako bi što efikasnije upravljali te da bi imali što bolji uvid u stanje državne imovine) pokušavali prikupiti državi zanimljive podatke o broju vojnika, brodova, stanovnika... Tako se primjerice, u starom Rimskom Carstvu svakih pet godina popisivalo stanovništvo i njihova imovina. Prvi popis stanovništva u povijesti proveden je za vrijeme šestog kralja starog Rimskog Carstva Servijusa Tulijusa (578 – 535 g.p.n.e.). On je podijelio društvo prema ugledu i bogastvu u pet klasa te je uveo *cenzus* kojim je propisao prava i obveze građana tadašnjeg Rima. Danas pod pojmom *statistika* podrazumijevamo znatno više od rezultata prebrojavanja (evidentiranja), odnosno od nekog skupa prikupljenih podataka.

Statistika pruža nenadmašna sredstva za pretvaranje kaosa u savršeni red. (Guilford, 1968: 9).

Statistika je i način proučavanja pojava, pa se govori i o *statističkom načinu mišljenja*. Guilford (1968) navodi kako je ovladavanje statističkim metodama i statističkim načinom mišljenja važno u znanstvenim istraživanjima jer:

- omogućava precizan opis (deskripciju) istraživanih pojava
- “prisiljava” znanstvenika da bude egzaktn u svojim postupcima i razmišljanjima
- omogućava sažeto izražavanje rezultata istraživanja i njihov pregledan prikaz
- omogućava izvođenje općih zaključaka, odnosno generaliziranje zaključaka dobivenih na uzorku na populaciju koje je uzorak reprezentant
- omogućava predviđanje istraživane pojave
- omogućava utvrđivanje uzročno-posljedičnih odnosa, odnosno činilaca odgovornih za nastajanje neke pojave.

Stoga možemo zaključiti da je poznavanje statističkih metoda nužan preduvjet za uspješnu znanstvenu djelatnost jer pomoću njih transformiramo podatke prikupljene nekim znanstvenim istraživanjem u oblik koji nam omogućava jasniji uvid i interpretaciju istraživane pojave te provjeru postavljenih hipoteza.

2.1.2. Podjela statističkih metoda

Znanstvena istraživanja u mnogim znanostima (primjerice, ekonomije, kineziologije, medicine, psihologije...) temelje se na velikom broju općih i specifičnih statističkih metoda. Stoga je klasifikacija statističkih metoda vrlo nezahvalan zadatak. Opće je prihvaćena podjela statističkih metoda na:

- *metode deskriptivne statistike* - Statistički postupci grupiranja i grafičkog prikazivanja podataka te izračunavanja različitih statističkih pokazatelja kojima se opisuje promatrana pojava (mjere centralne tendencije ili središnje mjere, mjere varijabilnosti ili disperzije, mjere asimetrije i zakrivljenosti distribucije...). Pri tome je važno naglasiti da se zaključci dobiveni u okviru deskriptivne

statistike odnose isključivo na promatranu grupu ispitanika (uzorak).

- *metode inferencijalne statistike* - Statistički postupci kojima se na temelju rezultata dobivenih na uzorku s oslanjanjem na teoriju vjerojatnosti proširuju zaključci na populaciju koje je uzorak reprezentant. Dakle, polazeći od podataka prikupljenih na uzorku (podskupu populacije), donose se vjerojatnosni zaključci o populaciji. U ovu skupinu statističkih metoda ubrajaju se *t*-test, univarijatna analiza varijance, multivarijatna analiza varijance, postupci za testiranje statističke značajnosti koeficijenta korelacije, multiple korelacije, kanoničke korelacije, regresijskih koeficijenata itd.

U ovom će se udžbeniku, uz ovu opću podjelu, statističke metode koje se najčešće koriste u okviru kineziološke metodologije znanstveno-istraživačkog rada klasificirati prema nekoliko kriterija:

1) S obzirom na vrstu varijabli, odnosno mjernu skalu (ljestvicu) koja je primjenjuje u postupku mjerenja, statističke je metode moguće podijeliti na:

- *neparametrijske metode* - koriste se za obradu podataka prikupljenih na kvalitativnim mjernim ljestvicama (v. poglavlje 4.1.2.4, str. 261-264), koji imaju distribucije značajno različite od normalne (Gaussove distribucije). Kod takvih podataka nije moguće utvrđivati statističke parametre (aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju) te se stoga i zovu neparametrijske metode. U tu kategoriju metoda ubrajaju se: χ^2 -test, Wilcoxonov test, medijan test, rang korelacija itd.
- *parametrijske metode* - koriste se za obradu normalno distribuiranih podataka, prikupljenih na kvantitativnim mjernim ljestvicama (v. poglavlje 4.1.2.4, str. 261-264), kod kojih je moguće utvrđivati statističke parametre. U ovu skupinu se ubrajaju: *t*-test, univarijatna analiza varijance, multivarijatna analiza varijance, regresijska analiza, faktorska analiza itd.

2) Statističke metode moguće je klasificirati i prema broju varijabli koje se istovremeno analiziraju pa tako prepoznamo:

- *univarijatne metode* - koriste se za analizu podataka jedne varijable te testiranje odgovarajućih hipoteza koje se odnose na tu varijablu (*t*-test, univarijatna analiza varijance...).
- *multivarijatne metode* - koriste se za istovremenu analizu podataka dviju ili više varijabli uz uvažavanje njihova međusobna odnosa (faktorska analiza, regresijska analiza, diskriminacijska analiza...).

3) S obzirom na ciljnu usmjerenost kinezioloških istraživanja, statističke je metode moguće podijeliti na:

- *deskriptivne metode* - koriste se za opis varijabli (mjere centralne tendencije, mjere disperzije, postupci za utvrđivanje oblika distribucija)
- *komparativne metode* koje mogu biti:
 - *metode za uvrđivanje razlika* - koriste se za utvrđivanje razlika između dviju ili više grupa ispitanika koje su opisane jednom varijablom (*t*-test, univarijatna analiza varijance) ili s više njih (multivarijatna analiza varijance, diskriminacijska analiza).
 - *metode za utvrđivanje relacija* - koriste se za utvrđivanje relacija između jedne ili više nezavisnih varijabli i jedne kriterijske varijable (regresijska analiza) te za utvrđivanje relacija između dvaju skupova varijabli (kanonička analiza).
 - *metode za klasifikaciju* - koriste se za grupiranje entiteta ili varijabli u manji broj homogenih skupina (klaster ili taksonomska analiza) ili za utvrđivanje manjeg broja latentnih varijabli iz nekog skupa međusobno povezanih manifestnih varijabli (faktorska analiza).

Osim navedenih podjela, moguće je statističke metode klasificirati i prema drugim kriterijima. Međutim, od same klasifikacije važnije je dobro poznavanje svih bitnih obilježja pojedinih statističkih metoda kako bi se one mogle uspješno koristiti za rješavanje konkretnih kinezioloških problema. No, prije nego se upoznamo s pojedinim statističkim metodama, valja dobro upoznati osnovne statističke pojmove.

2.2

Osnovni statistički pojmovi

2.2.1. Podatak

Usprkos teškoćama koje se javljaju pri pokušaju jednoznačnog definiranja pojma statistike, moguće je uočiti da se u svim definicijama navodi kako se primjenom statističkih metoda nastoji srediti veća količina prikupljenih *podataka*. Pod pojmom *podatak* ili *informacija* podrazumijeva se određena kvantitativna ili kvalitativna vrijednost kojom je opisano određeno obilježje nekog objekta, stvari, osobe, pojave, procesa..., odnosno, entiteta. Pritom je važno naglasiti da se statistika bavi obradom podataka koji međusobno variraju. Naime, kada bi svi prikupljeni podaci bili jednaki, onda ne bi bili predmetom statističke analize, jer bi jedan podatak opisivao i sve druge podatke. Osim toga, predmet statističke analize nisu ni podaci koji se izvode po nekoj zadanoj matematičkoj funkciji, primjerice, logaritamski brojevi i slično, već su to podaci varijabilitet kojih mora biti izraz prirode pojave koja se istražuje. Tako, primjerice, tjelesna visina djece istog spola i dobi nije jednaka te se njen varijabilitet ne može točno definirati matematičkom formulom, već se opisuje određenim statističkim pokazateljima.

2.2.2. Entitet

Statistika se bavi obradom podataka koji opisuju određena obilježja, svojstva, karakteristike nekog skupa osoba, objekata, stvari, pojava, procesa i sl. Svaka jedinka toga skupa naziva se *entitet* i nosi informacije koje je moguće prikupiti nekim postupkom mjerenja. U kineziološkim istraživanjima entiteti su najčešće ljudi, ali mogu biti i sportske ekipe, tehnički elementi, zadaci u igri itd.

2.2.3. Populacija i uzorak entiteta

Skup svih entiteta čija su obilježja predmet statističke analize najčešće se naziva *populacija entiteta* (*statistički skup, univerzum entiteta*). Populacija entiteta može biti beskonačan

$$P = \{e_i; i = 1, 2, \dots\}$$

ili konačan

$$P = \{e_i; i = 1, 2, \dots, N\}$$

skup entiteta (e_i).

Prema Šošiću (2004), beskonačna populacija predstavlja hipotetični skup s beskonačno mnogo elemenata (entiteta) koji su u svezi s nekim statističkim (stohastičkim) procesom. Ako se proces ponavlja beskonačno u istim uvjetima, njegovi su ishodi elementi beskonačne populacije. Primjerice, ako na isti način i u istim uvjetima beskonačno bacamo pravilan novčić, tada nije poznato unaprijed što će biti rezultat bacanja (pismo ili glava), a postupak se teoretski može izvoditi beskonačno. Dakle, radi se o statističkom procesu čiji su ishodi elementi beskonačne populacije.

Za razliku od beskonačne populacije, koja ima beskonačan broj entiteta, konačnu populaciju predstavlja pojmovno, prostorno i vremenski definiran konačan skup entiteta. Primjerice, "studenti prve godine Kineziološkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu školske godine 2002/2003". Entiteti koji pripadaju ovako definiranoj populaciji jednaki su po općim obilježjima, a to su:

- *pojmovno* - studenti prve godine Kineziološkog fakulteta,
- *prostorno* - Sveučilišta u Zagrebu,
- *vremenski* - u školskoj godini 2000/2001.

Dakle, *pojmovno* određenje populacije definira što je entitet i koja su njegova opća svojstva, *prostorno* određenje određuje geografsko

područje za koje su vezani entiteti, a *vremensko* povezuje entitete s određenom vremenskom jedinicom ili razdobljem.

Podskup entiteta izabran iz populacije u skladu s nekim pravilom, a s ciljem da je što bolje reprezentira, naziva se *uzorak entiteta*

$$E = \{e_i; i = 1, 2, \dots, n\} \subset P^1, \quad n < N$$

gdje je

n - broj entiteta u uzorku, a naziva se *efektiv* ili *opseg uzorka*, a

N - broj entiteta u populaciji.

Ako je uzorak dobar reprezentant, predstavnik populacije iz koje je izabran, onda rezultati (zaključci) dobiveni na uzorku, uz određenu pogrešku, vrijede i za populaciju. Entiteti se u uzorak mogu birati na razne načine, što određuje vrste uzoraka.

2.2.4. Vrste uzoraka entiteta

Najjednostavnija podjela uzoraka je na *namjerne* i *slučajne* uzorke. Pod namjernim uzorcima podrazumijevaju se oni uzorci u koje su entiteti birani prema nekom subjektivnom stavu istraživača o njihovoj reprezentativnosti ili se uzorak formira odabirom lako ili trenutno dostupnih entiteta (*prigodni uzorak*).

Uzorak će biti dobar reprezentant populacije ako je za svaki entitet jednaka vjerojatnost da budu izabrani, odnosno ako se zadovolji uvjet slučajnog odabira entiteta. S obzirom na to da se uzorci biraju s ciljem da što bolje reprezentiraju populaciju iz koje su izabrani, lako je uočiti da će pogreška procjene statističkih pokazatelja biti to manja što je efektiv uzorka bliži broju entiteta u populaciji. Ovisno o načinu izbora entiteta, odnosno *uzorkovanju*² moguće je razlikovati nekoliko vrsta slučajnih uzoraka. To su:

- *jednostavni slučajni uzorak* - formira se tako da svakom entitetu neke populacije osiguramo jednaku vjerojatnost (šansu) izbora (primjerice, uz pomoć bubnja za loto, generatora slučajnih brojeva i sl.).

¹ izraz $E \subset P$ znači da je E podskup (dio) skupa P , a $P \supset E$ znači da je P skup čiji je E podskup (dio).

²uzorkovanje (engl. *sampling*) predstavlja postupak kojim se iz populacije bira uzorak entiteta.

- *intervalni uzorak* - formira se tako da se svi entiteti neke populacije poredaju (npr. po abecednom redu) te da se, nakon slučajnog izbora prvog entiteta, bira svaki treći, peti, odnosno n -ti entitet. Ovaj način biranja entiteta ima karakteristike jednostavnog slučajnog uzorka ako su entiteti nesistematski poredani.
- *stratificirani uzorak* - formira se tako da se populacija podijeli prema nekim važnim obilježjima (npr. spol, dob i sl.) u *stratume* (slojeve, podpopulacije) iz kojih se slučajnim odabirom biraju entiteti. Broj entiteta biranih iz svakog *stratuma* mora biti proporcionalan veličini pojedinog stratuma u populaciji.
- *grupni uzorak* - formira se tako da se iz neke populacije slučajnim izborom biraju cijele grupe (npr. ako se istražuje srednjoškolska populacija u nekoj državi, slučajnim izborom bira se uzorak škole, a svi učenici škola koje su odabrane čine uzorak entiteta).

Napomena:

Spomenuti uzorci, naravno, ne predstavljaju sve vrste uzoraka. Opis i objašnjenje većeg broja *metoda uzorkovanja* (vrsta uzoraka) te njihove prednosti i nedostaci pripadaju područje *planiranja znanstvenih istraživanja*, pa nadilaze opseg ove knjige. Stoga se zahtjevniji čitatelji upućuju na knjigu:

G. Milas (2005). Istraživačke metode u psihologiji i drugim društvenim znanostima. (str. 399-446). Jastrebarsko: Naklada Slap.

ili neku drugu knjigu koja detaljnije i sveobuhvatnije opisuje vrste uzoraka.

2.2.5. Varijabla

Iako entiteti neke populacije imaju međusobno jednaka opća obilježja (primjerice, studenti su Kineziološkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu u šk. god. 2000/2001.), oni se razlikuju po drugim obilježjima (osobinama, sposobnostima, znanjima itd.), primjerice, po morfološkim obilježjima (tjelesna visina, tjelesna težina, raspon ruku, opseg podlaktice...), motoričkim sposobnostima (rezultatima postignutim u raznim motoričkim zadacima temeljem kojih se procjenjuju npr. eksplozivna snaga, brzina, koordinacija...), situacijskoj uspješnosti igrača ili ekipe (broj skokova u obrani, broj asistencija...) itd. U znanstvenim istraživanjima pod pojmom *varijabla* podrazumijeva se određeno obilježje (svojstvo) koje oblikom ili stupnjem varira među entitetima, odnosno po kojem entiteti mogu biti isti ili različiti. To svojstvo mora biti operacionalno definirano, odnosno svi postupci za njegovo opažanje ili mjerenje moraju biti precizno opisani.

2.2.6. Vrste varijabli

Različita obilježja, odnosno varijable (osobine, sposobnosti i sl.) mogu se pojavljivati u različitim oblicima i stupnjevima. Primjerice: obilježje *spol* javlja se u dva oblika: *muškarci* i *žene*. Takva se obilježja nazivaju *alternativnima*. Školske ocjene se u Hrvatskoj javljaju u 5 različitih oblika (nedovoljan, dovoljan, dobar, vrlo dobar i odličan). Tjelesna visina vrlo je promjenjiva i može se izraziti različitim vrijednostima koje ukazuju na stupanj razvijenosti mjerenog obilježja itd. No usprkos takvoj raznolikosti, moguće je varijable podijeliti na *kvalitativne* i *kvantitativne*.

Kvalitativne varijable još se nazivaju i *kategorijalnima*, a mogu biti *nominalne* i *ordinalne* (redosljedna). Na isti način razlikuju se i mjerne ljestvice (v. poglavlje 4.1.2.4, str. 261-264).

Za razliku od kvalitativnih varijabli kojima se izražavaju nenumerička svojstva entiteta, *kvantitativne varijable* numerički izražavaju stupanj razvijenosti mjerenog svojstva, a dobivene su mjerenjem nekog obilježja entiteta *intervalnom* i *omjernom* mjernom ljestvicom (v. poglavlje 4.1.2.4, str. 261-264).

Osim toga, kvantitativne varijable mogu biti *diskretne* i *kontinuirane*. Diskretne varijable izražavaju konačan broj vrijednosti mjerenog svojstva i uvijek su određene cijelim brojem. Dobivaju se postupkom prebrojavanja (npr. broj sklekova, broj skokova u obrani i napadu...), dok kontinuirane varijable mogu poprimiti bilo koju numeričku vrijednost, a dobivaju se mjerenjem (npr. mjerenje vremena, količine, udaljenosti...).

Osim navedene podjele varijabli s obzirom na mjernu ljestvicu (metrijska svojstva varijabli), varijable se mogu razlikovati i prema ulozi u pojedinoj statističkoj metodi. Tako, primjerice, u regresijskoj analizi razlikujemo *zavisnu (kriterijsku)* i *nezavisne (prediktorske) varijable*. Zavisne varijable su varijable čije se varijacije objašnjavaju (prognoziraju) temeljem nezavisnih varijabli, a nezavisne varijable su varijable na temelju kojih se objašnjavaju varijacije zavisne varijable.

U faktorskoj analizi se na temelju većeg broja međusobno povezanih *manifestnih varijabli* utvrđuje manji broj *latentnih varijabli*. Manifestne varijable dobivaju se mjerenjem, dok latentne varijable

nisu izravno mjerljive postojećim mjernim instrumentima, već se dobivaju linearnom kombinacijom manifestnih varijabli.

Valja istaknuti da je poznavanje obilježja pojedinih tipova varijabli bitan uvjet za pravilan izbor statističkih metoda.

2.2.7. Populacija i uzorak varijabli

Populacija ili univezum varijabli $W = \{w_j; j = 1, 2, \dots\}$ predstavlja skup svih mogućih varijabli kojima se može opisati stanje nekog entiteta.

Podskup varijabli $V = \{v_j; j = 1, 2, \dots, m\}$, na temelju neke teorije izabran iz populacije varijabli, naziva se *uzorak varijabli*.

2.2.8. Matrica podataka

Podatak nekog entiteta na nekoj varijabli općenito se označava kao $x_{ij} = e_i \otimes v_j$, a operacijom

$$\mathbf{X} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{V}$$

označava se formiranje *matrice podataka* $\mathbf{X}$ dobivene opisom skupa entiteta $E = \{e_i; i = 1, \dots, n\}$ nekim skupom varijabli $V = \{v_j; j = 1, \dots, m\}$.

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} v_1 \dots \dots v_j \dots \dots v_m \end{array} \end{array}$$

Dakle, svaki redak matrice podataka $\mathbf{X}$ sadrži podatke kojima je pojedini entitet e_i opisan sa m varijabli, dok svaki stupac sadrži podatke n entiteta u pojedinoj varijabli v_j .

2. 3

Osnovni postupci za uređivanje i prikazivanje podataka

Faza prikupljanja podataka najosjetljiviji je dio nekog istraživanja jer o kvaliteti prikupljenih podataka ovisi vrijednost statističkih zaključaka o ispitivanoj pojavi. Stoga fazi prikupljanja podataka treba prethoditi:

- precizan opis predmeta istraživanja
- određivanje ciljeva i postavljanje hipoteza
- definiranje populacije entiteta te načina izbora i veličine uzorka entiteta
- određivanje skupa varijabli i izbor mjernih instrumenata
- izrada plana mjerenja.

Samo mjerenje mora biti u skladu sa strogo definiranim pravilima, odnosno, moraju ga provesti osposobljeni mjerioci mjernim instrumentima provjerenih metrijskih karakteristika.

Nakon faze prikupljanja, podatke je potrebno pripremiti za dogovarajuću statističku obradu. S obzirom da se u posljednje vrijeme statistička obrada obavlja isključivo pomoću specijaliziranih računalnih programa za statističko-grafičku obradu podataka (SPSS,

STATISTICA itd.), prikupljene podatke potrebno je pohraniti u datoteke (*fileove*). Gotovo svi programski proizvodi za statističko-grafičku obradu podataka zahtijevaju unos podataka u obliku tablice ili matrice. U prvom se koraku uz, pomoć odgovarajućih programskih alata, formira tablica čiju veličinu određuje broj entiteta (broj entiteta određuje broj redaka) i broj varijabli (broj varijabli određuje broj stupaca). Zatim se, prema potrebi, imenuju varijable (stupci) i entiteti (reci) te se unose prikupljeni podaci. Primjer tablice s podacima koja je kreirana u programskom sustavu *STATISTICA* prikazan je u tablici 2.3-1.

Tablica 2.3-1. Tablica podataka 20 entiteta opisanih 3 varijablama kreirana je u programskom sustavu *STATISTICA*

	SPOL	POZ	OKI
AV	M	B	4
EM	M	B	3
KV	M	B	4
MD	M	B	3
MM	M	K	3
NM	M	K	2
NK	M	K	3
SA	M	K	3
SS	M	C	2
VM	M	C	3
VD	M	C	3
VI	M	C	5
BM	Z	B	3
ML	Z	B	3
GG	Z	B	4
KD	Z	B	3
RM	Z	K	1
NK	Z	K	3
MD	Z	K	5
SJ	Z	K	3
SS	Z	C	4
TD	Z	C	3
VJ	Z	C	2
VS	Z	C	2

Legenda: POZ – pozicija u igri; OKI – ocjena kvalitete igrača

S obzirom da je unos podataka mukotrpan i vrlo važan dio svakog istraživanja (jer o točnosti unesenih podataka ovisi i konačna upotrebljivost rezultata dobivenih statističkom analizom), brzina

unosa može se povećati prikladnim *kodiranjem* podataka. Kodiranje se obično koristi kod kvalitativnih varijabli, gdje se odgovarajućoj kategoriji (obliku kvalitativnog obilježja) pridružuju brojevi ili oznake. Primjerice, varijabli *spol* koja ima dva oblika - *muškarci* i *žene*, mogu se dodijeliti oznaka "M" za muške osobe, a "Z" za ženske osobe ili "1" za muškarce, a "2" za žene. Tablica 2.3-2 prikazuje kodnu listu koja je korištena za unos podataka iz tablice 2.3-1.

Tablica 2.3-2. Primjer kodne liste

KRATKO IME VARIJABLE	DUGO IME VARIJABLE	OBLICI (VRIJEDNOSTI) VARIJABLE	KOD
SPOL	Spol	Muškarci	M
		Žene	Z
POZ	Pozicija u igri	Bek	B
		Krilo	K
		Centar	C
OKI	Ocjena kvalitete igrača	Vrlo slaba kvaliteta	1
		Slaba kvaliteta	2
		Dobra kvaliteta	3
		Vrlo dobara kvaliteta	4
		Izvrсна kvaliteta	5

2.3.1. Grupiranje podataka

Teško je izvesti odgovarajuće zaključke o promatranim pojavama, samo na temelju prikupljenih podataka, stoga ih je potrebno statistički urediti i prikladno prikazati. Podaci se uređuju *grupiranjem*, odnosno razvrstavanjem podataka prema oblicima (kategorijama, klasama, razredima) mjenog svojstva. Tako grupirani podaci se, radi bolje preglednosti, prikazuju pomoću tablica i grafikona. Primjerice, ako je ispitu iz Kvantitativnih metoda pristupio određeni broj studenata moguće ih je grupirati prema postignutom uspjehu, a to znači najmanje u dvije kategorije (nisu položili i položili su) ili, preciznije, u 5 kategorija (nedovoljan, dovoljan, dobar, vrlo dobar i odličan).

Grupiranje predstavlja statistički postupak razvrstavanja entiteta s istim oblikom obilježja u određeni broj disjunktih podskupova (podskupovi koji nemaju zajedničkih članova). Pritom je važno naglasiti da se prilikom grupiranja svi entiteti moraju razvrstati i da svaki entitet može biti član samo jednog podskupa (grupe, kategorije,

klase, razreda). Dakle, grupiranje je postupak sažimanja velikog broja podataka, koji pripadaju osnovnom skupu, u manji broj podskupova.

Broj entiteta koji pripadaju istoj kategoriji (klasi, razredu) naziva se *frekvencija*. Zbroj frekvencija svih grupa jednak je ukupnom broju entiteta. Ako se entiteti grupiraju po jednom obilježju (primjerice, spolu), onda se takvo grupiranje naziva *jednodimenzionalno*, a ako se grupiraju na temelju većeg broja obilježja, onda se naziva *višedimenzionalno* grupiranje.

Tablica 2.3-3 prikazuje jednodimenzionalno grupiranje entiteta. Grupiranje se izvodi na temelju jedne varijable - uspjeh na ispitu. Od ukupno 40 studenata koji su pristupili pismenom dijelu ispita, 25 ih nije položilo ispit, a 15 je položilo.

Tablica 2.3-3. *Primjer jednodimenzionalnog grupiranja prema uspjehu na ispitu*

USPJEH NA ISPITU	FREKVENCIJA
NISU POLOŽILI	25
POLOŽILI	15
UKUPNO	40

Tablica 2.3-4 prikazuje dvodimenzionalno grupiranje jer se grupiranje izvodi po dvije varijable: spol i uspjeh na ispitu. Ispitu je pristupilo 26 studenata i 14 studentica. Od 26 studenata, 16 ih nije položilo ispit, a 10 jest, dok od 14 studentica 9 ih nije položilo, a 5 jest.

Tablica 2.3-4. *Primjer dvodimenzionalnog grupiranja - prema spolu i uspjehu na ispitu*

SPOL	NISU POLOŽILI	POLOŽILI	UKUPNO
MUŠKARCI	16	10	26
ŽENE	9	5	14
UKUPNO	25	15	40

2.3.2. Grupiranje i grafičko prikazivanje kvalitativnih podataka

Kvalitativni podaci grupiraju se tako da se entiteti razvrstaju u određeni broj kategorija. Primjerice, obilježje uspjeh na ispitu ima dva oblika (nominalna mjerna skala): *nisu položili* i *položili su*. Grupiranje se izvodi razvrstavanjem entiteta koji su položili ispit u kategoriju *položili*, a koji nisu u kategoriju *nisu položili* (tablica 2.3-5).

Tablica 2.3-5. Grupiranje entiteta prema uspjehu na ispitu
(dvije kategorije: nisu položili - položili)

USPJEH NA ISPITU	FREKVENCIJA	%
NISU POLOŽILI	25	62,5
POLOŽILI	15	37,5
UKUPNO	40	100

Entitete je moguće grupirati i prema ocjeni dobivenoj na ispitu (ordinalna mjerna skala). U tom slučaju postoji pet stupnjevanih kategorija te ih je potrebno navesti od najniže prema najvišoj ili obrnuto (tablica 2.3-6).

Tablica 2.3-6. Grupiranje entiteta prema uspjehu na ispitu
(pet kategorija: nedovoljan, dovoljan, dobar, vrlo dobar, odličan)

USPJEH NA ISPITU	FREKVENCIJA	%
NEDOVOLJAN	25	62,5
DOVOLJAN	8	20
DOBAR	3	7,5
VRLO DOBAR	2	5
ODLIČAN	2	5
UKUPNO	40	100

Radi lakšeg zaključivanja o prolaznosti na ispitu, moguće je izračunati *relativne frekvencije*. Relativna frekvencija izračuna se kao omjer frekvencije određene kategorije i zbroja frekvencija svih kategorija (ukupnog broja entiteta).

$$p_g = \frac{f_g}{n} ; \quad \%_g = \frac{f_g}{n} \cdot 100, \quad g = 1, \dots, k$$

gdje je

- p_g relativna frekvencija izražena u proporciji grupe g ($g = 1, \dots, k$)
- f_g frekvencija u grupi g
- $\%_g$ relativna frekvencija izražena u postotku

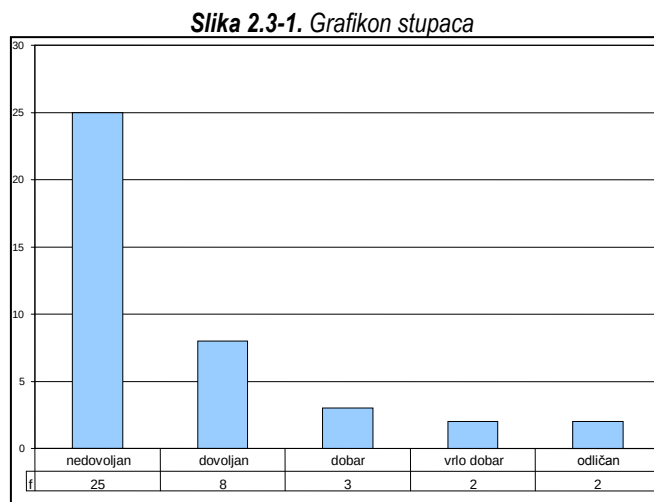
- n ukupan broj entiteta
- k broj kategorija (grupa).

Primjerice, relativna frekvencija za kategoriju *nedovoljan* iznosi 62,5% (tablica 2.3.6) jer je

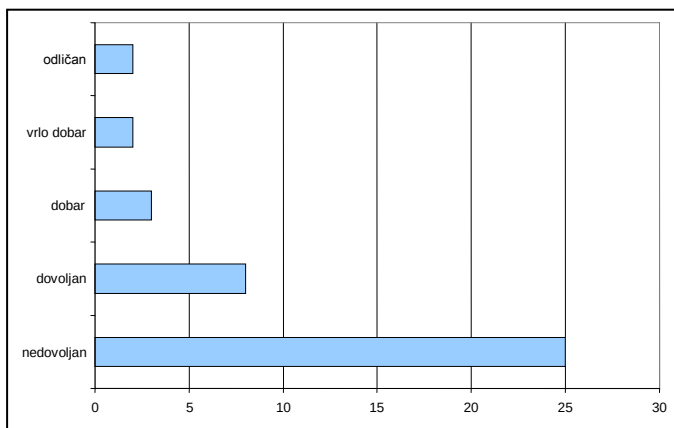
$$\%_g = \frac{f_g}{n} \cdot 100 = \frac{25}{40} \cdot 100 = 62,5\%$$

Radi jednostavnijeg uočavanja i zornijeg prikazivanja dobivenih rezultata, često se koriste *grafički prikazi*. Kvalitativni podaci najčešće se prikazuju pomoću *grafikona stupaca*, *grafikona redaka* i *strukturnog kruga*.

Grafikon stupaca je površinski grafikon koji se crta u pravokutnom koordinatnom sustavu. Na osi x nalaze se oblici obilježja (kategorije), a na osi y nalaze se frekvencije. Pravokutnici su jednakih osnovica (širina), a visina im je određena frekvencijom pripadajuće kategorije (slika 2.3-1).

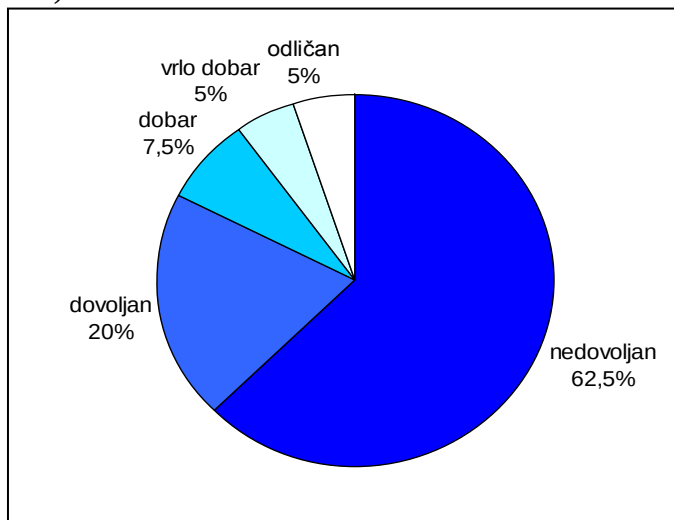


Grafikon redaka je površinski grafikon koji se također crta u pravokutnom koordinatnom sustavu. Na osi y nalaze se oblici obilježja (kategorije), a na osi x nalaze se frekvencije. Pravokutnici su jednakih osnovica (visina), a duljina im je određena pripadajućom frekvencijom (slika 2.3-2).



Slika 2.3-2. Grafikon redaka

Strukturni krug najčešće se koristi za prikaz relativnih frekvencija (slika 2.3-3).



Slika 2.3-3. Strukturni krug

2.3.3. Grupiranje i grafičko prikazivanje kvantitativnih podataka

Vrlo jednostavan postupak za sređivanje kvantitativnih podataka predstavlja *sortiranje* ili *rangiranje*. Ako se podaci nižu od najmanje do najveće vrijednosti, onda se takvo sortiranje naziva *uzlazno*, a ako se nižu od najveće do najmanje, onda se naziva *silazno*. Sortiranje omogućava uočavanje najmanje (*minimalne*) vrijednosti i najveće

(maksimalne) vrijednosti temeljem kojih je moguće izračunati *totalni raspon rezultata*.

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

gdje je

- R totalni raspon rezultata
- $x_{\max}$ maksimalna vrijednost
- $x_{\min}$ minimalna vrijednost.

Veća količina kvantitativnih diskretnih podataka s manjim brojem mogućih vrijednosti najčešće se sređuje postupkom *grupiranja*. Postupak grupiranja provodi se razvrstavanjem entiteta u podskupove prema vrijednostima kvantitativnog obilježja i to tako da jedan podskup čine entiteti s jednom vrijednosti kvantitativnog obilježja. Broj entiteta s jednakom vrijednosti kvantitativnog obilježja predstavlja *frekvenciju grupe*, a uređeni niz kvantitativnih vrijednosti s pripadajućim frekvencijama *distribuciju frekvencija*. Primjerice, tablica 2.3-7 prikazuje broj osobnih pogrešaka 18 košarkaša na jednoj košarkaškoj utakmici.

Tablica 2.3-7. Broj osobnih pogrešaka (OP) 18 košarkaša na jednoj košarkaškoj utakmici

ENTITETI	OP
ANZU-V	4
ERJA-M	2
KRST-V	1
MILA-D	4
MILL-M	3
NORI-M	1
NOVO-K	4
SAMA-A	2
SUBO-S	3
VANJ-M	5
VOLO-D	3
VUJI-I	2
BAZD-M	3
BLAS-M	3
GIRI-G	4
KRUN-D	3
MALI-M	3
MAMI-M	2

Nakon uzlaznog sortiranja podataka (tablica 2.3-8), lako se uočava najmanja (1) i najveća vrijednost (5).

Tablica 2.3-8. Broj osobnih pogrešaka (OP) 18 košarkaša na jednoj košarkaškoj utakmici nakon uzlaznog sortiranja

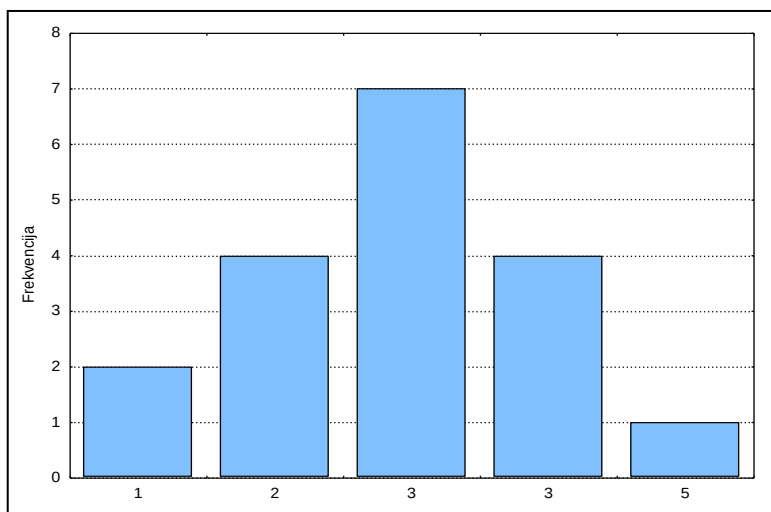
ENTITETI	OP
KRST-V	1
NORI-M	1
MAMI-M	2
ERJA-M	2
SAMA-A	2
VUJI-I	2
MILL-M	3
SUBO-S	3
VOLO-D	3
BAZD-M	3
BLAS-M	3
KRUN-D	3
MALI-M	3
ANZU-V	4
NOVO-K	4
GIRI-G	4
MILA-D	4
VANJ-M	5

S obzirom da diskretna varijabla *osobna pogreška* ima mali broj mogućih vrijednosti (1, 2, 3, 4 i 5), distribucija frekvencija sastojat će se od 5 grupa s pripadajućim frekvencijama (tablica 2.3-9).

Tablica 2.3-9. Grupiranje entiteta prema varijabli broj osobnih pogrešaka

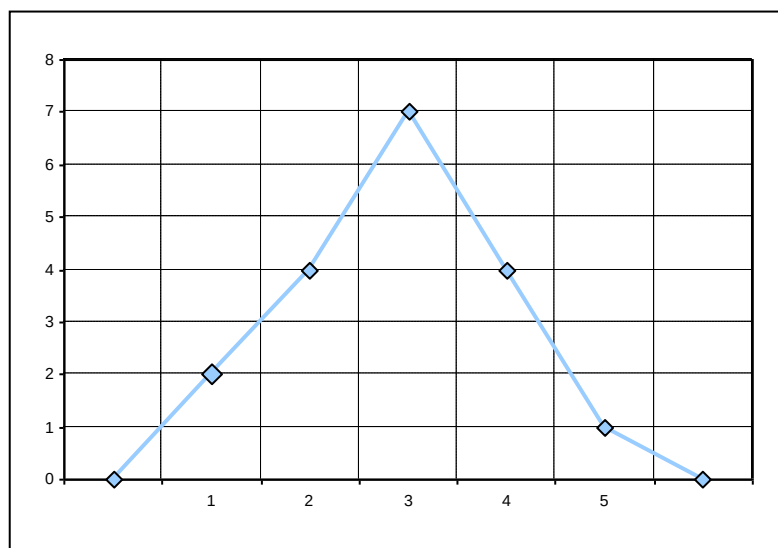
BROJ OSOBNIH POGREŠAKA	FREKVENCIJA
1	2
2	4
3	7
4	4
5	1
UKUPNO	18

Distribuciju frekvencija, prikazanu u tablici 2.3-9, moguće je grafički prikazati pomoću *histograma* i *poligona frekvencija*.



Slika 2.3-4. Histogram frekvencija

Histogram frekvencija je površinski grafički prikaz distribucije frekvencija u kojem se numeričke vrijednosti obilježja upisuju na sredini pravokutnika jednakih osnovica čija će visina ovisiti o veličini frekvencije (slika 2.3-4).



Slika 2.3-5. Poligon frekvencija

Poligon frekvencija je linijski grafički prikaz distribucije frekvencija koji nastaje spajanjem točaka položaj kojih je u koordinatnom sustavu određen numeričkom vrijednošću obilježja i veličinom frekvencije (slika 2.3-5).

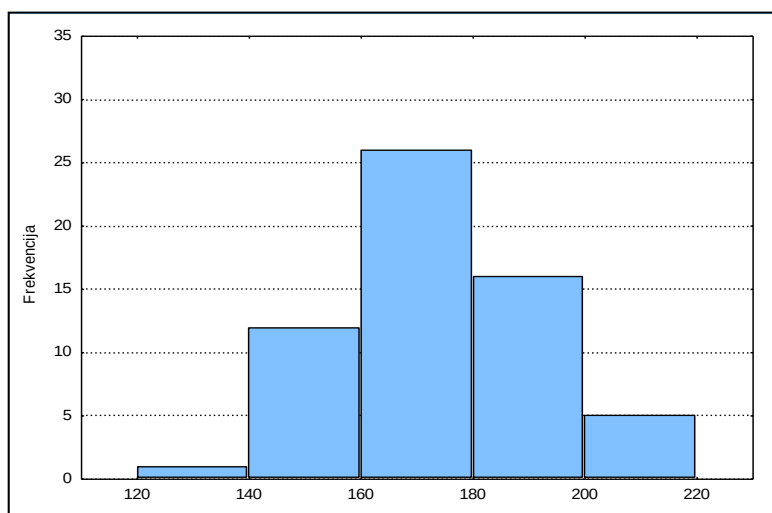
Ako diskretna varijabla ima veliki broj mogućih vrijednosti ili ako se radi o kontinuiranoj varijabli, podaci se grupiraju u manji broj razreda. Za uspješno grupiranje potrebno je odrediti prikladan broj razreda i njihovu veličinu - *interval razreda*. Broj razreda prije svega ovisi o broju entiteta i najčešće se kreće između pet i petnaest.

Primjerice, u tablici 2.3-10 prikazano je grupiranje 60 judaša u 5 razreda u varijabli *skok udalj s mjesta*. Vidljivo je da je najveći broj entiteta u trećem razredu (26 ili 43.33 %), odnosno da najveći broj judaša u skoku udalj s mjesta postiže vrijednosti koje se nalaze u intervalu između 161 i 180 cm, dok se broj entiteta s boljim i lošijim rezultatima smanjuje.

Tablica 2.3-10. *Apsolutne i relativne frekvencije*

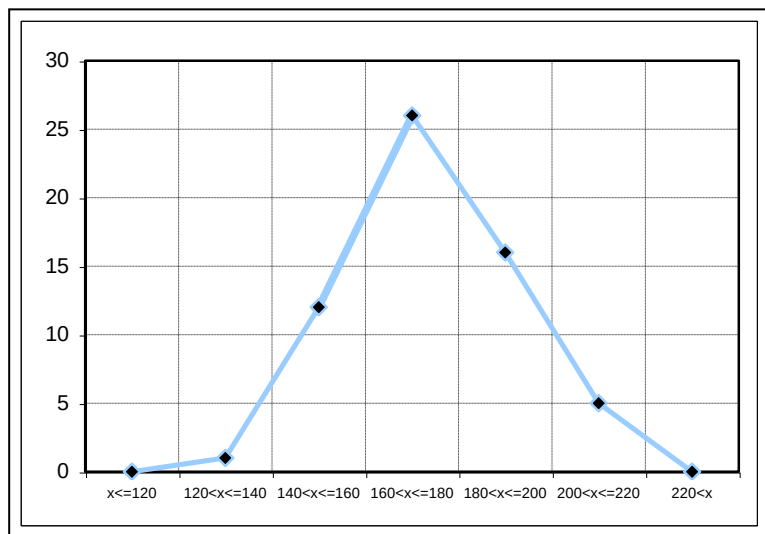
Intervali razreda	f	rf (%)
$120 < x \leq 140$	1	1,67
$140 < x \leq 160$	12	20,00
$160 < x \leq 180$	26	43,33
$180 < x \leq 200$	16	26,67
$200 < x \leq 220$	5	8,33

Dobivene frekvencije (apsolutne i relativne) moguće je također grafički prikazati histogramom (slika 2.3-6) i poligonom frekvencija (slika 2.3-7). *Histogram frekvencija* crta se tako da osnovicu pravokutnika određuje interval razreda, a visinu frekvencija pojedinog razreda.



Slika 2.3-6. *Histogram frekvencija s razredima*

Poligon frekvencija nastaje spajanjem točaka čije su koordinate određene sredinom pojedinog razreda i frekvencijom tog razreda.



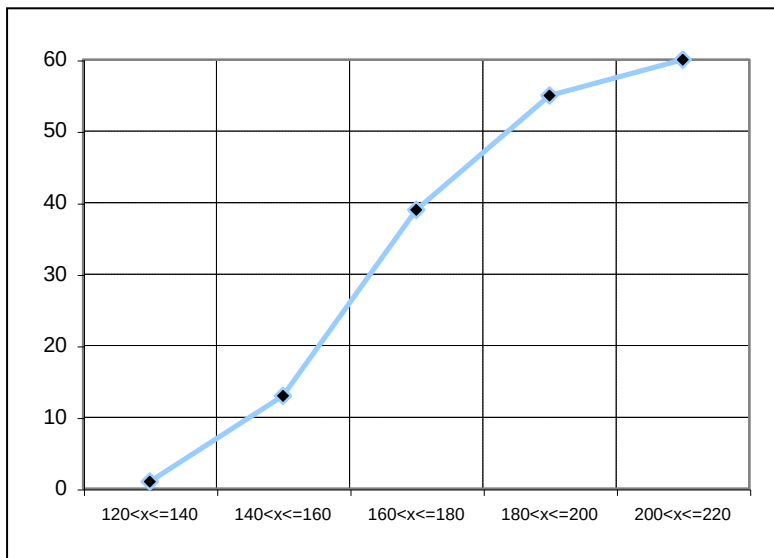
Slika 2.3-7. Poligon frekvencija s razredima

Ako se frekvencije (apsolutne ili relativne) svakog sljedećeg razreda zbrajaju sa sumom frekvencija predhodnih razreda, dobiju se *kumulativne frekvencije* (tablica 2.3-11).

Tablica 2.3-11. Apsolutne i relativne kumulativne frekvencije

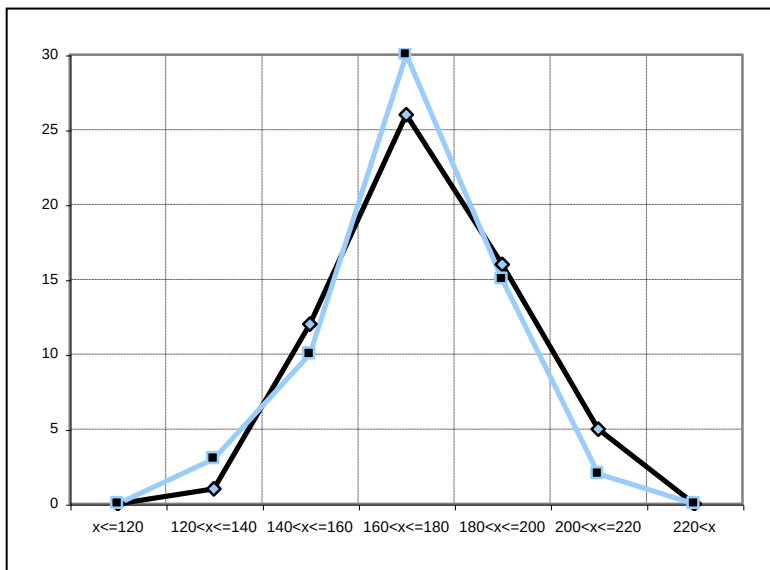
Intervali razreda	cf	crf (%)
$120,000 < x \leq 140,000$	1	1,67
$140,000 < x \leq 160,000$	13	21,67
$160,000 < x \leq 180,000$	39	65,00
$180,000 < x \leq 200,000$	55	91,67
$200,000 < x \leq 220,000$	60	100,00

Kumulativne frekvencije pokazuju koliko je entiteta (apsolutno ili relativno) kojima je vrijednost jednaka ili manja od gornje granice razreda čija je frekvencija ušla u kumulativni niz. Primjerice, na temelju tablice 2.3-11 vidljivo je da je 39 ili 65 % ispitanika skočilo u dalj s mjesta do 180 cm, a 21 ($60 - 39 = 21$) ili 35 % ($100 - 65 = 35$) više od 180 cm. Kumulativne frekvencije također se prikazuju histogramom ili poligonom frekvencija (slika 2.3-8).



Slika 2.3-8. Kumulativni poligon frekvencija

Ako se na istoj slici žele prikazati i usporediti dvije ili više distribucija frekvencija, tada je radi veće preglednosti bolje koristiti poligone frekvencija (slika 2.3-9).



Slika 2.3-9. Poligoni frekvencija dviju grupa

2.4

Deskriptivni pokazatelji

Deskriptivni pokazatelji koriste se za opis varijabli, a dijele se na mjere centralne tendencije ili središnje mjere, mjere varijabilnosti ili disperzije te mjere asimetrije i izduženosti distribucije.

2.4.1. Mjere centralne tendencije ili središnje mjere

Zajedničko obilježje *mjera centralne tendencije* ili *središnjih mjera* jest da svaka od njih predstavlja jednu vrijednost koja bi trebala biti dobra zamjena za skup svih pojedinačnih vrijednosti, odnosno njihov najbolji reprezentant. Dakle, težnja je mjera centralne tendencije da ukažu na vrijednost oko koje postoji tendencija grupiranja rezultata, odnosno ukazuju na rezultat koji ima najveću vjerojatnost pojavljivanja. Postoji nekoliko mjera centralne tendencije koje se razlikuju prema načinu utvrđivanja i mogućnostima primjene. Tako se najčešće razlikuju *potpune* i *položajne* mjere centralne tendencije. Potpune mjere centralne tendencije izračunavaju se na temelju svih podataka. To su: *aritmetička sredina*, *geometrijska sredina* i *harmonijska sredina*. Nasuprot njima, *mod* i *medijan* su određeni položajem u uređenom nizu podataka. S obzirom na prirodu varijabli, u kineziološkim istraživanjima najčešće se koriste aritmetička sredina, mod i medijan, dok se ostale mjere centralne tendencije rijetko primjenjuju.

2.4.1.1. Aritmetička sredina ili prosječna vrijednost

Aritmetička sredina svakako je najčešće korištena mjera centralne tendencije. Izračunava se kao omjer zbroja svih vrijednosti neke varijable i ukupnog broja entiteta

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

gdje je $i = 1, \dots, n$, a n predstavlja broj entiteta.

Primjer: 10 entiteta postiglo je sljedeće rezultate u nekom motoričkom testu: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5. Aritmetička sredina je

$$\bar{x} = \frac{1+2+2+3+3+3+3+4+4+5}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

Aritmetička sredina računa se samo za kvantitativne varijable i sljedećih je karakteristika:

- zbroj odstupanja vrijednosti svih pojedinačnih rezultata od aritmetičke sredine jednaka je nuli, odnosno aritmetička sredina predstavlja težište rezultata.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

Dokaz: Ako je odstupanje pojedinačnih rezultata od aritmetičke sredine jednako

$$d_i = x_i - \bar{x}, \text{ onda je } \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}), \text{ odnosno } \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}.$$

S obzirom da je $\bar{x}$ konstanta, onda je izraz $\sum_{i=1}^n \bar{x}$ ekvivalentan izrazu $n\bar{x}$, pa je

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n x_i - n \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ jer je } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \text{ pa je } \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

- zbroj kvadriranih odstupanja svih pojedinačnih vrijednosti od aritmetičke sredine je minimalan.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min$$

Dokaz: Treba dokazati da je $\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$ minimum kada je $m = \bar{x}$.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i m + m^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i m + \sum_{i=1}^n m^2$$

S obzirom da je m konstanta, onda je izraz $\sum_{i=1}^n m^2$ ekvivalentan izrazu nm^2 , pa je

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2m \sum_{i=1}^n x_i + nm^2. \text{ Ako dodamo i oduzmemo } n\bar{x}^2 \text{ tako da}$$

vrijednost izraza ostane ista te zamijenimo $\sum_{i=1}^n x_i$ za $n\bar{x}$, tada dobijemo

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 - 2m n\bar{x} + nm^2.$$

Daljnijm sređivanjem dobijemo $\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 + n(\bar{x}^2 - 2m\bar{x} + m^2)$,

odnosno $\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 + n(\bar{x} - m)^2$. Moguće je uočiti da će izraz

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 + n(\bar{x} - m)^2 \text{ biti minimalan kada je } m = \bar{x}, \text{ jer je tada } n(\bar{x} - m)^2 = 0.$$

- aritmetička sredina uvijek se nalazi između minimalne i maksimalne vrijednosti.

$$x_{\min} \leq \bar{x} \leq x_{\max}$$

S obzirom na to da je aritmetička sredina potpuna mjera centralne tendencije, odnosno da na njenu vrijednost podjednako utječu rezultati svih entiteta, podložna je promjenama pod utjecajem izrazito niskih ili visokih pojedinih vrijednosti, što može znatno utjecati na njenu reprezentativnost.

Aritmetička sredina varijable dobivene dodavanjem ili množenjem konstantnom vrijednošću

U praksi se često događa da se svim rezultatima ispitanika u nekoj varijabli x_i dodaje ili oduzima neka konstantna vrijednost β

$$x_i' = x_i \pm \beta$$

Aritmetička sredina tako nastale varijable jednaka je aritmetičkoj sredini originalnih rezultata (prije dodavanja konstante), koja je uvećana ili umanjena za vrijednost konstante

$$\bar{x}' = \bar{x} \pm \beta$$

Dokaz:

$$\bar{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i + \beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} n\beta = \bar{x} + \beta$$

Primjer:

x_i	$x_i' = x_i + 3$
1	4
2	5
2	5
3	6
3	6
3	6
3	6
4	7
4	7
5	8
$\Sigma 30$	$\Sigma 60$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^n x_i'}{n} = \frac{60}{10} = 6$$

$$\bar{x}' = \bar{x} + 3 = 3 + 3 = 6$$

Ako svaki rezultat ispitanika u nekoj varijabli x_i pomnožimo (ponderiramo) nekom konstantnom vrijednošću β (najčešće radi toga da se promijeni važnost pojedine varijable u odnosu na neku drugu varijablu)

$$x_i' = \beta \cdot x_i,$$

onda je aritmetička sredina tako nastale varijable jednaka aritmetičkoj sredini originalnih rezultata, koja je pomnožena vrijednošću konstante β

$$\bar{x}' = \beta \cdot \bar{x}$$

Dokaz:

$$\bar{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta \cdot x_i = \beta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \beta \cdot \bar{x}$$

Primjer:

x_i	$x'_i = 3 x_i$
1	3
2	6
2	6
3	9
3	9
3	9
3	9
4	12
4	12
5	15
$\Sigma 30$	$\Sigma 90$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^n x'_i}{n} = \frac{90}{10} = 9$$

$$\bar{x}' = 3 \cdot \bar{x} = 3 \cdot 3 = 9$$

Aritmetička sredina linearne kombinacije varijabli

Pod *jednostavnom linearnom kombinacijom* podrazumijeva se nova varijabla koja je nastala zbrajanjem drugih varijabli. Ako su x_j ($j=1, \dots, m$) varijable (vektori) istog reda, onda je

$$y = \sum_{j=1}^m x_j = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

jednostavna linearna kombinacija varijabli x_j .

Aritmetička sredina ovako dobivene varijable jednaka je zbroju aritmetičkih sredina varijabli uključenih u linearnu kombinaciju.

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^m \bar{x}_j = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im}) \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_{i1} + \sum_{i=1}^n x_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^n x_{im} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i1} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i2} + \dots + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{im} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m\end{aligned}$$

Primjer:

x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	$y_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}$
1	3	2	6
2	4	5	11
2	2	1	5
3	5	4	12
3	1	5	9
3	1	4	8
3	5	5	13
4	4	3	11
4	5	1	10
5	3	4	12
Σ30	Σ33	Σ34	Σ97

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1}}{n} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i2}}{n} = \frac{33}{10} = 3,3$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i3}}{n} = \frac{34}{10} = 3,4$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{97}{10} = 9,7$$

$$\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 3 + 3,3 + 3,4 = 9,7$$

Diferencijalno ponderirana linearna kombinacija je nova varijabla (vektor) nastala zbrajanjem produkata drugih varijabli sa skalarima. Ako su $\mathbf{x}_j$ ($j = 1, \dots, m$) vektori istog reda, a β_j skalari, onda je

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{x}_j = \beta_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{x}_m$$

diferencijalno ponderirana linearna kombinacija vektora $\mathbf{x}_j$.

Aritmetička sredina tako dobivene varijable jednaka je zbroju ponderiranih aritmetičkih sredina varijabli uključenih u linearnu kombinaciju.

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^m \beta_j \bar{x}_j = \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \dots + \beta_m \bar{x}_m$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_m x_{im}) \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \beta_1 x_{i1} + \sum_{i=1}^n \beta_2 x_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^n \beta_m x_{im} \right) = \beta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i1} + \beta_2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i2} + \dots + \beta_m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{im} = \\ &= \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \dots + \beta_m \bar{x}_m\end{aligned}$$

Primjer:

x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	$2x_{i1}$	$3x_{i2}$	$5x_{i3}$	$y_i = 2x_{i1} + 3x_{i2} + 5x_{i3}$
1	3	2	2	9	10	21
2	4	5	4	12	25	41
2	2	1	4	6	5	15
3	5	4	6	15	20	41
3	1	5	6	3	25	34
3	1	4	6	3	20	29
3	5	5	6	15	25	46
4	4	3	8	12	15	35
4	5	1	8	15	5	28
5	3	4	10	9	20	39
$\Sigma 30$	$\Sigma 33$	$\Sigma 34$	$\Sigma 60$	$\Sigma 99$	$\Sigma 170$	$\Sigma 329$

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1}}{n} = \frac{30}{10} = 3 ; \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i2}}{n} = \frac{33}{10} = 3,3 ; \quad \bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i3}}{n} = \frac{34}{10} = 3,4$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{329}{10} = 32,9 ; \quad \bar{y} = 2 \cdot \bar{x}_1 + 3 \cdot \bar{x}_2 + 5 \cdot \bar{x}_3 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3,3 + 5 \cdot 3,4 = 32,9$$

Računanje aritmetičkih sredina matričnom algebrom

Ako je X matrica podataka dobivena opisivanjem nekog skupa od n entiteta skupom od m varijabli

$$X = (x_{ij})$$

gdje je $i = 1, \dots, n$, a $j = 1, \dots, m$, tada se vektor aritmetičkih sredina m dobije operacijom

$$\mathbf{m} = \mathbf{X}^T \mathbf{1} n^{-1}$$

gdje je $\mathbf{1}$ vektor stupca s n jedinica.

Primjer: 9 ispitanika postiglo je sljedeće rezultate u skoku udalj (SD), trčanju na 100 metara (T100m) i bacanju kugle (BK). Potrebno je izračunati aritmetičke sredine u navedenim varijablama uz pomoć matrične algebre.

$$\mathbf{X} =$$

SD	T100m	BK
359	13,6	561
321	13,9	550
346	13,7	538
332	14	490
450	12,2	518
314	14,1	551
410	12,5	589
425	12,3	602
369	13,5	547

$$\mathbf{X}^T$$

359	321	346	332	450	314	410	425	369
13,6	13,9	13,7	14	12,2	14,1	12,5	12,3	13,5
561	550	538	490	518	551	589	602	547

$$\mathbf{1} n^{-1} = \mathbf{m}$$

1
1
1
1
1
1
1
1
1

$$9^{-1} =$$

369,56
13,31
549,56

$$\bar{x}_{SD} = 369,56$$

$$\bar{x}_{T100m} = 13,31$$

$$\bar{x}_{BK} = 549,56$$

2.4.1.2. Mod ili dominantna vrijednost

Mod ili *dominantna vrijednost* je ona vrijednost kvalitativne ili kvantitativne varijable koja se najčešće pojavljuje, odnosno koja je najveće frekvencije. Mod dijeli distribuciju uređenih podataka na rastući i padajući dio. Određivanje modalne vrijednosti kod kvalitativnih i diskretnih kvantitativnih varijabli svodi se na utvrđivanje vrijednosti s najvećom frekvencijom.

Primjer: 10 entiteta je postiglo sljedeće rezultate u nekom motoričkom testu: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5. Mod je jednak $\mu_o = 3$.

Ocjena	f
1	1
2	2
3	4
4	2
5	1

Kod kontinuiranih kvantitativnih varijabli određivanje modalne vrijednosti je otežano. Moguće je utvrditi razred u kojem se mod nalazi. Modalni razred je onaj s najvećom frekvencijom. Da bismo unutar modalnog razreda utvrdili mod, koristimo pretpostavku da na njegovu vrijednost utječu frekvencije susjednih razreda. Stoga je mod moguće aproksimativno odrediti pomoću formule

$$\mu_o = L_1 + \frac{(b-a)}{(b-a) + (b-c)} I$$

gdje je

- L_1 donja granica modalnog razreda
- a frekvencija ispred modalnog razreda
- b frekvencija modalnog razreda
- c frekvencija iza modalnog razreda
- I interval modalnog razreda

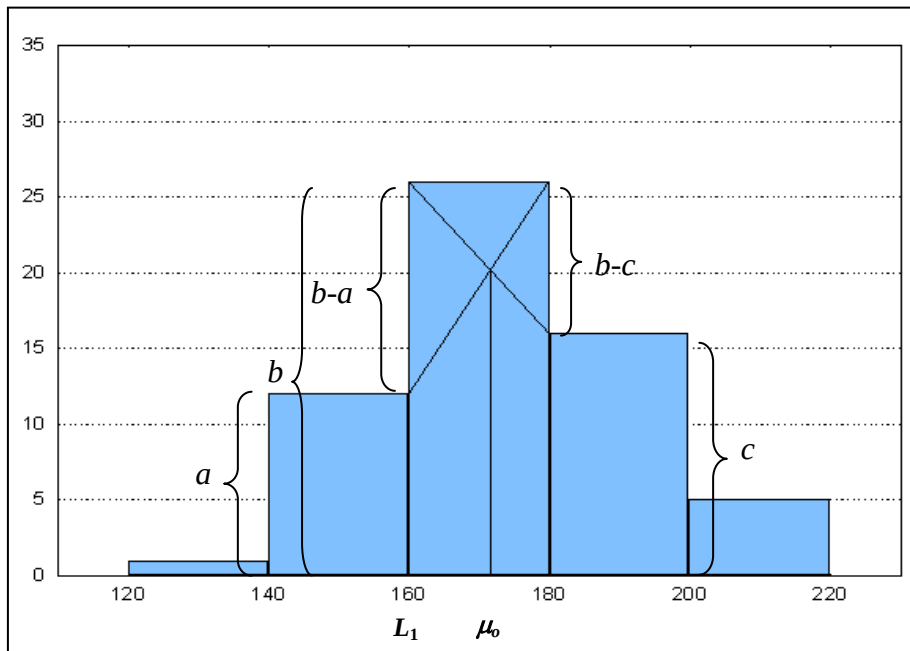
Primjer: U tablici 2.4-1 prikazano je grupiranje 60 judaša u 5 razreda u varijabli *skok udalj s mjesta*. Vidljivo je da je najveći broj entiteta u trećem razredu (26), odnosno da najveći broj judaša u skoku u dalj s mjesta ima vrijednosti koje se nalaze u intervalu između 161 i 180 cm.

Tablica 2.4-1. Tablica frekvencija

Intervali razreda	f
120<x≤140	1
140<x≤160	12
160<x≤180	26
180<x≤200	16
200<x≤220	5

$$\mu_o = 161 + \frac{(26-12)}{(26-12) + (26-16)} \cdot 20 = 161 + \frac{14}{24} \cdot 20 = 161 + 11,66 = 172,6$$

Dakle, aproksimativna modalna vrijednost je 172,6 (slika 2.4-1). Ovako aproksimativno utvrđena modalna vrijednost ne mora nužno imati najveću frekvenciju.



Slika 2.4-1. Histogram frekvencija

2.4.1.3. Medijan ili centralna vrijednost

Medijan je vrijednost koja se nalazi na sredini uređenog niza podataka (uzlazno ili silazno sortiranog), odnosno vrijednost koja uređeni niz podataka dijeli na dva jednakobrojna dijela. Medijan je moguće odrediti za negrupirane i grupirane ordinalne te kvantitativne diskretne i kontinuirane varijable.

Medijan negrupiranih podataka moguće je odrediti nakon uzlaznog ili silaznog uređenja (sortiranja) podataka. Ako je broj podataka neparan, onda medijan predstavlja vrijednost središnjeg člana tj. entiteta (x_r)

$$\mu_e = x_r \text{ gdje je } r = \frac{n+1}{2}$$

Ako je broj podataka paran, onda je medijan jednak aritmetičkoj sredini vrijednosti dvaju središnjih članova uređenog niza.

$$\mu_e = \frac{x_{r1} + x_{r2}}{2}$$

gdje je

$$r1 = \frac{n}{2}, \text{ a } r2 = \frac{n}{2} + 1$$

Primjer: Neka je 15 entiteta (neparan niz) izmjereno nekim testom, a rezultati su uređeni po veličini:

X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅
1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5

Medijan je 8. podatak po redu $\mu_e = x_8 = 3$ jer je $r = \frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$

Ako je 16 entiteta (paran niz) izmjereno nekim testom, a rezultati su uređeni po veličini

X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆
1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5

onda se medijan odredi kao aritmetička sredina 8. i 9. podatka po redu

$$\mu_e = (x_8 + x_9)/2 = (3+3)/2 = 3 \text{ jer je } r1 = \frac{n}{2} = \frac{16}{2} = 8, \text{ a}$$

$$r2 = \frac{n}{2} + 1 = \frac{16}{2} + 1 = 9$$

Za utvrđivanje medijana grupiranih podataka potrebno je prethodno izračunati i kumulativne frekvencije, odnosno utvrditi kumulativnu distribuciju frekvencija. Potom je medijan moguće aproksimativno utvrditi formulom

$$\mu_e = L_1 + \frac{\frac{n}{2} - \sum f_1}{f_{med}} I,$$

gdje je

- L_1 donja granica medijalnog razreda (medijalni razred je onaj u kojemu kumulativna frekvencija prvi put obuhvaća vrijednost $n/2$,
- n - broj entiteta
- $\sum f_1$ zbroj frekvencija do medijalnog razreda
- f_{med} frekvencija medijalnog razreda

- I interval medijalnog razreda

Primjer: Neka su rezultati 60 entiteta u varijabli *skok udalj s mjesta* dani kao distribucija frekvencija:

Intervali razreda	f	cf
$120 < x \leq 140$	1	1
$140 < x \leq 160$	12	13
$160 < x \leq 180$	26	39
$180 < x \leq 200$	16	55
$200 < x \leq 220$	5	60

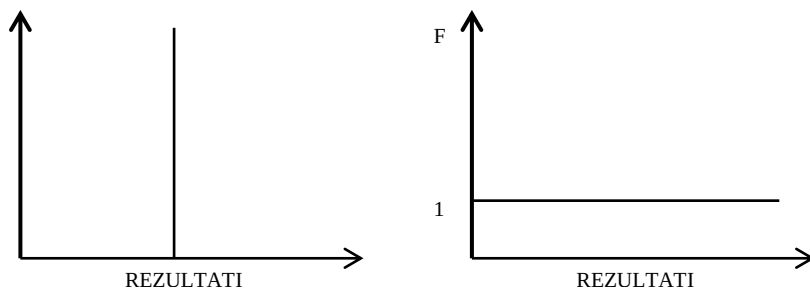
$$L_1 = 161; \Sigma f_1 = 13; f_{med} = 26; I = 20$$

$$\mu_e = L_1 + \frac{\frac{n}{2} - \Sigma f_1}{f_{med}} I = 161 + \frac{30 - 13}{26} \cdot 20 = 161 + 13.07 = 174.07$$

Na medijan i mod ne utječu ekstremno visoki ili niski rezultati pa bolje reprezentiraju pozitivno i negativno asimetrično distribuirane varijable.

2.4.2. Mjere varijabilnosti ili disperzije

Za dobru deskripciju analizirane pojave nije dostatno samo izračunati mjere centralne tendencije. Ako se rezultati entiteta grupiraju oko neke središnje vrijednosti, onda odgovarajuća mjera centralne tendencije može biti dobar reprezentant analiziranih podataka. Ako rezultati malo variraju oko aritmetičke sredine, onda ih ona bolje reprezentira nego kad podaci znatno variraju. Dvije se varijable, koje se ne razlikuju po mjeri centralne tendencije, mogu razlikovati po raspršenosti (disperziji) podataka. Kada bi podaci bili međusobno jednaki, tada ne bi bilo varijabilnosti, a tendencija grupiranja rezultata bila bi maksimalna. Ako bi se pri mjerenju nekog obilježja na nekoj mjernoj skali uvijek dobivale različite vrijednosti, tada ne bi bilo nikakvog grupiranja rezultata, a varijabilnost bi bila maksimalna (slika 2.4-2).



Slika 2.4-2. Prikaz dva ekstremna slučaja: 1. nema varijabilnosti (maksimalno grupiranje rezultata); 2. maksimalna varijabilnost (nema grupiranja rezultata)

U stvarnosti se, međutim, takvi ekstremni slučajevi gotovo nikad ne događaju, već se prikupljeni podaci uglavnom, manje ili više, grupiraju oko neke središnje vrijednosti. Grupiranje se može procijeniti *mjerama varijabilnosti* ili *disperzije*. Za opis disperzije varijabli u kineziološkim istraživanjima najčešće se koriste *totalni raspon*, *interkvartil*, *varijanica* i *standardna devijacija*.

2.4.2.1. Totalni raspon

Totalni raspon (R_{tot}) je najjednostavnija mjera varijabilnosti, a utvrđuje se kao razlika između maksimalne (x_{max}) i minimalne (x_{min}) vrijednosti.

$$R_{tot} = x_{max} - x_{min}$$

Totalni raspon se iskazuje u mjernim jedinicama varijable, a s obzirom da zavisi samo od dva podatka (maksimalnog i minimalnog), ekstremni rezultati znatno utječu na njegovu vrijednost. Osim toga, lako je uočiti da se s povećanjem broja entiteta u uzorku obično povećava i totalni raspon jer se povećava vjerojatnost uključivanja entiteta s ekstremnim (maksimalnim i minimalnim) vrijednostima. Stoga je raspon vrlo nesigurna mjera varijabilnosti.

2.4.2.2. Interkvartil

S obzirom na to da je *totalni raspon* nesigurna mjera varijabilnosti jer ovisi o ekstremnim vrijednostima, moguće je izračunati raspon između 50% središnjih članova niza. Dakle, ako se uzlazno sortira neki niz podataka te se izuzmu prva i zadnja četvrtina članova, raspon rezultata preostalih 50% podataka naziva se *interkvartil*. Za izračunavanje interkvartila potrebno je utvrditi vrijednosti *prvog* i *trećeg kvartila*.

Prvi ili donji kvartil (Q_1) je vrijednost koja uređeni niz podataka dijeli na 1/4 članova s manjom ili jednakom vrijednosti, odnosno 3/4 članova s većom ili jednakom vrijednosti. Redni broj podatka koji predstavlja prvi kvartil određuje se kao $r=n/4$ (n - broj entiteta), odnosno ako $r=n/4$ nije cijeli broj, onda se uzima prvi sljedeći cijeli broj r , a $Q_1 = x_r$. Ako je $r=n/4$ cijeli broj, onda je

$$Q_1 = \frac{x_r + x_{r+1}}{2}$$

Treći ili gornji kvartil (Q_3) je vrijednost koja uređeni niz podataka dijeli na 3/4 članova s manjom ili jednakom vrijednosti, odnosno 1/4 članova s većom ili jednakom vrijednosti. Redni broj podatka koji predstavlja treći kvartil određuje se kao $r=3/4 \cdot n$ (n - broj entiteta), odnosno ako $r=3/4 \cdot n$ nije cijeli broj, onda se uzima prvi sljedeći cijeli broj r , a $Q_3 = x_r$. Ako je $r=3/4 \cdot n$ cijeli broj, onda je

$$Q_3 = \frac{x_r + x_{r+1}}{2}$$

Interkvartil (Q) je razlika između trećeg (Q_3) i prvog (Q_1) kvartila

$$Q = Q_3 - Q_1$$

Ako se interkvartil (Q) kao mjera koja je izražena mjernim jedinicama analizirane varijable podijeli sa zbrojem prvog (Q_1) i trećeg (Q_3) kvartila, dobije se tzv. *koeficijent kvartilne devijacije* (K).

$$K = \frac{Q}{Q_1 + Q_3}$$

Dakle, koeficijent kvartilne devijacije predstavlja relativnu mjeru varijabilnosti, a vrijednost mu se kreće od 0 do 1.

2.4.2.3. Varijanca i standardna devijacija

Stupanj raspršenosti moguće je procijeniti i putem odstupanja rezultata entiteta od neke središnje vrijednosti, najčešće aritmetičke sredine. Dakle, potrebno je izračunati odstupanja vrijednosti svakog entiteta u određenoj varijabili od aritmetičke sredine te varijable.

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

Temeljem tih odstupanja (d_i) moguće je izračunati mjeru varijabilnosti jer veća odstupanja ukazuju na veću raspršenost podataka. Iz toga slijedi da je stupanj varijabilnosti podataka moguće iskazati putem aritmetičke sredine izračunatih odstupanja. Međutim, takva bi operacija kao rezultat dala *nulu* jer je aritmetička sredina težište rezultata, odnosno zbroj odstupanja svih pojedinačnih rezultata od aritmetičke sredine jednak je *nuli*.

$$\sum_{i=1}^n d_i = 0$$

Ovaj problem moguće je riješiti kvadriranjem. Na taj način dobiveno prosječno kvadratno odstupanje rezultata entiteta od aritmetičke sredine varijable naziva se *varijanca*.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n}$$

S obzirom na to da je varijanca prosječno kvadratno odstupanje, otežano je njezino interpretiranje. Da bi se izračunata mjera raspršenosti svela na mjernu jedinicu varijable, potrebno je iz varijance izračunati drugi korijen. Tako izračunata mjera varijabilnosti naziva se *standardna devijacija* (σ).

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n}}$$

Daljnijim razvojem ove formule može se dobiti formula koja omogućava ekonomičnije izračunavanje zato što nije potrebno

izračunavati pojedinačne distance između rezultata svakog entiteta i aritmetičke sredine niti kvadrirati te distance.

$$\sigma = \frac{1}{n} \sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Izvod: Kvadriranjem binoma u zagradi dobijemo

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2),$$

što je ekvivalentno izrazu $\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i \bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right)$. Množenjem sa $1/n$

dobijemo $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2x_i \bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} + \bar{x}^2$ jer je

$\sum_{i=1}^n \bar{x}^2$ ekvivalentan izrazu $n\bar{x}^2$.

Daljnijm sređivanjem dobijemo $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$.

Množenjem sa n^2 dobijemo

$$n^2 \sigma^2 = \frac{n^2}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n^2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \text{ Množenjem sa } 1/n^2$$

dobijemo

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right), \text{ pa je standardna devijacija jednaka}$$

$$\sigma = \frac{1}{n} \sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

Želi li se izračunati standardna devijacija nekog uzorka entiteta, temeljem koje se procjenjuje standardna devijacija populacije koje je odabrani uzorak reprezentant, onda se standardna devijacija računa s nazivnikom $n-1$ umjesto n .

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Dakle, ako se želi utvrditi standardna devijacija neke skupine podataka, onda je ispravno izračunati standardnu devijaciju sa n u nazivniku. Ako se želi zaključivati o populaciji iz koje su rezultati odabrani, onda je ispravno računanje standardne devijacije sa $n-1$ u nazivniku.

Napomena:

Detaljnije logičko objašnjenje može se potražiti u knjizi:

- B. Petz (2002). Osnovne statističke metode za nematematičare (4. izd., str. 61-62. i 125-126). Jastrebarsko: Naklada Slap.

Matematički dokaz u knjigama:

- Ž. Pauše (1993). Uvod u matematičku statistiku (str. 117-120). Zagreb: Školska knjiga.
- I. Pavić (1988). Statistička teorija i primjena (4.izd., str. 179-181). Zagreb: Tehnička knjiga.

Primjer: 10 entiteta je postiglo sljedeće rezultate u nekom motoričkom testu. Varijancu i standardnu devijaciju moguće je izračunati ovim postupkom

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	x_i^2
1	-2	4	1
2	-1	1	4
2	-1	1	4
3	0	0	9
3	0	0	9
3	0	0	9
3	0	0	9
4	1	1	16
4	1	1	16
5	2	4	25
$\Sigma 30$	$\Sigma 0$	$\Sigma 12$	$\Sigma 102$

$$\bar{x} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{12}{10}} = \sqrt{1,2} = 1,095$$

ili

$$\sigma = \frac{1}{n} \sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{1}{10} \sqrt{10 \cdot 102 - 30^2} = \frac{1}{10} \sqrt{120} = \frac{10,95}{10} = 1,095$$

Varianca i standardna devijacija varijable dobivene dodavanjem ili množenjem konstantnom vrijednošću

Ako svim rezultatima ispitanika u nekoj varijabli x_i dodamo ili oduzmemo konstantnu vrijednost β

$$x_i' = x_i \pm \beta,$$

varianca i standardna devijacija tako nastale varijable ostat će nepromijenjene.

Dokaz:

$$\begin{aligned}\sigma'^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x'_i - \bar{x}')^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i + \beta - (\bar{x} + \beta))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} + \beta - \beta)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\end{aligned}$$

Ako svaki rezultat ispitanika u nekoj varijabli x_i pomnožimo (ponderiramo) nekom konstantnom pozitivnom vrijednošću β

$$x'_i = \beta \cdot x_i,$$

onda je varijanca ovako nastale varijable jednaka varijanci originalnih rezultata koja je pomnožena s kvadratnom vrijednošću konstante

$$\sigma'^2 = \beta^2 \cdot \sigma^2,$$

a standardna je devijacija jednaka standardnoj devijaciji originalnih rezultata koja je pomnožena vrijednošću konstante

$$\sigma' = \sqrt{\beta^2 \cdot \sigma^2} = \beta \cdot \sigma$$

Dokaz:

$$\sigma'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x'_i - \bar{x}')^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\beta \cdot x_i - (\beta \cdot \bar{x}))^2 = \beta^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \beta^2 \cdot \sigma^2$$

$$\sigma' = \sqrt{\beta^2 \cdot \sigma^2} = \beta \cdot \sigma$$

Varijanca i standardna devijacija linearne kombinacije varijabli

Ako je

$$y = \sum_{j=1}^m x_j = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

jednostavna linearna kombinacija x_j ($j = 1, \dots, m$) varijabli istog reda, onda je varijanca ovako dobivene varijable jednaka zbroju varijanci i dvostrukom zbroju kovarijanci između varijabli uključenih u linearnu kombinaciju

$$\sigma_y^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2 + 2 \sum_{j,k=1}^m c_{jk} ; j,k=1,\dots,m (j \neq k),$$

gdje je

$$c_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n d_{ij} d_{ik}}{n} ; i=1,\dots,n$$

kovarijanca između varijabli j i k . S obzirom da je Pearsonov koeficijent korelacija između varijabla j i k (v. poglavlje 2.11. str. 160-179) jednak,

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n d_{ij} d_{ik}}{n \sigma_j \sigma_k}$$

množenjem obiju strana formule sa σ_j i σ_k , dobije se

$$r_{jk} \sigma_j \sigma_k = \frac{\sum_{i=1}^n d_{ij} d_{ik}}{n} = c_{jk}$$

Tako se formula za izračunavanje varijance linearne kombinacije varijabli može napisati u sljedećem obliku

$$\sigma_y^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2 + 2 \sum_{j,k=1}^m r_{jk} \sigma_j \sigma_k ; j,k=1,\dots,m (j \neq k)$$

Ako su x_j ($j = 1, \dots, m$) vektori istog reda, a β_j skalari, onda je

$$y = \sum_{j=1}^m \beta_j x_j = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m$$

diferencijalno ponderirana linearna kombinacija vektora $\mathbf{x}_j$. Varijanca ovako dobivene varijable jednaka je

$$\sigma_y^2 = \sum_{j=1}^m \beta_j^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{j,k=1}^m \beta_j \beta_k c_{jk} ; j,k=1,...,m (j \neq k),$$

odnosno,

$$\sigma_y^2 = \sum_{j=1}^m \beta_j^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{j,k=1}^m \beta_j \beta_k r_{jk} \sigma_j \sigma_k ; j,k=1,...,m (j \neq k)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im}) - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m))^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((x_{i1} - \bar{x}_1) + (x_{i2} - \bar{x}_2) + \dots + (x_{im} - \bar{x}_m))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_{i1} + d_{i2} + \dots + d_{im})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_{i1}^2 + d_{i2}^2 + \dots + d_{im}^2 + 2d_{i1}d_{i2} + 2d_{i1}d_{i3} + \dots + 2d_{im-1}d_{im}) = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n d_{i1}^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n d_{i2}^2}{n} + \dots + \frac{\sum_{i=1}^n d_{im}^2}{n} + 2 \frac{\sum_{i=1}^n d_{i1}d_{i2}}{n} + 2 \frac{\sum_{i=1}^n d_{i1}d_{i3}}{n} + \dots + 2 \frac{\sum_{i=1}^n d_{im-1}d_{im}}{n} = \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_m^2 + 2c_{12} + 2c_{13} + \dots + 2c_{m-1m} = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2 + 2 \sum_{j,k=1}^m c_{jk} \end{aligned}$$

gdje su $\sigma_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^n d_{ij}^2}{n}$ varijance varijabli $j (j=1,...,m)$, a $c_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n d_{ij}d_{ik}}{n}$ kovarijance varijabli j i $k (j,k=1,...,m; j \neq k)$

Računanje varijanci i standardnih devijacija matričnom algebrom

Neka je $\mathbf{X}$ matrica podataka dobivena opisivanjem nekog skupa od n entiteta skupom od m varijabli

$$\mathbf{X} = (x_{ij}),$$

gdje je $i = 1, \dots, n$, a $j = 1, \dots, m$. Izračunavanje varijanci i standardnih devijacija varijabli iz matrice $\mathbf{X}$ svodi se na izračunavanje matrice kovarijanci $\mathbf{C}$. Kovarijanca između varijable x_1 i varijable x_2 izračuna se formulom

$$c_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2)}{n}$$

Matrica kovarijanci $\mathbf{C}$ varijabli iz $\mathbf{X}$ izračuna se operacijom

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}_c^T \mathbf{X}_c n^{-1},$$

gdje je $\mathbf{X}_c$ matrica centriranih podataka početnih vrijednosti matrice $\mathbf{X}$. Matrica centriranih podataka $\mathbf{X}_c$ dobije se operacijom

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{X} - \mathbf{1}\mathbf{m}^T,$$

gdje je $\mathbf{1}$ sumacijski vektor sa m jedinica, a $\mathbf{m} = \mathbf{X}^T \mathbf{1} n^{-1}$ vektor aritmetičkih sredina, gdje je $\mathbf{1}$ sumacijski vektor sa n jedinica, ili operacijom

$$\mathbf{X}_c = (\mathbf{X} - \mathbf{P}\mathbf{X}),$$

gdje je $\mathbf{P} = \mathbf{1}(\mathbf{1}^T \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^T$ ili $\mathbf{P} = \mathbf{1}\mathbf{1}^T n^{-1}$ lijevi centroidni projektor matrice $\mathbf{X}$, a $\mathbf{1}$ sumacijski vektor sa n jedinica. Matricu kovarijanci $\mathbf{C}$ moguće je izračunati i sljedećim formulama

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{X}_c^T \mathbf{X}_c n^{-1} \\ &= (\mathbf{X} - \mathbf{P}\mathbf{X})^T (\mathbf{X} - \mathbf{P}\mathbf{X}) n^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{P}\mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{X}) n^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{P}\mathbf{X}) n^{-1} \end{aligned}$$

jer je $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{X}_c^T \mathbf{X}_c n^{-1} \\ &= (\mathbf{X} - \mathbf{1}\mathbf{m}^T)^T (\mathbf{X} - \mathbf{1}\mathbf{m}^T) n^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^T - \mathbf{m}\mathbf{1}^T) (\mathbf{X} - \mathbf{1}\mathbf{m}^T) n^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{1}\mathbf{m} - \mathbf{m}\mathbf{1}^T \mathbf{X} + \mathbf{m}\mathbf{1}^T \mathbf{1}\mathbf{m}^T) n^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{m}\mathbf{m}^T n) n^{-1} \end{aligned}$$

jer je $\mathbf{X}^T \mathbf{1}\mathbf{m} = \mathbf{m}\mathbf{1}^T \mathbf{X}$, a $\mathbf{1}^T \mathbf{1} = n$.

Ekstrakcijom dijagonale matrice kovarijanci $\mathbf{C}$ dobije se dijagonalna matrica varijanci $\mathbf{V}^2 = \text{diag} \mathbf{C}$, a operacijom $\mathbf{V} = (\text{diag} \mathbf{C})^{1/2}$ dijagonalna matrica standardnih devijacija $\mathbf{V}$.

Primjer: 9 ispitanika postiglo je sljedeće rezultate u skoku udalj (SD), trčanju na 100 metara (T100m) i bacanju kugle (BK). Potrebno je izračunati standardne devijacije navedenih varijabli uz pomoć matrične algebre.

$$X =$$

SD	T100m	BK
359	13,6	561
321	13,9	550
346	13,7	538
332	14	490
450	12,2	518
314	14,1	551
410	12,5	589
425	12,3	602
369	13,5	547

Matrica centriranih podataka X_c dobije se operacijom

$$X_c = X - \mathbf{1} \mathbf{m}^T,$$

gdje je $\mathbf{1}$ sumacijski vektor sa n jedinica, a $\mathbf{m} = X^T \mathbf{1} n^{-1}$ vektor aritmetičkih sredina.

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{m}^T \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline 359 & 13,6 & 561 \\ \hline 321 & 13,9 & 550 \\ \hline 346 & 13,7 & 538 \\ \hline 332 & 14 & 490 \\ \hline 450 & 12,2 & 518 \\ \hline 314 & 14,1 & 551 \\ \hline 410 & 12,5 & 589 \\ \hline 425 & 12,3 & 602 \\ \hline 369 & 13,5 & 547 \\ \hline \end{array} \end{array} - \begin{array}{c} \mathbf{1} \mathbf{m}^T \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} X_c \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline -10,56 & 0,29 & 11,44 \\ \hline -48,56 & 0,59 & 0,44 \\ \hline -23,56 & 0,39 & -11,56 \\ \hline -37,56 & 0,69 & -59,56 \\ \hline 80,44 & -1,11 & -31,56 \\ \hline -55,56 & 0,79 & 1,44 \\ \hline 40,44 & -0,81 & 39,44 \\ \hline 55,44 & -1,01 & 52,44 \\ \hline -0,56 & 0,19 & -2,56 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Matrica kovarijanci C iz varijabli X izračuna se operacijom

$$C = X_c^T X_c n^{-1},$$

gdje je X_c matrica centriranih podataka.

X_c^T										X_c				n^{-1}	
SD	-10,56	-48,56	-23,56	-37,56	80,44	-55,56	40,44	55,44		SD	T100m	BK		9 ⁻¹	
T100m	0,29	0,59	0,39	0,69	-1,11	0,79	-0,81	-1,01		-10,56	0,29	11,44			
BK	11,44	0,44	-11,56	-59,56	-31,56	1,44	39,44	52,44		-48,56	0,59	0,44			
										-23,56	0,39	-11,56			
										-37,56	0,69	-59,56			
										80,44	-1,11	-31,56			
										-55,56	0,79	1,44			
										40,44	-0,81	39,44			
										55,44	-1,01	52,44			
										-0,56	0,19	-2,56			

$= C$			
	SD	T100m	BK
SD	2337,78	-36,11	531,53
T100m	-36,11	0,58	-11,41
BK	531,53	-11,41	1140,28

Ekstrakcijom dijagonale matrice kovarijanci C dobije se dijagonalna matrica varijanci V^2

$$V^2 = \text{diag}C,$$

a operacijom

$$V = (\text{diag}C)^{1/2}$$

dijagonalna matrica standardnih devijacija V .

$V^2 = \text{diag}C$			
	SD	T100m	BK
SD	2337.78	0	0
T100m	0	0.58	0
BK	0	0	1140.28

$V = (\text{diag}C)^{1/2}$			
	SD	T100m	BK
SD	48.35	0	0
T100m	0	0.76	0
BK	0	0	33.77

2.4.2.4. Koeficijent varijabilnosti

Standardna devijacija se iskazuje u mjernim jedinicama promatranog obilježja pa njezina vrijednost ovisi o stupnju varijabilnosti i mjernim jedinicama. Stoga nije moguće izravno uspoređivati standardne devijacije više različitih varijabli. Za usporedbu različitih varijabli koristi se *koeficijent varijabilnosti* (V) koji pokazuje koliki postotak vrijednosti aritmetičke sredine iznosi standardna devijacija, odnosno

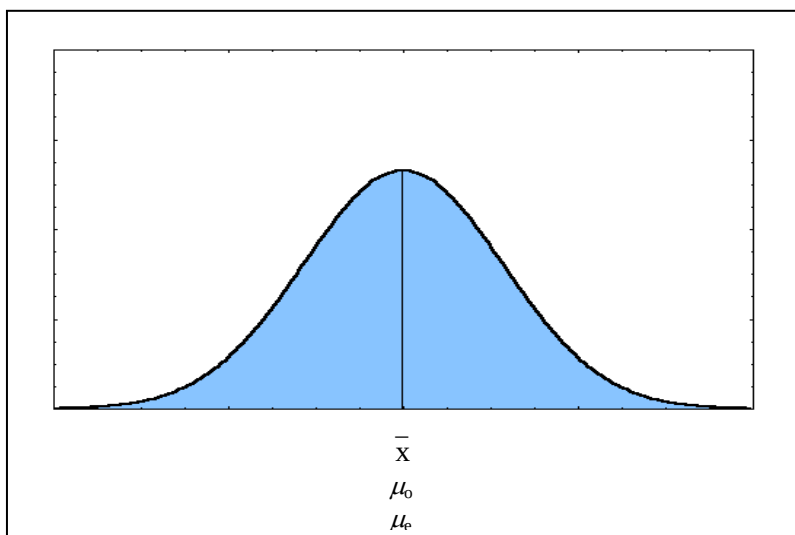
izračunava se kao omjer standardne devijacije (σ) i aritmetičke sredine ($\bar{x}$) pomnožen sa 100.

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$$

Koeficijent varijabilnosti pokazuje u kojoj varijabli ista grupa entiteta manje ili više varira te koja grupa manje ili više varira u istoj varijabli.

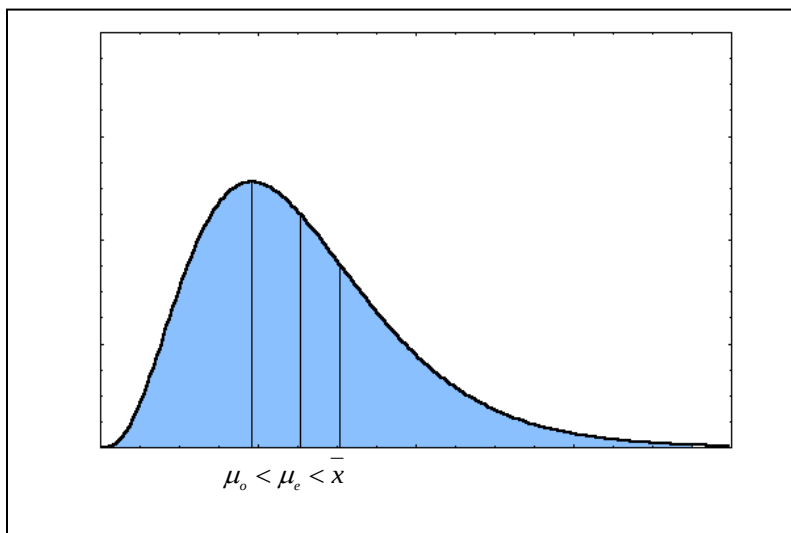
2.4.3. Mjere asimetrije distribucije (engl. *skewness*)

Ako su frekvencije rezultata u nekoj varijabli ravnomjerno raspodijeljene lijevo i desno od prosječne vrijednosti, tada se radi o *simetričnoj* distribuciji podataka (slika 2.4-3). Kod *unimodalne* (distribucija koja ima jednu modalnu vrijednost) simetrične distribucije aritmetička sredina, mod i medijan jednake su vrijednosti ($\bar{x} = \mu_o = \mu_e$). Ako frekvencije rezultata nisu ravnomjerno raspodijeljene lijevo i desno od prosječne vrijednosti, tada se radi o *pozitivno* ili *negativno asimetričnoj* distribuciji podataka.



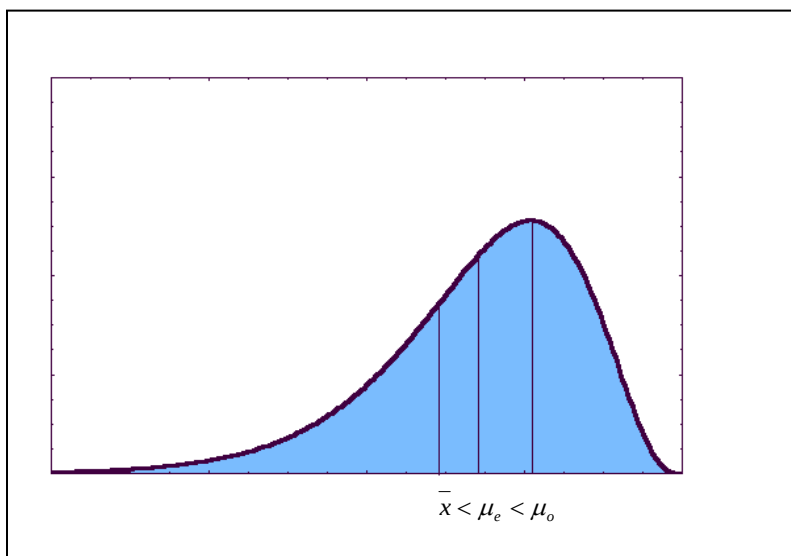
Slika 2.4-3. Simetrična unimodalna distribucija

Ako se većina entiteta grupirala u zoni nižih vrijednosti s nekolicinom ekstremno visokih vrijednosti, takva se distribucija podataka zove *pozitivno asimetrična* (slika 2.4-4). Kod pozitivno asimetrične distribucije aritmetička sredina, mod i medijan nisu međusobno jednaki. Najveću vrijednost ima aritmetička sredina, zatim medijan pa mod ($\bar{x} > \mu_e > \mu_o$).



Slika 2.4-4. Pozitivno asimetrična distribucija rezultata

Kod *negativno asimetrične* distribucije (slika 2.4-5) grupiranje entiteta je u zoni viših vrijednosti, a manjim brojem entiteta u zoni ekstremno niskih vrijednosti (obrnuto od pozitivno asimetrične distribucije podataka). U negativno asimetričnim distribucijama aritmetička sredina je najmanja, a zatim po veličini slijede medijan i mod ($\bar{x} < \mu_e < \mu_o$).



Slika 2.4-5. Negativno asimetrična distribucija rezultata

Koeficijent asimetrije se izračunava preko *trećeg momenta oko sredine* (m_3) i standardne devijacije podignute na treću potenciju (σ^3)

$$a_3 = \frac{m_3}{\sigma^3},$$

gdje je $m_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n}$ treći moment oko sredine.

Ako je suma pozitivnih odstupanja podignutih na treću potenciju veća od negativne (treća potencija kao neparna ne mijenja predznak), tada će a_3 biti veći od nule, što ukazuje na pozitivno asimetričnu distribuciju, odnosno, ako je a_3 manji od nule, onda se radi o negativnoj asimetriji distribucije jer je suma negativnih odstupanja podignutih na treću potenciju veća od sume pozitivnih. Dakle, o vrijednosti trećeg momenta oko sredine (m_3) ovisi da li će a_3 biti pozitivnog ili negativnog predznaka budući da je standardna devijacija u nazivniku uvijek pozitivna. Ako je a_3 jednak *nuli*, distribucija je simetrična. Standardnom devijacijom poništava se utjecaj mjerne jedinice varijable, odnosno izračunata vrijednost se standardizira te se tako izračunati koeficijent asimetrije najčešće kreće u intervalu od -2 do +2, a kod izrazito asimetričnih distribucija može biti i izvan tog intervala. Očito je da kod asimetrično distribuiranih podataka aritmetička sredina neće biti najpogodnija mjera centralne tendencije jer ne predstavlja najveći broj entiteta (najvjerojatniji rezultat).

2.4.4. Mjere izduženosti distribucije (*engl. kurtosis*)

Distribucija podataka može biti manje ili više izdužena, odnosno spljoštena, što ukazuje na veću homogenost, odnosno heterogenost podataka. Ako je koncentracija frekvencija oko odgovarajuće središnje vrijednosti veća od teoretske normalne distribucije (v. poglavlje 2.5.3.1, str. 104-106), tada je vrh distribucije viši od vrha normalne distribucije. I obrnuto, što je koncentracija frekvencija oko središnje vrijednosti manja, to je vrh distribucije niži od normalne distribucije. Stupanj spljoštenosti ili izduženosti distribucije izražava se koeficijentom a_4 , a izračunava se preko *četvrtog momenta oko sredine* (m_4) i standardne devijacije podignute na četvrtu potenciju (σ^4).

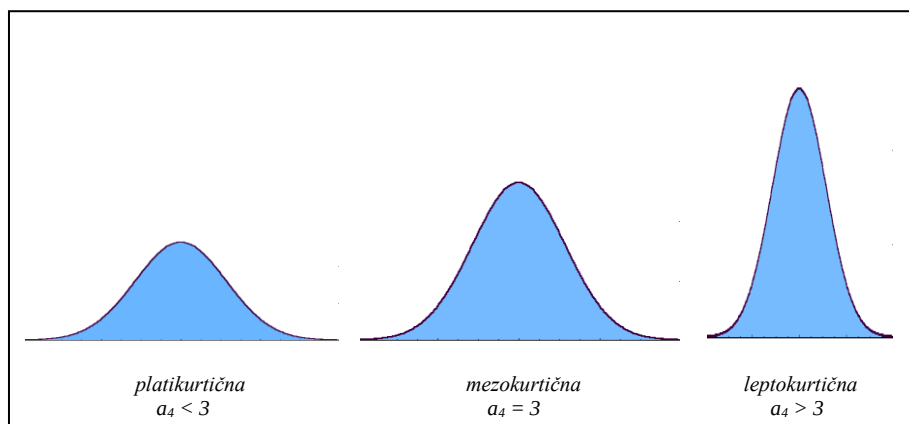
$$a_4 = \frac{m_4}{\sigma^4}$$

Četvrti moment oko sredine izračuna se formulom

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n}$$

Ako je koeficijent spljoštenosti:

- $a_4=3$ - distribucija je *mezokurtična* - normalna
- $a_4>3$ - distribucija je *leptokurtična* - izdužena
- $a_4<3$ - distribucija je *platikurtična* - spljoštena (slika 2.4-6).



Slika 2.4-6. Platikurtična, mezokurtična i leptokurtična distribucija podataka

2.5

Teoretske distribucije

Za razliku od distribucija eksperimentalno prikupljenih podataka, koje se nazivaju *empirijskim distribucijama*, *teoretske distribucije* su zadane matematičkom formulom, odnosno one predstavljaju matematičke funkcije te omogućavaju utvrđivanje *vjerojatnosti* nekog slučajnog događaja u zadanim uvjetima. Teoretske se distribucije koriste kao matematički modeli za opisivanje većeg broja statističkih pojava. S obzirom da statistički podaci mogu imati diskretna (izražavaju konačan broj vrijednosti mjerenog svojstva i uvijek su određene cijelim brojem) i kontinuirana (mogu poprimiti bilo koju numeričku vrijednost) obilježja, moguće je razlikovati *diskretne* (*uniformna distribucija*, *binomna distribucija*, *Poissonova distribucija*) i *kontinuirane* (*normalna distribucija*, *t-distribucija*, *F-distribucija*, χ^2 -*distribucija*) teoretske distribucije. Međutim, prije negoli opišemo navedene teoretske distribucije, potrebno je upoznati se s elementarnim pojmovima teorije vjerojatnosti.

2.5.1. Elementarni pojmovi teorije vjerojatnosti

Ako se u jednom *eksperimentu*, odnosno u *realizaciji nekog slučajnog događaja* (primjerice, bacanje na koša s linije slobodnih bacanja, bacanje igraće kocke, bacanje novčića...) može dogoditi jedan od n mogućih ishoda, tada svaki od n mogućih ishoda nekog eksperimenta zovemo *elementarni događaj*, a skup svih mogućih ishoda *skup* ili *prostor elementarnih događaja*. Primjerice, u jednom pokušaju šuta s linije slobodnih bacanja moguća su dva ishoda: “uspješan šut” i “neuspješan šut”. Dakle, skup elementarnih događaja čine dva elementarna događaja: “uspješan šut” i “neuspješan šut”. Ili, ako bacamo potpuno pravilnu igraću kocku, onda skup elementarnih događaja čini šest elementarnih događaja koji su označeni brojevima: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ukupni broj elementarnih događaja moguće je izračunati uz pomoć osnovnih pravila *kombinatorike*, a to su: *pravilo množenja*, *pravilo permutacija*, *pravilo varijacija* i *pravilo kombinacija*.

2.5.1.1. Pravilo množenja

Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ svi mogući ishodi jednog slučajnog događaja X , a $y_1, y_2, \dots, y_m$ svi mogući ishodi slučajnog događaja Y . Ukupan broj elementarnih događaja koje je moguće dobiti kombinirajući ishode slučajnih događaja X i Y jednak je $n \cdot m$.

Primjerice, ako bacamo dvije igraće kocke, tada jedno bacanje dviju igračih kocaka predstavlja jedan elementarni događaj. Ukupan broj svih mogućih elementarnih događaja iznosi

$$6 \cdot 6 = 36$$

jer svako bacanje jedne kocke ima 6 mogućih ishoda. Skup elementarnih događaja (mogućih kombinacija) prikazan je u tablici 2.5-1.

Tablica 2.5-1. Svi elementarni događaji koje je moguće dobiti bacanjem dviju igračih kocaka

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

Primjer: Na koliko je načina moguće obojiti tri prazna kružića ako je prvi moguće obojiti crvenom, bijelom i plavom bojom, drugi crnom, zelenom i žutom, a treći narančastom i ljubičastom bojom?

Ukupan broj elementarnih događaja iznosi $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. Dakle, kružiće je moguće obojiti na 18 načina. U tablici 2.5-2 prikazan je skup svih mogućih načina (elementarnih događaja) na koje je moguće obojiti kružiće prema navedenom pravilu.

Tablica 2.5-2. Svi elementarni događaji koje je moguće dobiti bojenjem triju praznih kružića prema navedenom pravilu

2.5.1.2. Pravilo permutacija

Ako su $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementi nekog skupa, na koliko ih je načina moguće poredati? Svaka međusobno različita kombinacija elemenata $x_1, x_2, \dots, x_n$ naziva se *permutacija*. Moguće je razlikovati *permutacije bez ponavljanja* i *permutacije s ponavljanjima*.

Permutacije bez ponavljanja

Dakle, ako su $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementi nekog skupa, moguće ih je poredati na $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ načina, odnosno

$$P^{(n)} = n!$$

gdje je

- $P^{(n)}$ broj mogućih permutacija (elementarnih događaja) za n različitih elemenata
- $n!$ (čitamo: “n faktorijel”) predstavlja produkt prirodnih brojeva od 1 do n (prema dogovoru $0! = 1$).

Primjerice, imamo četiri prazna kružića koja je potrebno obojiti plavom, crvenom, žutom i zelenom bojom. Pri tome je svaki kružić

potrebno obojiti drugom bojom. Ukupan broj svih mogućih elementarnih događaja iznosi

$$P^{(n)} = n! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

U tablici 2.5-3 prikazani su svi mogući načini (permutacije) na koje je moguće obojiti četiri kružića, tako da se za svaki kružić koristi po jedna od četiri boje.

Tablica 2.5-3. Svi elementarni događaji koje je moguće dobiti bojenjem četiriju praznih kružića prema navedenom pravilu

Iz ovog primjera vidi se da je prvi kružić moguće obojiti 4 bojama, za drugi je moguće koristiti jednu od 3 preostale boje, za treći jednu od 2 preostale, a za posljednji kružić ostaje samo jedna boja.

Primjer: Ako 8 trkača sudjeluje u nekoj finalnoj trci, koliko je mogućih ishoda trke?

Broj mogućih ishoda moguće je izračunati pravilom permutacije, odnosno formulom

$$P^{(8)} = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

Dakle, broj mogućih ishoda trke u kojoj sudjeluje 8 trkača iznosi 40320.

Permutacija s ponavljanjem

Ako je od n elemenata njih $r_1, r_2, \dots, r_k$ jednakih, tada svaki mogući poredak tih n elemenata predstavlja jednu *permutaciju s ponavljanjem*. Broj permutacija s ponavljanjem moguće je izračunati formulom

$$P_{r_1, r_2, \dots, r_k}^{(n)} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!},$$

gdje je

- $P_{r_1, r_2, \dots, r_k}^{(n)}$ broj mogućih permutacija za n različitih elemenata, od kojih je $r_1, r_2, \dots, r_k$ jednakih
- $n!$ predstavlja produkt prirodnih brojeva od 1 do n
- $r_k!$ predstavlja produkt prirodnih brojeva od 1 do r_k .

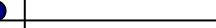
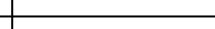
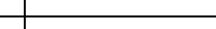
Primjerice, ako imamo 2 plave i 3 crvene kuglice, onda ih je moguće poredati na

$$p_{2,3}^{(5)} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{12} = 10$$

načina.

U tablici 2.5-4 prikazani su svi mogući načini na koje je moguće poredati 2 plave i 3 crvene kuglice.

Tablica 2.5-4. Svi elementarni događaji koje je moguće dobiti slaganjem 2 plave i 3 crvene kuglice

Primjer: Ako su od 8 trkača neke finalne utrke dvojica atletičara reprezentativci Hrvatske, trojica reprezentativci Kenije i trojica reprezentativci Alžira, koliko je mogućih permutacija (kombinacija plasmana) pojedinih reprezentacija?

Broj mogućih ishoda moguće je izračunati pravilom permutacije s ponavljanjem, odnosno formulom

$$P_{2,3,3}^{(8)} = \frac{8!}{2!3!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{40320}{72} = 560$$

2.5.1.3. Pravilo varijacija

Moguće je razlikovati *varijacije bez ponavljanja* i *varijacije s ponavljanjima*.

Varijacije bez ponavljanja

Ako iz nekog skupa od n različitih elemenata formiramo kombinacije (razrede) od r elemenata, a da se isti element ne pojavi dva ili više puta u istoj kombinaciji (razredu), onda se broj mogućih ishoda izračuna prema formuli

$$V_r^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

gdje je

- $V_r^{(n)}$ broj varijacija bez ponavljanja n -tog reda i r -tog razreda
- n broj svih elemenata u skupu
- r broj elemenata u traženoj kombinaciji (razredu).

Primjer: Na koliko je različitih načina moguće posložiti 2 kuglice (r) od ukupno 5 kuglica (n) različitih boja (plava, crvena, žuta, zelena i bijela), a da se ista kuglica ne pojavi dva ili više puta u jednom razredu? Broj mogućih ishoda je

$$V_2^{(5)} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$$

Tablica 2.5-5 prikazuje sve moguće varijacije za $n=5$, a $r=2$, odnosno prikazani su svi mogući načini na koje je moguće posložiti dvije od pet kuglica različitih boja.

Tablica 2.5-5. Svi elementarni događaji (ishodi) koje je moguće dobiti slaganjem dviju od pet kuglica različitih boja, a da se ista kuglica ne pojavi dva ili više puta

Primjer: Želimo li prognozirati redoslijed prva 3 od ukupno 8 trkača koji sudjeluju u nekoj finalnoj trci, postavlja se pitanje: koliko je mogućih ishoda? Broj mogućih ishoda izračunava se formulom za varijacije bez ponavljanja

$$V_3^{(8)} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{40320}{120} = 336$$

Varijacije s ponavljanjem

Ako iz nekog skupa od n različitih elemenata formiramo kombinacije (razrede) od r elemenata, a da pri tom dopustimo da se u istoj kombinaciji jedan element pojavi dva ili više puta, onda se broj mogućih ishoda izračuna prema formuli

$$\widehat{V}_r^{(n)} = n^r,$$

gdje je

- $\widehat{V}_r^{(n)}$ broj varijacija s ponavljanjem n -tog reda i r -tog razreda
- n broj svih elemenata u skupu, a
- r broj elemenata u traženoj kombinaciji (razredu).

Primjerice, na koliko različitih načina možemo posložiti 2 kuglice (r) od ukupno 5 kuglica (n) različitih boja (plava, crvena, žuta, zelena i bijela), a da se ista kuglica može pojaviti više puta u jednom razredu? Broj mogućih ishoda moguće je izračunati formulom

$$\widehat{V}_2^{(5)} = 5^2 = 25$$

Tablica 2.5-6 prikazuje sve moguće varijacije s ponavljanjem za $n=5$, a $r=2$.

Tablica 2.5-6. Svi elementarni događaji koje je moguće dobiti slaganjem dviju od pet kuglica različitih boja, a da se ista kuglica može pojaviti u istom razredu dva ili više puta

● ●	● ●	● ●	● ●	○ ○
● ●	● ●	● ●	● ●	○ ●
● ●	● ●	● ●	● ●	○ ●
● ●	● ●	● ●	● ●	○ ●
● ●	● ●	● ●	● ●	○ ●

2.5.1.4. Pravilo kombinacija

Kombinacije bez ponavljanja

Ako iz nekog skupa od n različitih elemenata formiramo kombinacije (razrede) od r elemenata, a da pri tome nije važan raspored (redoslijed) elemenata unutar jednog razreda, onda se broj svih mogućih ishoda izračuna prema formuli

$$K_r^{(n)} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

gdje je

- $K_r^{(n)}$ broj kombinacija bez ponavljanja n -tog reda i r -tog razreda
- n broj svih elemenata u skupu
- r broj elemenata u traženoj kombinaciji (razredu).

Primjerice, koliko je moguće dobiti različitih uzoraka (kombinacija) ako iz skupa od ukupno 5 kuglica (n) različitih boja (plava, crvena, žuta, zelena i bijela) izvlačimo uzorak od 3 kuglice? Pod uzorkom podrazumijevamo jednu kombinaciju u kojoj nije važan poredak, već sadržaj elemenata. Broj svih mogućih uzoraka izračuna se prema formuli

$$K_3^{(5)} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

U tablici 2.5-7 prikazan je skup svih mogućih uzoraka koje je moguće formirati iz skupa 5 kuglica različitih boja.

Tablica 2.5-7. Svi elementarni događaji koje je moguće dobiti izvlačenjem triju kuglica iz skupa od pet kuglica različitih boja

Primjer: Koliko je mogućih uzoraka (kombinacija) ako od 45 brojeva formiramo uzorke od po 6 brojeva ("loto 6 od 45")? Broj mogućih kombinacija izračuna se formulom za kombinacije bez ponavljanja

$$K_3^{(8)} = \frac{45!}{6!(45-6)!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 39 \cdot 38 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8145060$$

Dakle, moguće je dobiti 8 145 060 različitih kombinacija (ishoda).

2.5.1.5. Vjerojatnost

Elementarne događaje moguće je podijeliti na one s *povoljnim* i na one s *nepovoljnim ishodom*. Ako u skupu od n elementarnih događaja x -om označimo elementarne događaje s povoljnim ishodom, onda omjer elementarnih događaja s povoljnim ishodom x i skupa elementarnih događaja n predstavlja *vjerojatnost* da će se elementarni događaj s povoljnim ishodom x dogoditi

$$p(x) = \frac{x}{n}, \text{ a}$$

$$q(x) = \frac{n-x}{n} = 1 - \frac{x}{n} = 1 - p$$

predstavlja vjerojatnost da se elementarni događaj s povoljnim ishodom x neće dogoditi. Dakle, može se reći da je vjerojatnost broj koji pokazuje šanse za pojavljivanje nekog elementarnog događaja.

Iz navedenih formula vidi se da je:

- $p(x) + q(x) = 1$, pa je $1 - p(x) = q(x)$, a $1 - q(x) = p(x)$
- $0 \leq p(x) \leq 1$ i $0 \leq q(x) \leq 1$
- ako je $p(x) = 1$ (apsolutna sigurnost da će se događaj x dogoditi), onda je $q(x) = 0$ (apsolutna sigurnost da se događaj x neće dogoditi), i obrnuto.

2.5.2. Diskretne teoretske distribucije

2.5.2.1. Uniformna distribucija

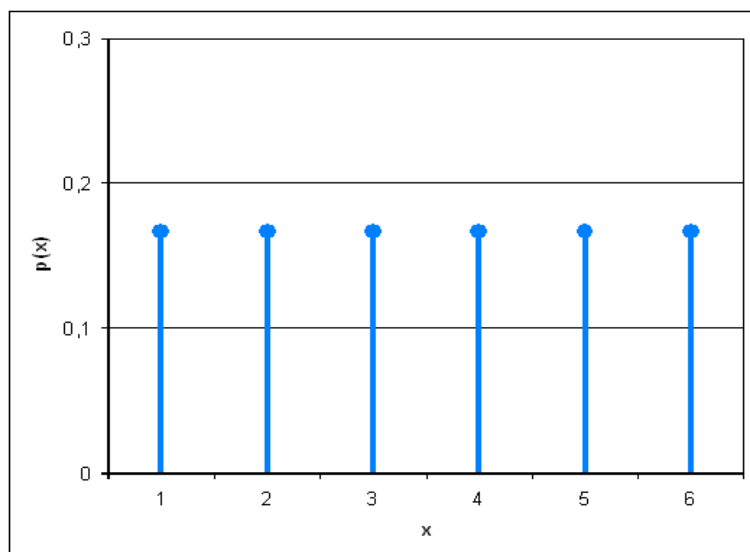
Uniformna distribucija je najjednostavnija diskretna teoretska distribucija, a osnovna joj je karakteristika jednaka vjerojatnost ostvarenja svake vrijednosti slučajne varijable x (elementarnog događaja). Neka slučajna varijabla x ima uniformnu distribuciju ako je vjerojatnost bilo koje njene vrijednosti (elementarnog događaja) u skupu od n elementarnih događaja jednaka

$$p(x) = \frac{1}{n},$$

gdje je

- $p(x)$ vjerojatnost elementarnog događaja $x = 1, \dots, n$
- n ukupan broj vrijednosti koje može imati slučajna varijabla x .

Primjerice, ako bacamo pravilnu igraču kocku, vjerojatnost da se dogodi svaka od šest mogućih vrijednosti je jednaka. S obzirom da je $n=6$, onda je vjerojatnost za bilo koju od šest mogućih vrijednosti (elementarnih događaja) jednaka $p(x)=1/6=0,1666\dots$ (slika 2.5-8).



Slika 2.5-8. Uniformna distribucija za $n=6$

2.5.2.2. Binomna distribucija

Za neku slučajnu varijablu x kažemo da ima *binomnu distribuciju* s parametrima n i p ako je

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x},$$

gdje je $f(x)$ vjerojatnost x za uspješne ishode od n svih mogućih ishoda koje može imati slučajna varijabla x , p vjerojatnost uspješnog ishoda, a q vjerojatnost neuspješnog ishoda ($q=1-p$).

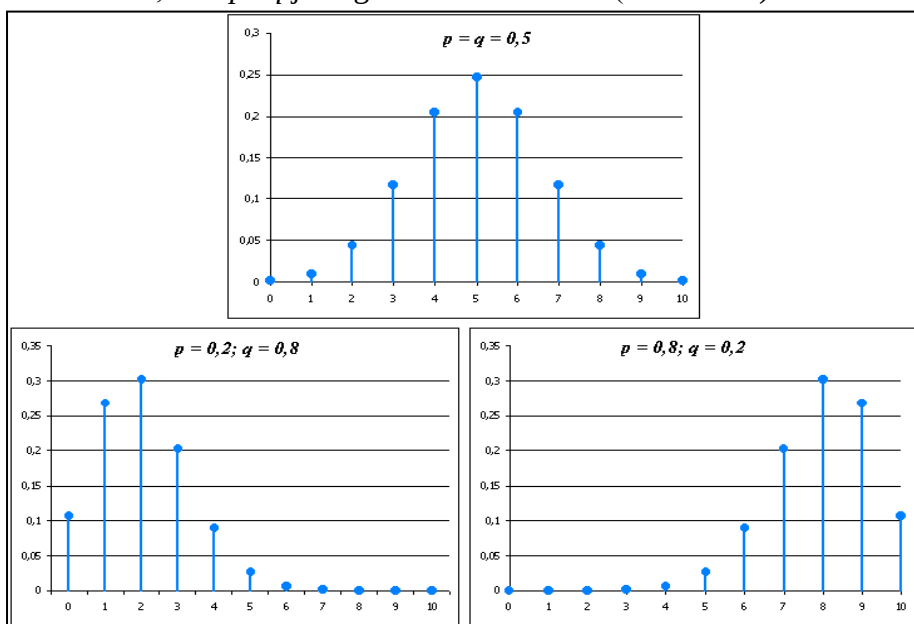
Očekivana vrijednost binomne distribucije je $E(x) = \mu = np$,

varijanca $V(x) = \sigma^2 = npq$,

koeficijent asimetrije (engl. skewness) $a_3 = \frac{p-q}{\sqrt{npq}}$,

koeficijent spljoštenosti (engl. kurtosis) $a_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$.

Binomna distribucija za $p=q=0.5$ je simetrična, za $p < q$ je pozitivno asimetrična, a za $p > q$ je negativno asimetrična (slika 2.5-9).



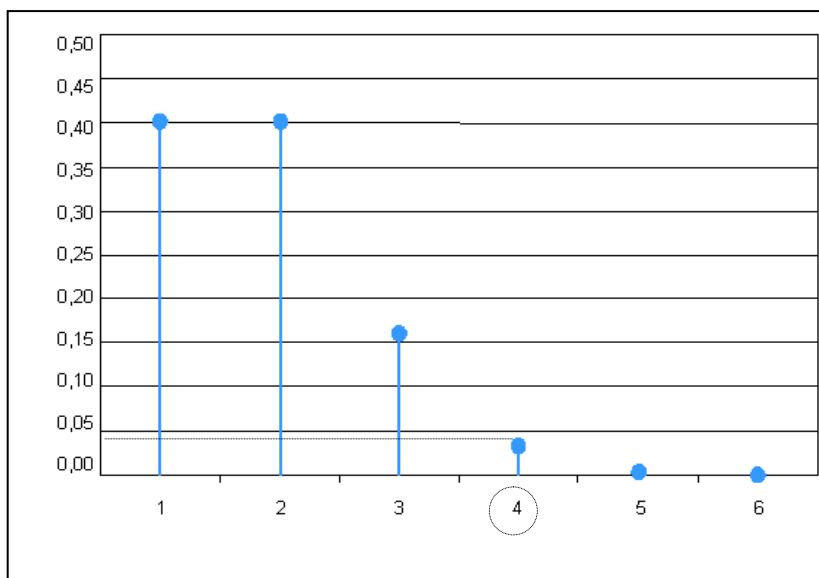
Slika 2.5-9. Binomna distribucija za $n = 10$ i $p = q$, $p < q$ i $p > q$

Primjer: Ako se igraća kocka baci 5 puta, kolika je vjerojatnost da dobijemo 3 šestice?

Vjerojatnost da se dogodi šestica u jednom bacanju je $1/6$ (p), a da se ne dobije $5/6$ (q). Ukupan broj mogućih vrijednosti je 5 (n), jer svako bacanje generira po jedan ishod, a broj uspješnih ishoda iznosi 3 (x). Ako se zadane vrijednosti uvrste u formulu, dobije se

$$f(3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) = \frac{120}{12} \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36} = \frac{3000}{93312} = 0,032$$

Dakle, vjerojatnost da se od 5 bacanja igraće kocke dobiju tri šestice iznosi 0,0032, odnosno 3,2 % (slika 2.5-10).



Slika 2.5-10. Binomna distribucija za $n = 5$, $p = 1/6$ i $q = 5/6$

Za vrlo velike vrijednosti n i male vrijednosti p binomna se distribucija aproksimira Poissonovom distribucijom.

2.5.2.3. Poissonova distribucija

Poissonova distribucija aproksimira *binomnu distribuciju* za velike vrijednosti n (npr. $n > 50$) i male vrijednosti p (npr. $p < 0,05$), pa predstavlja njen ekstremni slučaj. Stoga se *Poissonova distribucija* naziva i *distribucijom rijetkih događaja*. Ako se $\lambda = n \cdot p$ tretira kao konstanta, jer n teži beskonačnom ($n \rightarrow \infty$), a p nuli ($p \rightarrow 0$), onda je vjerojatnost nekog događaja x jednaka

$$p_{\lambda}(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda},$$

gdje je

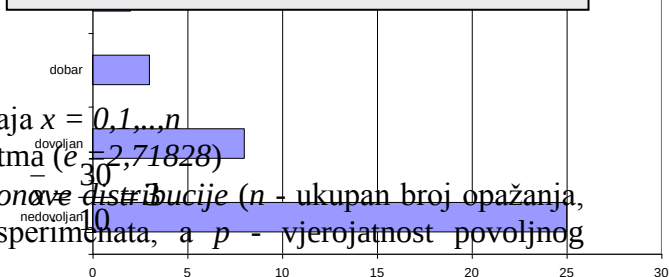
- $p(x)$ vjerojatnost događaja $x = 0, 1, \dots, n$
- e baza prirodnog logaritma ($e = 2,71828$)
- $\lambda = n \cdot p$ parametar *Poissonove distribucije* (n - ukupan broj opažanja, entiteta, događaja, eksperimenata, a p - vjerojatnost povoljnog ishoda, događaja).



Siméon Poisson (1781. – 1840.) francuski matematičar. Od 1798. studira matematiku na *Ecole Polytechnique* kod znamenitih matematičara Laplacea i Lagrangea s kojima postaje prijatelj. Predaje na *Ecole Polytechnique* od 1802. do 1808., a od 1809. godine predaje teorijsku matematiku u novootvorenom *Faculté des Sciences*. Publicirao je puno radova (preko 300). Jedan od važnijih radova objavio je 1837. godine u kome je opisao

distribuciju rijetkih događaja koja je po njemu dobila ime. Njegovi radovi su uvelike pridonijeli razvoju matematike, fizike i astronomije.

Prema, J J O'Connor and E F Robertson: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7EHhistory/Mathematicians/Poisson.html>



Poissonova distribucija ima pozitivno asimetričan oblik s očekivanom vrijednošću (μ) i varijancom (σ^2)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{1,33} = 1,15$$

$$E(x) = \mu = \sigma^2 = \lambda$$

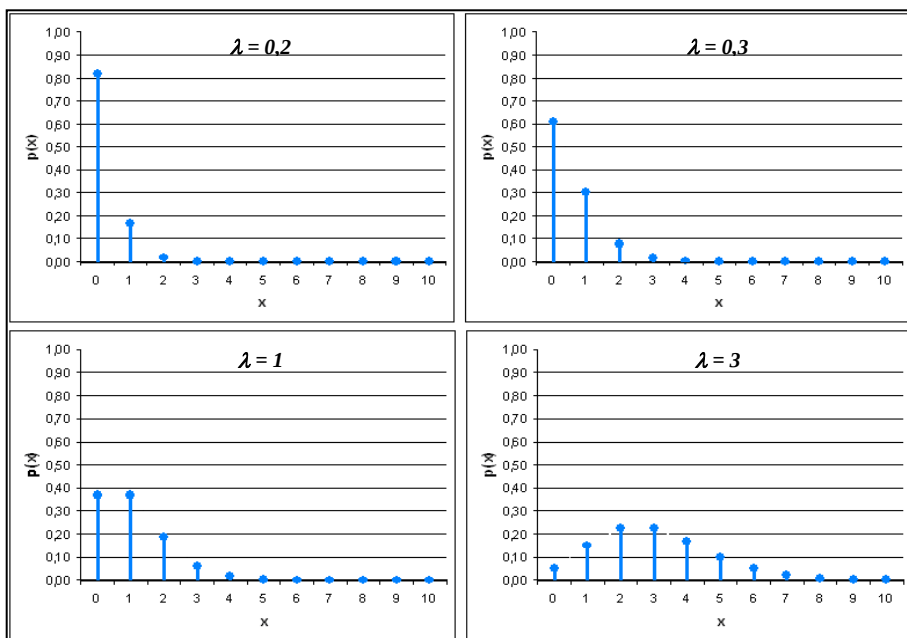
te koeficijentom asimetrije

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

i koeficijentom spljoštenosti

$$a_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

Oblik *Poissonove distribucije* zavisit će isključivo od veličine parametra λ . S obzirom da slučajna varijabla x ne može imati vrijednosti manje od nule ($x = 0, 1, 2, \dots$), s povećanjem parametra λ distribucija teži simetričnosti (slika 2.5-11).

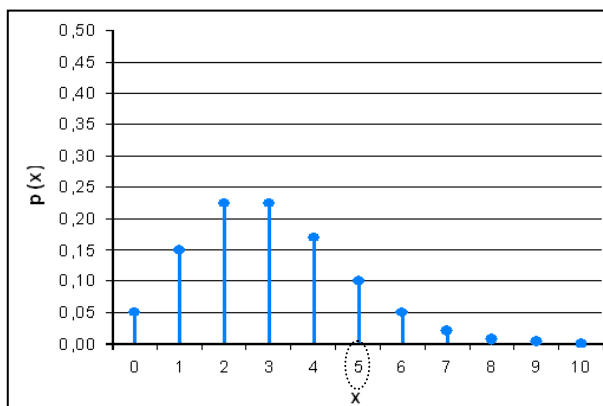


Slika 2.5-11. Poissonova distribucija za različite vrijednosti parametra λ

Primjer: Pretpostavimo da se u populaciji košarkaša može pronaći 3% onih koji u testu *skok udalj s mjesta* postižu rezultat veći od 3 m. Kolika je vjerojatnost da se u uzorku veličine $n=100$ pronađe 5 košarkaša koji u *skoku udalj s mjesta* imaju rezultat bolji od 3 m?

Dakle, $x = 5$, $\lambda = p \cdot n = 0,03 \cdot 100 = 3$ jer je $p = 0,03$ (3% odgovara vjerojatnosti $p=0.03$), a $n=100$. Uvrštavanjem tih vrijednosti u formulu, izračuna se tražena vjerojatnost

$$p_3(5) = \frac{3^5}{5!} 2,71828^{-3} = \frac{243}{120} \cdot 0,0498 = 0,1$$



Slika 2.5-12. Poissonova distribucija za $\lambda = 3$

2.5.3. Kontinuirane teoretske distribucije

2.5.3.1. Normalna distribucija

Normalna distribucija sigurno je najvažnija i najčešće korištena kontinuirana teoretska distribucija u statističkim analizama (slika 2.5-13). Naziva se još i *Gaussovom distribucijom* jer se smatra da ju je Gauss prvi matematički definirao. Osim Gausa, u definiranju normalne raspodjele značajnu ulogu imali su Laplace¹ i De Moivre². Za slučajnu kontinuiranu varijablu x kaže se da ima normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2 ako je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

gdje je

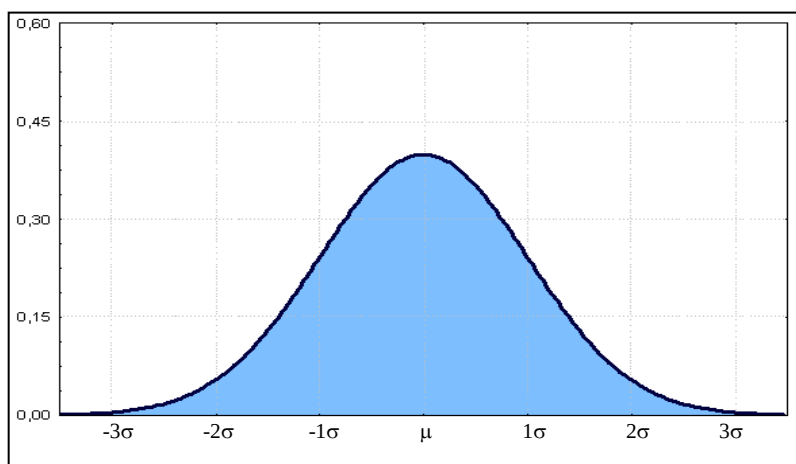
- μ aritmetička sredina
- σ standardna devijacija
- $\pi = 3,14459\dots$
- $e = 2,71828$.



Carl Friedrich Gauss (1777.- 1855.) jedan je od najvećih matematičara. Rodio se u vrlo siromašnoj obitelji koja nije imala novca za njegovo školovanje. U početku mu je školovanje omogućio ujak. Negov iznimni matematički talent primijetili su već u djetinjstvu njegovi učitelji Büttner i Bartels kada je mali Gauss za nekoliko trenutaka zbrojio cijele brojeve od 1 do 100 uvidjevši da se radi o zbroju 50 parova čiji je zbroj

101. Uz njihovu pomoć Gauss započinje školovanje te dobiva bogatog mecena grofa Carla Wilhelma Ferninanda uz čiju pomoć od 1792. godine pohađa Brunswick Collegium Carolinum. Od 1795. godine nastavlja studiranje na Sveučilištu u Göttingenu gdje diplomira i postiže prve znanstvene rezultate. Nakon diplome doktorirao je na Sveučilištu u Helmstedtu (1799.) te se predaje istraživačkom radu. Godine 1801. objavljuje svoju prvu znamenitu knjigu *Disquisitiones Arithmeticae*, a 1809. drugu knjigu pod nazivom *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, u kojoj raspravlja o gibanju nebeskih tijela. Za metodologiju znanstveno-istraživačkog rada u biološkim i društvenim znanostima posebno je značajno njegovo djelo *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1823), koje je posvećeno matematičkoj statistici, posebice metodi najmanjih kvadrata i normalnoj krivulji, koja se u njegovu čast naziva Gaussovom krivuljom.

Prema Kolesarić i Petz, 1999, i http://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss



Slika 2.5-13. Normalna distribucija s parametrima μ i σ

¹ Pierre Simone Laplace (1749. - 1827.) francuski matematičar

² Abraham De Moivre (1667. - 1754.) engleski matematičar francuskog podrijetla

Ako su vrijednosti izražene u standardiziranom obliku (v. poglavlje 2.7, str. 114-123.)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

onda se formula normalne distribucije svodi na oblike

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

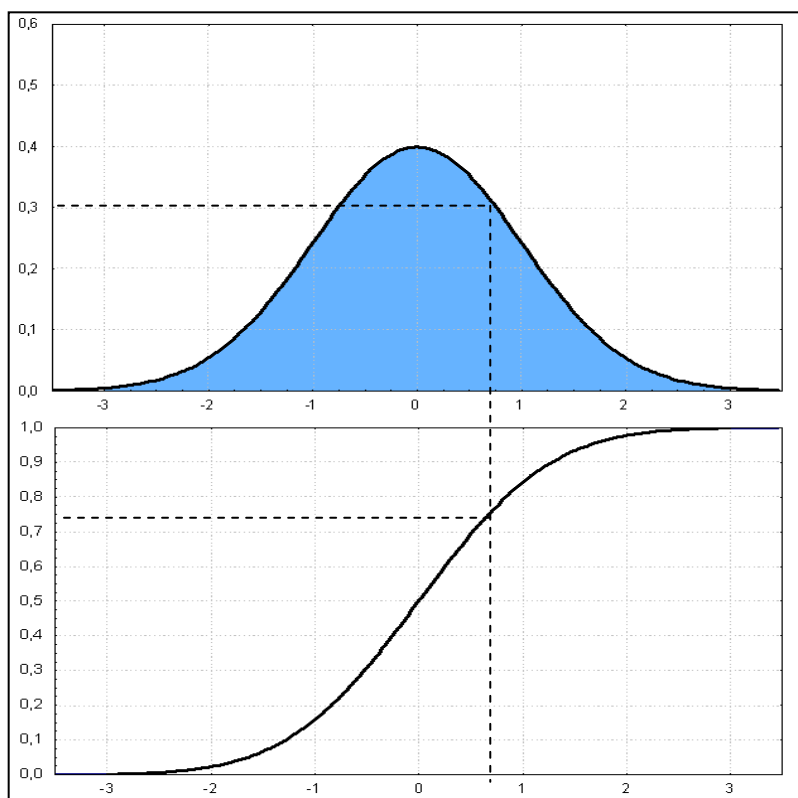
s parametrima $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ (slika 2.5-14). U statističkim analizama često je važnije utvrditi vjerojatnost postizanja boljeg ili lošijeg rezultata od neke vrijednosti, što se izračunava tzv. integralom vjerojatnosti

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

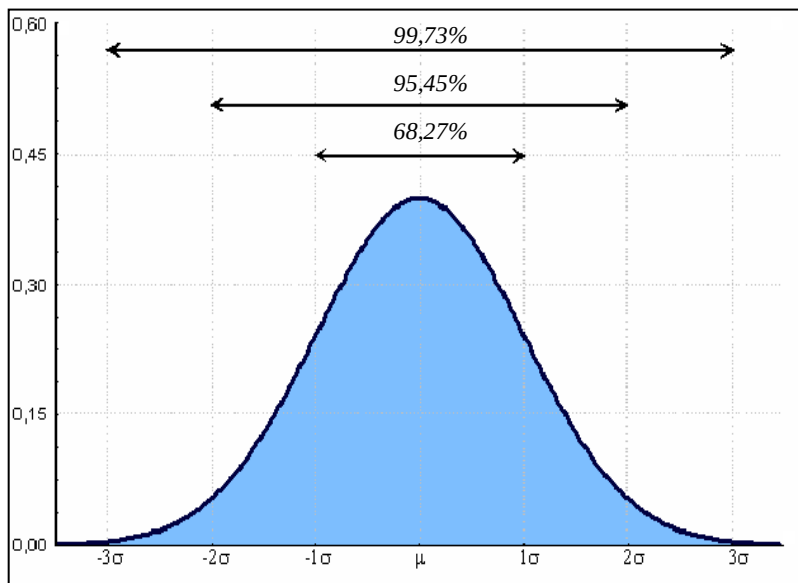
Dobivena funkcija $\phi(z)$ je normalna kumulativna distribucija (slika 2.5-14), vrijednosti koje odgovaraju vjerojatnosti postizanja rezultata koji je jednak ili manji od rezultata z , što odgovara površini ispod normalne distribucije od $-\infty$ do z . Slika 2.5-14 ilustrira odnos funkcije $f(z)$ i $\phi(z)$. Vrijednosti funkcije $\phi(z)$ za odgovarajuće z vrijednosti prikazane su u tablici A str. 316.

Moguće je uočiti da je normalna distribucija zvonastog oblika, unimodalna i zrcalno simetrična u odnosu na aritmetičku sredinu. Aritmetička sredina, modus i medijan su jednaki. Normalna distribucija je definirana aritmetičkom sredinom i standardnom devijacijom. Proteže se u intervalu od $-\infty$ do $+\infty$, a vjerojatnost da se dogodi vrijednost u intervalu (slika 2.5-15):

- od -1σ do $+1\sigma$ je 68,27 %
- od -2σ do $+2\sigma$ je 95,45 %
- od -3σ do $+3\sigma$ je 99,73 %, odnosno
- od $-1,96\sigma$ do $+1,96\sigma$ je 95 %
- od $-2,58\sigma$ do $+2,58\sigma$ je 99 %.



Slika 2.5-14. Funkcije $f(z)$ i $\Phi(z)$ za $\mu = 0$ i $\sigma = 1$



Slika 2.5-15. Prikaz karakterističnih dijelova površine kod normalne distribucije

2.5.3.2. Studentova t - distribucija

William Gosset definirao je t -distribuciju i objavio je u časopisu *Biometrika*, 1908. godine pod pseudonimom *Student*.

Slučajna varijabla t ima *Studentovu t -distribuciju* s parametrom df ako je

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{df+1}{2}\right)}{\sqrt{df\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{df}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{df}\right)^{-\frac{df+1}{2}}$$

gdje je

- df broj stupnjeva slobode ($df=1, 2, \dots$)³
- Γ gama funkcija⁴
- $\pi=3.14459\dots$

Studentova t -distribucija ima oblik sličan normalnoj distribuciji. Za $df \rightarrow \infty$, t -distribucija se približava standardiziranoj normalnoj distribuciji s parametrima $\mu=0$ i $\sigma=1$. Sa smanjivanjem broja stupnjeva slobode t -distribucija poprima sve širi oblik (slika 2.5-16).



William Gosset (1876. – 1937.) studirao je kemiju i matematiku na New College u Oxfordu. Po završetku studija 1899. godine dobiva posao kemičara u poznatoj pivarskoj tvrtci Guinness u Dublinu. U nastojanju da unaprijedi proizvodnju, razvijao je statističke metode. Osobito je značajan njegov doprinos u oblikovanju t -testa i t -distribucije. Objavljivao je članke pod pseudonimom *Student* pa se često t -test i

t -distribucija nazivaju *Studentov t -test* i *Studentova t -distribucija*. Posjećivao je i dopisivao se s mnogim statističarima, među kojima i s R. Fisherom i K. Pearsonom.

Prema, Kolesarić i Petz, (1999) i O'Connor i Robertson:
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7EHistory/Mathematicians/Gosset.html>

Znanstveni članak *The Probable Error of Mean* objavljen u časopisu *Biometrika* 1908. godine.

VOLUME VI MARCH, 1908 No. 1

BIOMETRIKA.

THE PROBABLE ERROR OF A MEAN.

By STUDENT.

Introduction.

ANY experiment may be regarded as forming an individual of a "population" of experiments which might be performed under the same conditions. A series of experiments is a sample drawn from this population.

Now any series of experiments is only of value in so far as it enables us to form a judgment as to the statistical constants of the population to which the experiments belong. In a great number of cases the question finally turns on the value of a mean, either directly, or as the mean difference between the two quantities.

If the number of experiments be very large, we may have precise information as to the value of the mean, but if our sample be small, we have two sources of uncertainty—(1) owing to the "error of random sampling" the mean of our series of experiments deviates more or less widely from the mean of the population, and (2) the sample is not sufficiently large to determine what is the law of distribution of individuals. It is usual, however, to assume a normal distribution, because, in a very large number of cases, this gives an approximation so close that a small sample will give no real information as to the manner in which the population deviates from normality: since some law of distribution must be assumed it is better to work with a curve whose area and ordinates are tabled, and whose properties are well known. This assumption is accordingly made in the present paper, so that its conclusions are not strictly applicable to populations known not to be normally distributed; yet it appears probable that the deviation from normality must be very extreme to lead to serious error. We are concerned here solely with the first of these two sources of uncertainty.

The usual method of determining the probability that the mean of the population lies within a given distance of the mean of the sample, is to assume a normal distribution about the mean of the sample with a standard deviation equal to $s/\sqrt{n}$, where s is the standard deviation of the sample, and to use the tables of the probability integral.

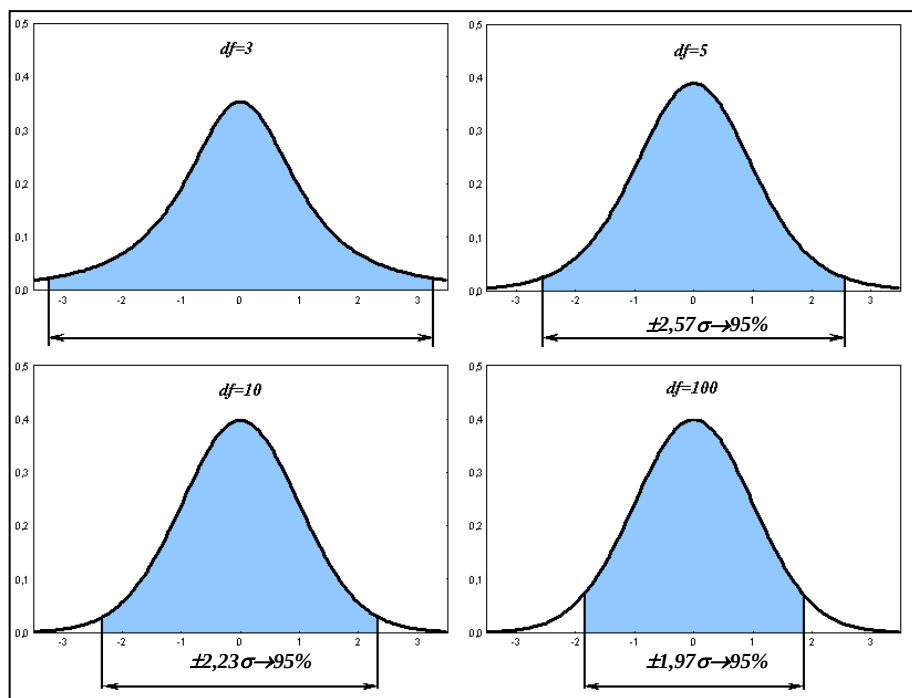
Biometrika 11

1

³ Broj stupnjeva slobode (*engl. degrees of freedom*) definira se kao broj neovisnih opažanja (entiteta) n umanjen za broj k parametara potrebnih da bi se odredio dani pokazatelj. Dakle, broj stupnjeva slobode $df = n - k$ (prema Šošić i Sedar, 2002: 249).

⁴ Više o gama funkciji moguće je pročitati u knjizi I.Pavić (1988). Statistička teorija i primjena. (str.113-116). Zagreb: Tehnička knjiga.

Vrijednosti za *t*-distribuciju za određeni broj stupnjeva slobode (*df*) dane su u tablici B str. 317.



Slika 2.5-16. *t*-distribucija za *df* = 3, *df* = 5, *df* = 10, *df* = 100

2.5.3.3. Snedecorova F - distribucija

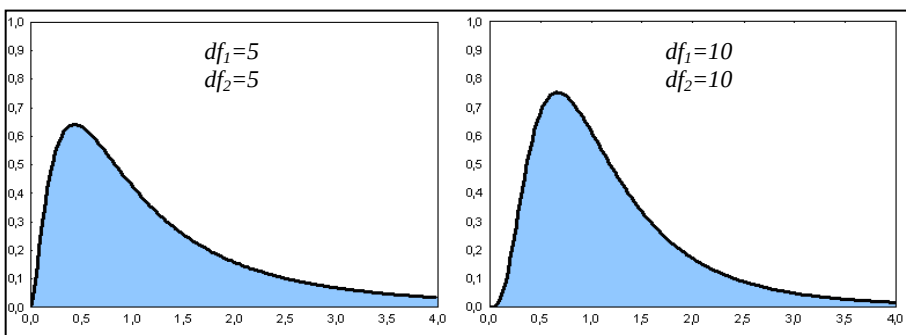
George W. Snedecor je na temelju ranijih radova R. A. Fishera, a za potrebe suvremene statističke prakse, definirao *F-distribuciju*. U Fisherovu čast označio ju je simbolom *F*. *Snedecorova* ili *F-distribucija* je kontinuirana funkcija vjerojatnosti slučajne varijable definirana u intervalu $(0, +\infty)$. Za neku slučajnu kontinuiranu varijablu *F* kaže se da ima *F-distribuciju* s parametrom df_1 i df_2 ako je

$$f(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{df_1 + df_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{df_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{df_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{df_1}{df_2}\right)^{\frac{df_1}{2}} \cdot \frac{F^{(df_1/2)-1}}{\left(1 + \frac{df_1}{df_2} F\right)^{(df_1+df_2)/2}},$$

gdje su

- df_1 i df_2 stupnjevi slobode ($df_1 = 1, 2, \dots$ i $df_2 = 1, 2, \dots$)
- Γ gama funkcija.

Funkcija $f(F)$ zavisi od parametara df_1 i df_2 . *F-distribucija* je unimodalna i pozitivno asimetrična. Za male vrijednosti df (broja stupnjeva slobode) ima jako izraženu pozitivnu asimetriju, a s povećanjem broja stupnjeva slobode asimetričnost se smanjuje (slika 2.5-17).



Slika 2.5-17. *F-distribucija* za $df_1 = 5$, $df_2 = 5$ i za $df_1 = 10$, $df_2 = 10$

Vrijednosti za *F-distribuciju* za odgovarajući broj stupnjeva slobode (df_1 i df_2) dane su u tablici C str. 318-321. *F-vrijednost* iz tablice C očitava se tako da se broj stupnjeva slobode df_1 čita na gornjem rubu tablice (stupci), a broj stupnjeva slobode df_2 čita na lijevom rubu tablice (reci). Na mjestu križanja stupca i retka očita se odgovarajuća *F-vrijednost*.

2.5.3.4. χ^2 - distribucija

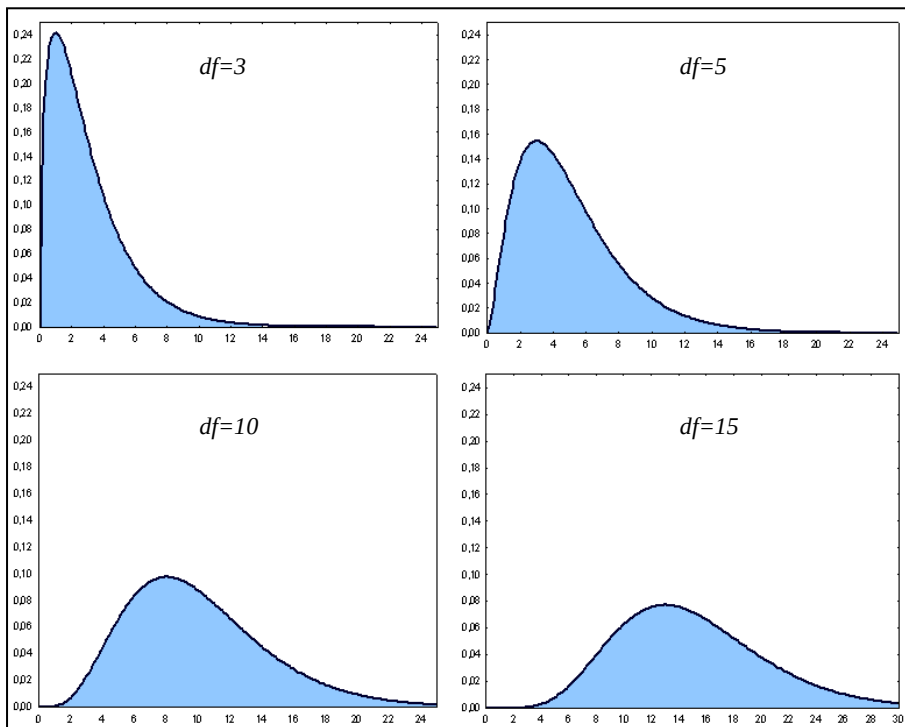
Za neku slučajnu kontinuiranu varijablu x kaže se da ima χ^2 -distribuciju s parametrom df ako je

$$f(x) = \frac{1}{2^{df/2} \Gamma(df/2)} x^{df/2-1} e^{-x/2},$$

gdje je

- df broj stupnjeva slobode ($df = 1, 2, \dots$)
- Γ gama funkcija
- $e = 2,71828$.

Vidljivo je da funkcija $f(x)$ zavisi samo od parametra df . Za male vrijednosti df (broja stupnjeva slobode) χ^2 -distribucija ima jako izraženu pozitivnu asimetriju, a s povećanjem broja stupnjeva slobode teži simetričnosti (slika 2.5-18). Zbog složenosti izračunavanja, vrijednosti χ^2 -distribucije za odgovarajući broj stupnjeva slobode (df) dane su u tablici D str. 322.



Slika 2.5-18. χ^2 - distribucija za broj stupnjeva slobode $df=3$, $df=5$, $df=10$, $df=15$

2.6

K-S test normaliteta distribucije

S obzirom na to da primjena parametrijskih statističkih metoda zahtijeva kvantitativne normalno distribuirane varijable, obično se u svakom realnom istraživanju utvrđuje da li empirijske distribucije statistički značajno odstupaju od normalne distribucije. Naime, empirijske distribucije uvijek u nekoj mjeri odstupaju od teoretske normalne distribucije zbog toga što se u istraživanjima koriste uzorci ispitanika koji nikada potpuno ne odražavaju stanje populacije. Stoga se, ovisno o reprezentativnosti uzorka ispitanika, može dogoditi da inače normalno distribuirane varijable u populaciji, manje ili više odstupaju od teoretske normalne distribucije. Takva odstupanja su proizvod slučajnog variranja entiteta u uzorcima i ne smatraju se statistički značajnima. S druge strane, ako su odstupanja neke empirijske distribucije toliko velika da prelaze razinu slučajnih odstupanja, tada se smatraju statistički značajnima. Takva odstupanja nisu posljedica slučajnog variranja entiteta u uzorku, već se radi o varijablama kojih je stvarna distribucija različita od normalne distribucije.

Najčešće korišten postupak za utvrđivanje normaliteta neke empirijske distribucije je *Kolmogorov-Smirnovljev test (K-S test)*. Ovaj statistički postupak temelji se na usporedbi *empirijskih relativnih kumulativnih frekvencija (rcf)* i *teoretskih relativnih kumulativnih frekvencija (trcf)*. Postupak testiranja normaliteta distribucije pomoću *KS-testa* prikazat ćemo na sljedećem primjeru.

Primjer: 60 judaša izmjereno je testom *skok udalj s mjesta*. Potrebno je uz pomoć *KS-testa* utvrditi odstupa li njihova (empirijska) distribucija statistički značajno od (teoretske) normalne distribucije uz pogrešku od 5%. Testiranje normaliteta empirijske distribucije iz ovog primjera sastoji se od nekoliko koraka.

Tablica 2.6-1. Testiranje normaliteta distribucije *KS-testom*

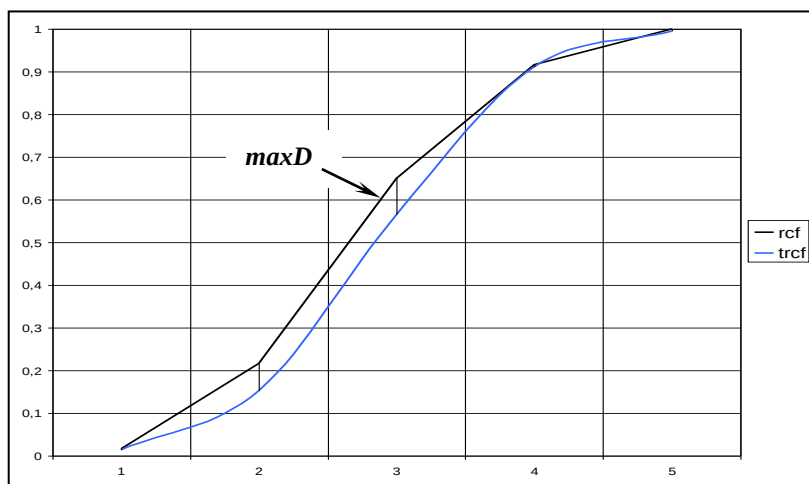
Intervali razreda	f	cf	rcf	z	trcf	D
120<x<=140	1	1	0,0167	-2,21	0,0135	0,0032
140<x<=160	12	13	0,2167	-1,02	0,1531	0,0636
160<x<=180	26	39	0,6500	0,16	0,5648	0,0852
180<x<=200	16	55	0,91,67	1,35	0,9114	0,0053
200<x<=220	5	60	1	2,54	0,9944	0,0056

$$KS-test_{0,05} = 0,172$$

Potrebno je:

- odrediti prikladan broj razreda i njihovu veličinu (interval razreda) te u njih grupirati entitete (v. poglavlje 2.3., str. 50-62). U tablici 2.6-1 prikazano je grupiranje 60 judaša u 5 razreda u varijabli *skok udalj s mjesta* (stupac-f)
- na temelju grupiranih podataka izračunati empirijske kumulativne (stupac-cf u tablici 2.6-1) i relativne kumulativne frekvencije (stupac-rcf u tablici 2.6-1)
- na temelju aritmetičke sredine (177,25) i standardne devijacije (16,86), standardizirati (standardizacija rezultata objašnjena je u sljedećem poglavlju) gornje granice svakog razreda (stupac-z u tablici 2.6-1)
- uz pomoć tablice površine ispod normalne distribucije (tablica A str. 316) izračunati površinu od lijevog kraja krivulje do određene *z-vrijednosti*, odnosno izračunati teoretske relativne kumulativne frekvencije (stupac-trcf u tablici 2.6-1)

- izračunati odstupanja između empirijske i teoretske relativne kumulativne frekvencije (stupac-D u tablici 2.6-1)
- odrediti najveće odstupanje empirijske i teoretske relativne kumulativne ($maxD$) frekvencije i usporediti ga s tabličnom vrijednošću KS -testa, određenom za odgovarajući broj entiteta (tablica E, str. 323). Kritična (tablična) vrijednost KS -testa uz pogrešku od 0,05 za 60 entiteta iznosi 0,172. Ako je najveće odstupanje (slika 2.6-1) između empirijske i teoretske relativne kumulativne frekvencije manje od kritične vrijednosti KS -testa ($maxD < KS$ -test), zaključujemo da empirijska distribucija ne odstupa statistički značajno od normalne distribucije uz određenu pogrešku. U ovom primjeru vrijednost $maxD$ (0,0852) je manja od kritične vrijednosti KS -testa (0,172), pa zaključujemo da empirijska distribucija ne odstupa statistički značajno od normalne distribucije uz pogrešku od 5%.



Slika 2.6-1. Poligon empirijskih i teoretskih relativnih kumulativnih frekvencija

Za broj entiteta veći od 100 moguće je kritične vrijednosti KS -testa uz pogrešku od 0,05 i 0,01 računati formulama (prema Pauše, 1993, str. 263):

$$KS - test_{0,05} = \frac{1,36}{\sqrt{n}} \quad KS - test_{0,01} = \frac{1,63}{\sqrt{n}}$$

2.7

Standardizacija podataka (*z - vrijednost*)

Za prikupljanje podataka na nekom uzorku entiteta koriste se različiti mjerni instrumenti, pa su i rezultati izraženi u različitim mjernim jedinicama. Stoga je usporedba vrijednosti entiteta u različitim varijablama znatno otežana. Ovaj problem se rješava postupkom transformacije originalnih vrijednosti neke varijable u tzv. *standardizirane* ili *z-vrijednosti*.

Postupak standardizacije provodi se pomoću formule

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j},$$

gdje je

- z_{ij} standardizirani rezultat entiteta i u varijabli j
- x_{ij} originalna vrijednost ispitanika i u varijabli j
- $\bar{x}_j$ aritmetička sredina varijable j
- σ_j standardna devijacija varijable j .

Iz navedene formule lako je uočiti da se standardizirana vrijednost izračunava određivanjem odstupanja entiteta od aritmetičke sredine (centriranje rezultata), koje se potom podijeli standardnom devijacijom. Dakle, standardizirana vrijednost je relativna mjera odstupanja svakog entiteta od aritmetičke sredine, izražena u dijelovima standardne devijacije.

Praktična primjena transformacije originalnih podataka u *z-vrijednosti* razmotrit će se u sljedećim primjerima.

Primjer: Deset učenika natjecalo se u tri sportske discipline: *skok udalj* (SD), *trčanje na 100 metara* (T100m) i *bacanje kugle* (BK) i postiglo rezultate navedene u tablici 2.7-1.

Tablica 2.7-1. Rezultati 10 učenika u tri sportske discipline

Učenik	SD	T100m	BK
AB	359	13,6	561
DF	321	13,9	550
JG	346	13,7	538
KL	332	14,0	490
DD	450	12,2	518
ED	314	14,1	551
TB	410	12,5	589
ZN	425	12,3	602
RG	369	13,5	547
EN	378	13,8	510
$\bar{x}$	370,4	13,36	545,6
σ	45,66	0,73	34,21

Potrebno je utvrditi ukupan poredak učenika na ovom natjecanju. Dakle, problem se svodi na rangiranje većeg broja entiteta opisanih većim brojem varijabli. S obzirom na to da su rezultati učenika u navedenim disciplinama izraženi različitim mjernim jedinicama, nije opravdano kondenzirati rezultate njihovim jednostavnim zbrajanjem, već ih je prethodno potrebno transformirati u *z-vrijednosti*. Cijeli postupak moguće je provesti u nekoliko koraka.

Prvi korak: Izračunati aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju za svaku varijablu (tablica 2.7-2).

Tablica 2.7-2. Aritmetičke sredine i standardne devijacije

	SD	T100m	BK
$\bar{x}$	370,4	13,36	545,6
σ	45,66	0,73	34,21

Drugi korak: Transformirati originalne podatke u z-vrijednosti na temelju izračunatih aritmetičkih sredina i standardnih devijacija. Primjerice, standardizirani rezultat učenika AB u disciplini skok udalj (SD) izračuna se prema formuli

$$z_{AB,SD} = \frac{359 - 370,4}{45,66} = \frac{-11,4}{45,66} = -0,25$$

Na isti način transformiraju se rezultati ostalih učenika u sve tri discipline. Rezultati su prikazani u tablici 2.7-3.

Tablica 2.7-3. Standardizirani rezultati 10 učenika u tri atletske discipline

	SD	T100M	BK
AB	-0,25	0,33	0,45
DF	-1,08	0,74	0,13
JG	-0,53	0,46	-0,22
KL	-0,84	0,87	-1,63
DD	1,74	-1,58	-0,81
ED	-1,24	1,01	0,16
TB	0,87	-1,17	1,27
ZN	1,20	-1,44	1,65
RG	-0,03	0,19	0,04
EN	0,17	0,60	-1,04

Treći korak: Prije kondenzacije rezultata (zbrojem ili prosječnom vrijednošću), potrebno je varijable koje su obrnuto skalirane pomnožiti s -1, odnosno promijeniti im predznak. Naime, varijabla *trčanje na 100 metara* (T100m) je obrnuto skalirana, što znači da veća numerička vrijednost predstavlja lošiji rezultat. Stoga tu varijablu treba pomnožiti s -1. Nakon ovog postupka dobiju se rezultati prikazani u tablici 2.7-4.

Tablica 2.7-4. Standardizirani rezultati 10 učenika u tri athleteske discipline nakon što je varijabla T100M pomnožena sa -1

	SD	T100M	BK
AB	-0,25	-0,33	0,45
DF	-1,08	-0,74	0,13
JG	-0,53	-0,46	-0,22
KL	-0,84	-0,87	-1,63
DD	1,74	1,58	-0,81
ED	-1,24	-1,01	0,16
TB	0,87	1,17	1,27
ZN	1,20	1,44	1,65
RG	-0,03	-0,19	0,04
EN	0,17	-0,60	-1,04

Četvrti korak: Kondenzirati standardizirane vrijednosti aritmetičkom sredinom, odnosno izračunavanjem prosječne *z-vrijednosti* za svakog učenika u navedenim disciplinama. Primjerice, prosječna *z-vrijednost* učenika AB izračuna se formulom

$$\bar{z}_{AB} = \frac{z_{AB,SD} + z_{AB,T100} + z_{AB,BK}}{3} = \frac{-0,25 + (-0,33) + 0,45}{3} = -0,04$$

Na isti način izračunaju se prosječni rezultati ostalih učenika u sve tri discipline. Rezultati su prikazani u tablici 2.7-5.

Tablica 2.7-5. Prosječni standardizirani rezultati 10 učenika u tri athleteske discipline

	$\bar{z}$
AB	-0,04
DF	-0,56
JG	-0,41
KL	-1,11
DD	0,84
ED	-0,70
TB	1,10
ZN	1,43
RG	-0,06
EN	-0,49

Peti korak: Silazno (od većega k manjem) poredati učenike po izračunatoj prosječnoj *z-vrijednosti*. Konačan redoslijed učenika prikazan je u tablici 2.7-6.

Tablica 2.7-6. Rangirani prosječni standardizirani rezultati 10 učenika u tri athleteske discipline

Učenik	Rang	$\bar{z}$
ZN	1.	1,43
TB	2.	1,10
DD	3.	0,84
AB	4.	-0,04
RG	5.	-0,06
JG	6.	-0,41
EN	7.	-0,49
DF	8.	-0,56
ED	9.	-0,70
KL	10.	-1,11

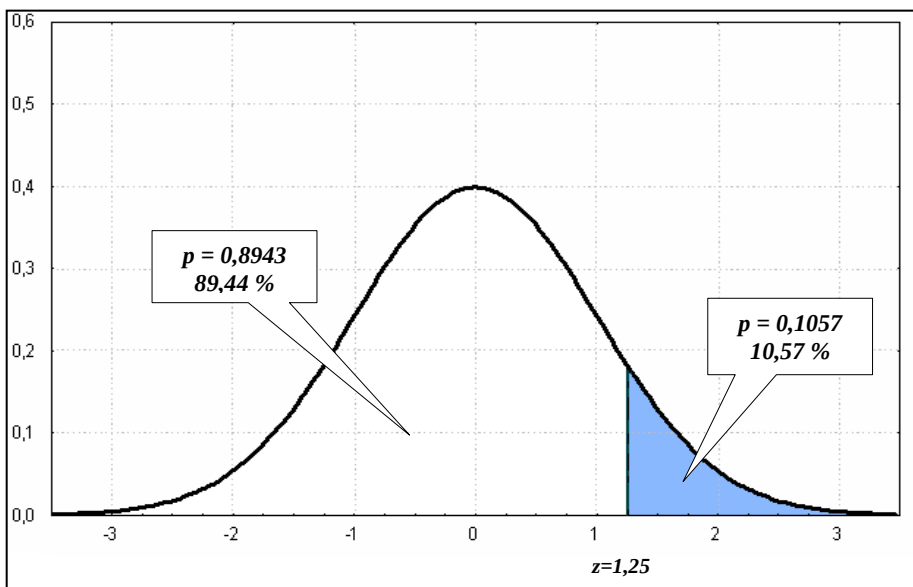
Dakle, najbolji je učenik ZN, zatim slijedi učenik TB pa učenik DD itd. Ovaj postupak u sportu može biti vrlo koristan za provođenje selekcije.

Primjer: Izmjereno je 257 dječaka testom za procjenu eksplozivne snage *skok udalj s mjesta*. Aritmetička sredina iznosila je 215 cm, a standardna devijacija 12 cm. Učenik XY postigao je rezultat 230 cm. Potrebno je procijeniti postotak (%) i broj učenika koji su postigli lošiji rezultat od učenika XY.

Prvo je potrebno izračunati *z-vrijednost* ispitanika XY, a ona iznosi

$$z_{XY} = \frac{230 - 215}{12} = \frac{15}{12} = 1,25$$

Uz pretpostavku da su rezultati normalno distribuirani, moguće je procijeniti vjerojatnost boljeg rezultata uz pomoć tablice A (str. 316). Naime, vjerojatnost da se postigne bolji rezultat od odgovarajuće *z-vrijednosti* odgovara površini ispod normalne distribucije od zadane *z-vrijednosti* do desnoga kraja krivulje (slika 2.7-1).



Slika 2.7-1. Površina ispod normalne distribucije odgovara vjerojatnosti da neki rezultat bude bolji ili lošiji od zadane z - vrijednosti

Dakle, za vrijednost $z=1,25$ odgovara površina ispod normalne distribucije od $p=0,1057$, ili izraženo u postotku 10,57%, što izražava vjerojatnost da se postigne bolji rezultat od ispitanika XY.

$$z = 1,25 \Rightarrow p = 0,1057 \Rightarrow 10,57 \%$$

Vjerojatnost postizanja lošijeg rezultata jednaka je $1-0,1057=0,8943$, odnosno 89,43 %.

Na temelju procijenjene vjerojatnosti može se izračunati broj ispitanika s boljim, odnosno lošijim rezultatom. S obzirom na to da je

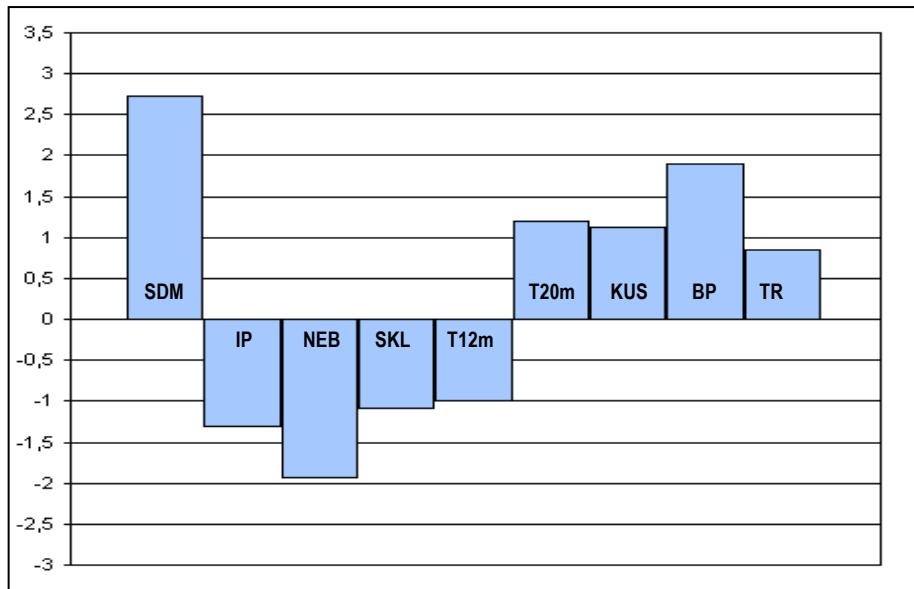
$$p = \frac{d}{n}, \text{ odnosno } \% = \frac{d}{n} \cdot 100,$$

gdje je

- p proporcija ($p = 0,1057$)
- d dio cjeline (broj učenika s boljim rezultatom od $z = 1,25$)
- n cjelina (ukupan broj učenika $n = 257$),

onda je $d = p \cdot n = 0,1057 \cdot 257 = 27,16 \approx 27$ učenika s boljim, odnosno, $257 - 27 = 230$ učenika s lošijim rezultatom.

Praktična korist od standardizacije rezultata ogleda se i u mogućnosti grafičkog prikazivanja rezultata entiteta u većem broju varijabli koje opisuju njegov antropološki profil (slika 2.7-2).



Legenda: SDM - skok udalj s mjesta, IP - iskret palicom, NEB – neritmično bubnjanje, SKL – sklekovci, T12min – trčanje 12 minuta, T20m - trčanje 20 m, KUS – koraci u stranu, BP – brzina provlaka, TR – taping rukom.

Slika 2.7-2. Grafički prikaz profila treniranosti sportaša

To omogućava, primjerice, uočavanje stanja činilaca odgovornih za uspješnost u određenoj sportskoj aktivnosti, odnosno određivanje profila stanja treniranosti sportaša (slika 2.7-2). Na temelju slike 2.7-2 može se uočiti u kojim je testovima ispitanik postigao dobre, a u kojima loše rezultate, odnosno na što bi trebalo obratiti pozornost pri programiranju treninga u sljedećem razdoblju.

2.7.1. Standardizacija varijabli matričnom algebram

Neka je X matrica podataka dobivena opisivanjem nekog skupa od n entiteta skupom od m varijabli.

$$X = (x_{ij}),$$

gdje je $i = 1, \dots, n$, a $j = 1, \dots, m$. Matrica standardiziranih podataka Z dobije se operacijom

$$Z = X_c V^{-1}$$

gdje je

- $X_c = X - 1m^T$ matrica centriranih podataka
- $m = X^T 1 n^{-1}$ vektor aritmetičkih sredina (1 - sumacijski vektor s n jedinica)
- $V = (diag C)^{1/2}$ dijagonalna matrica standardnih devijacija koja se dobije ekstrakcijom dijagonale matrice kovarijanci $C = X_c^T X_c n^{-1}$.

Primjer: 9 ispitanika postiglo je sljedeće rezultate u skoku udalj (SD), trčanju na 100 metara (T100m) i bacanju kugle (BK). Potrebno je izračunati standardizirane rezultate uz pomoć matrične algebre.

$$X =$$

SD	T100m	BK
359	13,6	561
321	13,9	550
346	13,7	538
332	14	490
450	12,2	518
314	14,1	551
410	12,5	589
425	12,3	602
369	13,5	547

Matrica centriranih podataka X_c dobije se operacijom

$$X_c = X - 1m^T,$$

gdje je

- 1 sumacijski vektor sa n jedinica
- $m = X^T 1 n^{-1}$ vektor aritmetičkih sredina

1	m^T						
	SDM	T100m	BK		SDM	T100m	BK
1	369,56	13,31	549,56	=	369,56	13,31	549,56
1					369,56	13,31	549,56
1					369,56	13,31	549,56
1					369,56	13,31	549,56
1					369,56	13,31	549,56
1					369,56	13,31	549,56
1					369,56	13,31	549,56
1					369,56	13,31	549,56
1					369,56	13,31	549,56

X			$- 1 m^T$			$= X_c$		
SD	T100m	BK	SDM	T100m	BK	SD	T100m	BK
359	13,6	561	369,56	13,31	549,56	-10,56	0,29	11,44
321	13,9	550	369,56	13,31	549,56	-48,56	0,59	0,44
346	13,7	538	369,56	13,31	549,56	-23,56	0,39	-11,56
332	14	490	369,56	13,31	549,56	-37,56	0,69	-59,56
450	12,2	518	369,56	13,31	549,56	80,44	-1,11	-31,56
314	14,1	551	369,56	13,31	549,56	-55,56	0,79	1,44
410	12,5	589	369,56	13,31	549,56	40,44	-0,81	39,44
425	12,3	602	369,56	13,31	549,56	55,44	-1,01	52,44
369	13,5	547	369,56	13,31	549,56	-0,56	0,19	-2,56

Matrica kovarijanci C varijabli iz X izračuna se operacijom

$$C = X_c^T X_c n^{-1},$$

gdje je X_c matrica centriranih podataka početnih vrijednosti matrice X .

X_c^T									X_c			n^{-1}	
SD	T100m	BK	SD	T100m	BK	SD	T100m	BK	SD	T100m	BK	9^{-1}	
-10,56	0,29	11,44	-10,56	0,29	11,44	-10,56	0,29	11,44	-10,56	0,29	11,44		
-48,56	0,59	0,44	-48,56	0,59	0,44	-48,56	0,59	0,44	-48,56	0,59	0,44		
-23,56	0,39	-11,56	-23,56	0,39	-11,56	-23,56	0,39	-11,56	-23,56	0,39	-11,56		
-37,56	0,69	-59,56	-37,56	0,69	-59,56	-37,56	0,69	-59,56	-37,56	0,69	-59,56		
80,44	-1,11	-31,56	80,44	-1,11	-31,56	80,44	-1,11	-31,56	80,44	-1,11	-31,56		
-55,56	0,79	1,44	-55,56	0,79	1,44	-55,56	0,79	1,44	-55,56	0,79	1,44		
40,44	-0,81	39,44	40,44	-0,81	39,44	40,44	-0,81	39,44	40,44	-0,81	39,44		
55,44	-1,01	52,44	55,44	-1,01	52,44	55,44	-1,01	52,44	55,44	-1,01	52,44		
-0,56	0,19	-2,56	-0,56	0,19	-2,56	-0,56	0,19	-2,56	-0,56	0,19	-2,56		

$= C$

	SD	T100m	BK
SD	2337,78	-36,11	531,53
T100m	-36,11	0,58	-11,41
BK	531,53	-11,41	1140,28

Ekstrakcijom dijagonale matrice kovarijanci C dobije se dijagonalna matrica varijanci V^2

$$V^2 = \text{diag}C,$$

a operacijom

$$V = (\text{diag}C)^{1/2}$$

dijagonalna matrica standardnih devijacija V .

$V^2 = \text{diag}C$				$V = (\text{diag}C)^{1/2}$			
	SD	T100m	BK		SD	T100m	BK
SD	2337,78	0	0	SD	48,35	0	0
T100m	0	0,58	0	T100m	0	0,76	0
BK	0	0	1140,28	BK	0	0	33,77

Standardizirani podaci dobiju se operacijom

$$X_c \quad V^{-1} \quad = \quad Z$$

SD	T100m	BK
-10,56	0,29	11,44
-48,56	0,59	0,44
-23,56	0,39	-11,56
-37,56	0,69	-59,56
80,44	-1,11	-31,56
-55,56	0,79	1,44
40,44	-0,81	39,44
55,44	-1,01	52,44
-0,56	0,19	-2,56

	SD	T100m	BK
SD	0,0207	0	0
T100m	0	1,3146	0
BK	0	0	0,0296

SD	T100m	BK
-0,22	0,38	0,34
-1,00	0,77	0,01
-0,49	0,51	-0,34
-0,78	0,91	-1,76
1,66	-1,46	-0,93
-1,15	1,04	0,04
0,84	-1,07	1,17
1,15	-1,33	1,55
-0,01	0,25	-0,08

2.8

Procjena aritmetičke sredine populacije

Znanstvena istraživanja utemeljena na statističkim metodama uglavnom su usmjerena na analizu reprezentativnih uzoraka izabranih iz neke konačne ili beskonačne populacije. Razlog tome je ili to što nije moguće mjeriti cijelu populaciju (npr. ako nas interesira kakav učinak ima novo cjepivo na neku virusnu bolest) ili u previsokim troškovima (npr. ako nas zanima razvijenost neke motoričke sposobnosti u desetogodišnjaka, onda bi trebalo izmjeriti sve desetogodišnjake, što je vrlo zahtjevno i skupo, a u nekim slučajevima je to i besmisleno, npr. ako testiramo kvalitetu nekog proizvoda koji se testom uništava). Stoga se znanstvena istraživanja provode na uzorcima, a dobiveni zaključci se generaliziraju na populaciju koju odabrani uzorak reprezentira. Pri tome valja naglasiti da rezultati dobiveni na uzorku mogu biti manje ili više različiti od rezultata koje bismo dobili na cijeloj populaciji. Bolja reprezentativnost uzorka očituje se u sigurnijim zaključcima o populaciji, odnosno u pouzdanijoj procjeni populacijskih parametara. Reprezentativnost uzorka osigurava se njegovom veličinom i načinom odabira. Uzorci entiteta mogu se birati na različite načine, što određuje tipove uzoraka. Najjednostavnija podjela uzoraka je na *namjerne* i *slučajne* uzorke. Pod namjernim uzorcima podrazumijevaju se oni uzorci čiji su entiteti birani prema nekom subjektivnom stavu istraživača o reprezentativnosti ili se uzorak formira prema lako ili trenutno

dostupnim entitetima (prigodni uzorak), dok kod slučajnih uzoraka svi entiteti (iz populacije izbora uzorka) imaju jednaku vjerojatnost izbora. S obzirom da se uzorci biraju radi što bolje reprezentativnosti populacije iz koje su izabrani (jer se zaključci dobiveni na uzorku uz određenu pogrešku generaliziraju na populaciju), lako je uočiti da će pogreška procjene biti manja što je broj entiteta uzorka bliži populaciji i u kome svi entiteti imaju jednaku vjerojatnost izbora.

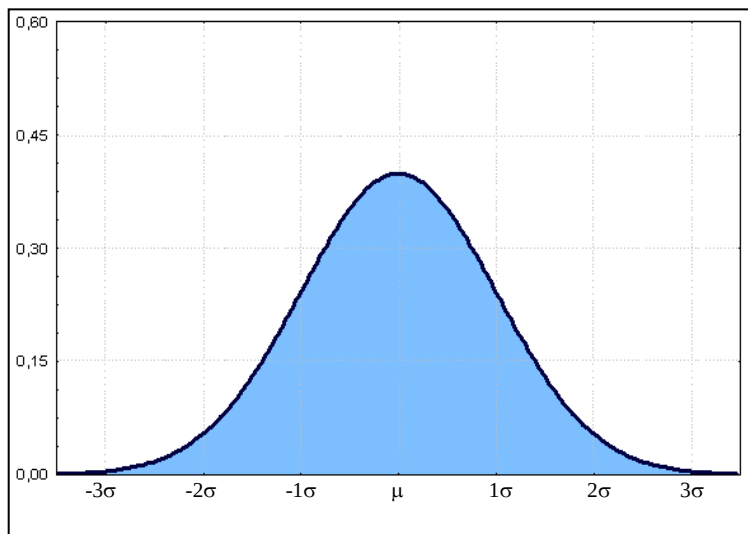
Općenito, neki parametar populacije ϕ (npr. aritmetičke sredine, varijance...) procjenjuje se na temelju istovrsnog parametra izračunatog iz nekog slučajnog uzorka ϕ' . S obzirom na to da je iz neke populacije moguće izabrati puno slučajnih uzoraka, jasno je da se time dobiva i veliki broj parametara ϕ' . Izračunati parametri ϕ' dobiveni na velikom broju uzoraka ne moraju biti jednaki parametru populacije ϕ jer su izračunati na dijelu (podskupu) populacije. Parametri izračunati na uzorcima ϕ' ne moraju biti međusobno jednaki jer su izračunati na podacima koji se mogu međusobno razlikovati od uzorka do uzorka. Stoga se postavlja pitanje: kako je moguće procijeniti parametar populacije ϕ ako od svih mogućih uzoraka odabranih iz neke populacije odaberemo jedan?

Ako iz neke populacije od N entiteta odaberemo sve moguće uzorke veličine n ($n < N$) te za svaki uzorak izračunamo parametar ϕ' , dobit ćemo neku distribuciju po kojoj će parametri ϕ' varirati. S obzirom na to da su uzorci birani slučajno, i vrijednosti parametra ϕ' slučajno će varirati, odnosno činit će slučajnu varijablu koja će imati neku distribuciju vjerojatnosti. Distribucija vjerojatnosti prema kojoj varira slučajna varijabla ϕ' naziva se *sampling distribucija*. S obzirom da *sampling distribucija* parametra ϕ' odgovara nekoj od teoretskih distribucija vjerojatnosti (*Gaussovoj*, *t-distribuciji*, *F-distribuciji*...), moguće je s određenom vjerojatnošću odrediti interval u kome se nalazi parametar populacije ϕ .

Najjednostavniji slučaj statističkog zaključivanja (ali izuzetno bitan za razumijevanje logike statističkog zaključivanja) jest procjena aritmetičke sredine populacije μ na temelju aritmetičke sredine nekog slučajno odabranog uzorka x .

Radi lakšeg predočavanja i razumijevanja navedenog problema, pretpostavimo da iz jedne velike i konačne populacije (npr. $N=10000$)

izračunamo aritmetičku sredinu (μ) i standardnu devijaciju (σ) neke varijable X koja je normalno distribuirana (slika 2.8-1).



Slika 2.8-1. Normalna distribucija pojedinačnih rezultata entiteta neke populacije s parametrima μ i σ

Ako iz te populacije metodom slučajnog odabira (npr. generatorom slučajnih brojeva, koji je implementiran u gotovo sve novije programske proizvode *STATISTICA*, *SPSS* i sl.), odaberemo jedan uzorak veličine 5 entiteta ($n=5$), postavlja se pitanje: hoće li aritmetička sredina tog (prvog) uzorka ($\bar{x}_1$) biti jednaka aritmetičkoj sredini populacije (μ)?

S obzirom na to da su entiteti slučajno odabrani u ovaj uzorak može se pretpostaviti da će aritmetička sredina tog uzorka biti slična aritmetičkoj sredini populacije, a da joj ne mora biti jednaka.

Ako se odabere novi uzorak, postavlja se isto pitanje: hoće li aritmetička sredina tog uzorka ($\bar{x}_2$) biti jednaka aritmetičkoj sredini prvog uzorka ($\bar{x}_1$), odnosno aritmetičkoj sredini populacije (μ)?

Odgovor će biti sličan prethodnome, dakle, vjerojatno će biti slična, ali ne mora biti ista. Ako se nastavi sa slučajnim izborom uzoraka¹ iste veličine (npr. 10 000 puta) i računanjem njihovih aritmetičkih sredina

¹Entiteti se u slučajni uzorak biraju uz povrat, odnosno nakon izbora jednog entiteta zabilježimo njegov rezultat te ga vratimo u populaciju.

dobit će se veliki broj aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine 5 entiteta.

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$$

Postavlja se pitanje: kolika će biti aritmetička sredina te varijable (varijable aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine 5 entiteta) i kakva će joj biti distribucija?

Kada bismo izračunali aritmetičku sredinu aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka, dobili bismo aritmetičku sredinu populacije (μ), a distribucija bi bila *normalna*. Valja istaknuti da će distribucija aritmetičkih sredina dovoljno velikih uzoraka ($n > 30$) jednake veličine težiti ka normalnoj distribuciji i u slučajevima kad distribucija populacije nije normalna. (Ova zakonitost poznata je pod imenom *centralni granični teorem* čiji je matematički dokaz moguće pronaći u knjizi I. Pavić (1988): Statistička teorija i primjena, str. 176-178).

Dakle,

- aritmetička sredina aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka jednake veličine tendirat će aritmetičkoj sredini populacije
- distribucija aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka iste veličine biti će *normalna* ili *Gaussova*.

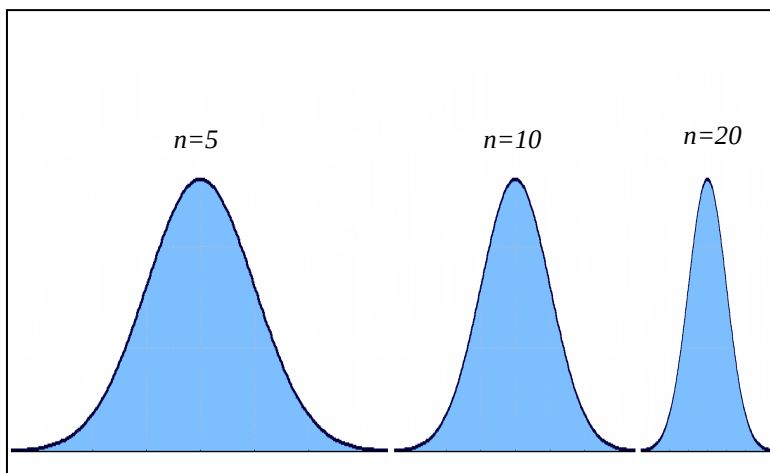
S obzirom na to da je *normalna* distribucija zadana aritmetičkom sredinom i standardnom devijacijom, postavlja se pitanje procjene standardne devijacije varijable aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka određene veličine. No, prije toga razmotrimo o čemu ona ovisi. Ako nastavimo s izvlačenjem slučajnih uzoraka, ali ne više veličine 5 entiteta, već 10, dobit ćemo varijablu aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine 10 entiteta.

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$$

Postavlja se pitanje: je li se nešto promijenilo u odnosu na varijablu aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine 5 entiteta? Da li povećanje entiteta u uzorku smanjuje ili povećava vjerojatnost

slučajnog odstupanja aritmetičkih sredina uzoraka od aritmetičke sredine populacija ili pak nema nikakvog utjecaja?

Nije teško zaključiti da povećanje veličine uzorka smanjuje vjerojatnost slučajnog odstupanja aritmetičkih sredina uzoraka oko aritmetičke sredine populacije. Dakle, distribucija aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine 10 entiteta u odnosu na distribuciju aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine 5 entiteta bit će uža, odnosno, imat će manju standardnu devijaciju (slika 2.8-2).



Slika 2.8-2. Distribucija aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine $n_1=5$, $n_2=10$, $n_3=20$

Valja zaključiti da će standardna devijacija varijable aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka biti to manja što su uzorci veći. Osim toga, na standardnu devijaciju aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka utječe i varijabilnost istraživane pojave (varijable) u populaciji. Logično je da će standardna devijacija aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka jednake veličine biti manja kod manje varijabilnih populacija nego kod populacija kod kojih istraživana pojava više varira. Međutim, kako na varijabilnost neke pojave u određenoj populaciji ne možemo utjecati, smanjenje standardne devijacije aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka može se postići jedino povećanjem uzorka. Standardna devijacija aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka naziva se *standardna pogreška aritmetičke sredine* ($\sigma_{\bar{x}}$) i ključna je za procjenu aritmetičke sredine populacije.

Ako je poznata standardna devijacija aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka, odnosno *standardna pogreška aritmetičke sredine*, onda je moguća i procjena aritmetičke sredine populacije. Naime, ako su aritmetičke sredine slučajno odabranih uzoraka *normalno* distribuirne, moguće je konstatirati da se u intervalu:

- $\pm 3\sigma_x^-$ od aritmetičke sredine populacije nalazi približno 99% svih aritmetičkih sredina uzoraka,
- $\pm 2\sigma_x^-$ od aritmetičke sredine populacije nalazi približno 95% svih aritmetičkih sredina uzoraka (v. poglavlje 2.5.3.1, str. 104-106).

Prema tome, aritmetička sredina populacije nalazit će se u intervalu $\pm 3\sigma_x^-$ od bilo koje aritmetičke sredine uzorka s približnom vjerojatnošću od 99%, odnosno u intervalu $\pm 2\sigma_x^-$ s približnom vjerojatnošću od 95%.

Ako odstupanja aritmetičkih sredina uzoraka ($\bar{x}_i$) u odnosu na aritmetičku sredinu populacije (μ) podijelimo sa standardnom pogreškom aritmetičke sredine (σ_x^-)

$$z_i = \frac{\bar{x}_i - \mu}{\sigma_x^-}$$

(gdje je $i=1, \dots, n$, a n - ukupan broj slučajno odabranih uzoraka), dobijemo standardizirana odstupanja aritmetičkih sredina uzoraka u odnosu na aritmetičku sredinu populacije. S obzirom na to da su pri statističkom zaključivanju uobičajene pogreške² od $p=0,05$ (5%) i $p=0,01$ (1%), moguće je uvidjeti da će z biti između $\pm 1,96$ u 95%, odnosno između $\pm 2,58$ u 99% slučajeva.

$$\begin{aligned} -1,96 < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_x^-} < +1,96 & \text{ ; za } p=0,05 \\ -2,58 < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_x^-} < +2,58 & \text{ ; za } p=0,01 \end{aligned}$$

Ako svaki član gornjeg izraza pomnožimo sa standardnom pogreškom aritmetičke sredine (σ_x^-), dobijemo

² Za pogrešku s kojom se donosi određeni statistički zaključak još se upotrebljava i naziv *razina značajnosti* ili *razina signifikantnosti*.

$$-1,96 \cdot \sigma_x^- < \bar{x} - \mu < +1,96 \cdot \sigma_x^- ; \text{ za } p=0,05$$

$$-2,58 \cdot \sigma_x^- < \bar{x} - \mu < +2,58 \cdot \sigma_x^- ; \text{ za } p=0,01$$

pa se interval procjene aritmetičke sredine populacije može izračunati formulama

$$\bar{x} - 1,96 \cdot \sigma_x^- < \mu < \bar{x} + 1,96 \cdot \sigma_x^- ; \text{ za } p=0,05$$

$$\bar{x} - 2,58 \cdot \sigma_x^- < \mu < \bar{x} + 2,58 \cdot \sigma_x^- ; \text{ za } p=0,01$$

Dakle, ako je poznata standardna pogreška aritmetičke sredine, tada je moguća procjena intervala u kojemu se s određenom vjerojatnošću nalazi aritmetička sredina populacije. Međutim, standardnu pogrešku aritmetičke sredine nije moguće izračunati na uobičajen način za izračunavanje standardne devijacije jer se u praksi raspolaze samo jednim uzorkom, ali ju je moguće procijeniti formulom³

$$\sigma_x^- = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Iz formule je vidljivo da je veličina standardne pogreške aritmetičke sredine (σ_x^-) proporcionalna varijabilnosti pojave u populaciji (σ) i obrnuto proporcionalna drugom korijenu iz veličine uzorka (n).

S obzirom na to da je standardna devijacija populacije uglavnom nepoznata, standardna pogreška aritmetičke sredine procjenjuje se na temelju procjene standardne devijacije populacije putem standardne devijacije uzorka pa se standardna devijacija računa sa $n-1$ u nazivniku umjesto n . Dakle, standardna devijacija izračuna se formulom⁴

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

pa je procjena standardne pogreške aritmetičke sredine (s_x^-) jednaka omjeru procjene standardne devijacije populacije putem uzorka (s) i drugog korijena iz veličine uzorka (n).

³Matematički izvod nalazi se u knjizi I.Pavić: Statistička teorija i primjena, str. 170-171.

⁴Detaljnije logičko objašnjenje moguće je potražiti u knjizi B. Petz: Osnovne statističke metode za nematematičare, str. 61-62 i 125-126, a matematički dokaz u knjizi Ž. Pauše: Uvod u matematičku statistiku, str. 117-120, ili u knjizi I. Pavić: Statistička teorija i primjena, str. 179-181.

$$s_x^- = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

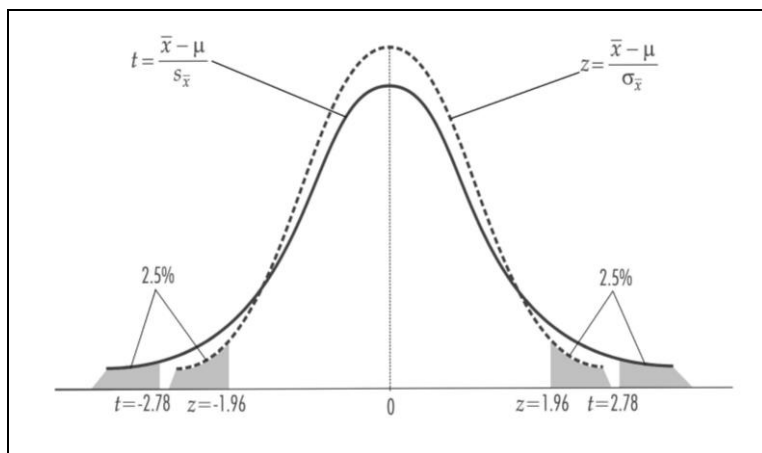
Zbog takvog načina procjenjivanja standardne pogreške aritmetičke sredine, *sampling distribucija* za izraz

$$\frac{\bar{x}_i - \mu}{s_x^-}$$

neće biti *normalna*, već *Studentova t-distribucija* (v. poglavlje 2.5.3.2, str. 107-108) *Studentova t-distribucija* teži *normalnoj* kada broj stupnjeva slobode teži beskonačnom ($df \rightarrow \infty$) pa su i *t-vrijednosti* za velike uzorke ($n > 30$) vrlo slične vrijednostima *normalne* distribucije (1,96 za 95%, odnosno 2,58 za 99% pouzdanosti procjene). Stoga kod malih uzoraka ($n < 30$) izraz

$$t_i = \frac{\bar{x}_i - \mu}{s_x^-}$$

(umjesto oznake *z* koristimo oznaku *t*) ima oblik *Studentove t-distribucije* uz broj stupnjeva slobode $df=n-1$ (slika 2.8-3).



Slika 2.8-3. Usporedba normalne i t-distribucije za $df=4$

Interval u kojem se s određenom vjerojatnošću nalazi aritmetička sredina populacije moguće je procijeniti formulom

$$\bar{x} - t_p \cdot s_x^- < \mu < \bar{x} + t_p \cdot s_x^-,$$

gdje je:

- $\bar{x}$ aritmetička sredina uzorka,
- $s_{\bar{x}}$ procjena standardne pogreške aritmetičke sredine,
- t_p vrijednost koja se za pogrešku p (u statističkom zaključivanju najčešće se koristi pogreške 0,01 ili 1%, i 0,05 ili 5%) i određeni broj stupnjeva slobode ($df=n-1$) dobije se na temelju *Studentove t-distribucije*.

U tablici B str. 317, dane su *t-vrijednosti* za odgovarajući broj stupnjeva slobode ($df=n-1$) i pogrešku (p).

Primjer: Na slučajno odabranom uzorku veličine 100 entiteta izračunata je aritmetička sredina ($\bar{x} = 180 \text{ cm}$) i standardna devijacija ($s = 10 \text{ cm}$). Potrebno je procijeniti interval u kojemu se s vjerojatnošću od 0,95 nalazi aritmetička sredina populacije.

Prvo je potrebno procijeniti standardnu pogrešku aritmetičke sredine

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1 \text{ cm}$$

Iz tablice B str. 317 odredi se *t-vrijednost* za $df=n-1=100-1=99$ i pogrešku od 0,05.

$${}_{99}t_{0,05} = 1,98$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u formulu za procjenu aritmetičke sredine populacije dobije se

$$\bar{x} - 1,98 \cdot 1 < \mu < \bar{x} + 1,98 \cdot 1,$$

odnosno

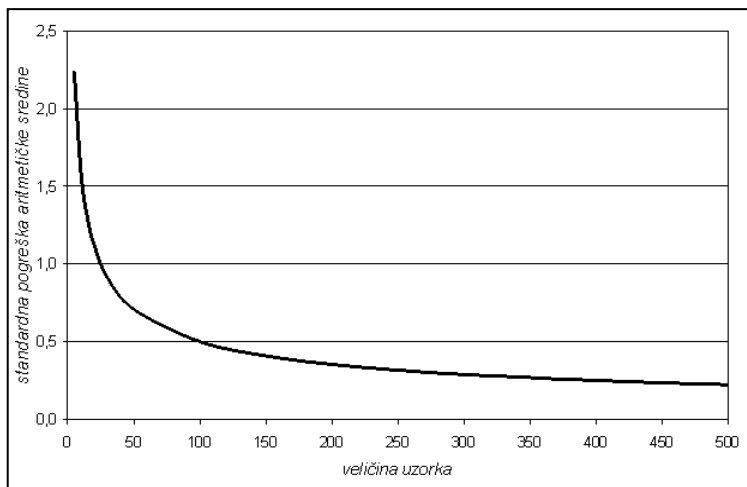
$$178,02 < \mu < 181,98.$$

Dakle, moguće je zaključiti da se aritmetička sredina populacije nalazi u intervalu od 178,02 do 181,98 sa sigurnošću od 95%, odnosno uz pogrešku od 5%.

Formula za standardnu pogrešku aritmetičke sredine

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

omogućava procjenu veličine uzorka koja će osigurati zadovoljavajuću reprezentativnost, odnosno razinu pouzdanosti statističke procjene. Iz formule je vidljivo da će procjena aritmetičke sredine populacije na temelju nekog uzorka biti to pouzdanija (standardna pogreška aritmetičke sredine bit će manja) što je varijabilnost pojave (σ) manja i što je broj entiteta u uzorku (n) veći. S obzirom na to da na varijabilnost pojave ne možemo utjecati, povećanje pouzdanosti statističke procjene postizemo povećanjem broja entiteta u uzorku. Povećanjem broja entiteta u uzorku smanjuje se standardna pogreška aritmetičke sredine (slika 2.8-4), odnosno povećava se pouzdanost statističke procjene. Međutim, iz slike 2.8-4 vidljivo je da se standardna pogreška aritmetičke sredine ne smanjuje linearno s povećanjem veličine uzorka, već je njezino smanjenje znatno veće pri povećanju broja entiteta kod manjih uzoraka, dok nakon neke veličine povećanje broja entiteta u uzorku nema znatniji utjecaj na njezinu vrijednost. O tome treba voditi računa pri planiranju veličine uzoraka u nekom istraživanju, jer se povećanjem uzorka povećavaju troškovi njegove provedbe nesrazmjerno s pouzdanošću statističke procjene.



Slika 2.8-4. Odnos između standardne pogreške aritmetičke sredine i veličine uzorka pri standardnoj devijaciji populacije $\sigma=10$

Primjer: Na slučajnom uzorku od 50 studenata prve godine Kineziološkog fakulteta izmjerili smo relativni primitak kisika. Aritmetička sredina je iznosila $\bar{x} = 55 \text{ mlO}_2/\text{kg}/\text{min}$, standardna devijacija $s = 5,5 \text{ mlO}_2/\text{kg}/\text{min}$. Standardna pogreška aritmetičke sredine iznosi

$$s_{\bar{x}} = \frac{5,5}{\sqrt{50}} = \frac{5,5}{7,07} = 0,78$$

Dakle, sa sigurnošću od 95% aritmetička sredina populacije nalazi se u intervalu

$$\mu = 55 \pm t_p \cdot 0,78$$

Uz pomoć tablice *B* str. 317 odredi se *t-vrijednost* za određenu pogrešku *p* i broj stupnjeva slobode *df*. Za pogrešku $p=0,05$ i broj stupnjeva slobode $df=49$ *t-vrijednost* iznosi 2,01. Prema tome, raspon u kojem može varirati aritmetička sredina populacije iznosi

$$2 \cdot 2,01 \cdot 0,78 = 3,14 \text{ mlO}_2/\text{kg/min}$$

Smatramo li taj raspon prevelikim i želimo li da on ne iznosi više od 2 $\text{mlO}_2/\text{kg/min}$, potrebno je povećati uzorak ispitanika. Broj entiteta koji će osigurati da raspon intervala procjene aritmetičke sredine ne bude veći od 2 $\text{mlO}_2/\text{kg/min}$ izračuna se postupkom

$$2 = 2 \cdot 2,01 \cdot \frac{5,5}{\sqrt{n}} = \frac{22,11}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{22,11}{2}$$

$$n = 11,06^2 \approx 122$$

Prema tome, formulu pomoću koje procjenjujemo veličinu uzorka za odgovarajući raspon procjene aritmetičke sredine populacije moguće je napisati u ovom obliku

$$n = \left(\frac{2 \cdot t_p \cdot s}{I} \right)^2$$

gdje je:

- *n* broj entiteta
- t_p vrijednost za određenu sigurnost procjene, odnosno pogrešku *p*, koja se dobije se na temelju *Studentove t-distribucije* uz određeni broj stupnjeva slobode $df=n-1$
- *s* standardna devijacija, a
- *I* prihvatljivi interval procjene aritmetičke sredine populacije.

2.9

t - test

Dio statistike koji se bavi problemima statističkog zaključivanja, odnosno generaliziranjem zaključaka s uzorka na populaciju naziva se *inferencijalna statistika*. U okviru inferencijalne statistike, odgovarajućim statističkim testom, *testiraju se statističke hipoteze* o veličini određenog statističkog parametra populacije na temelju slučajnog uzorka. Hipoteze definira istraživač na temelju cilja znanstvenog istraživanja. Naime, svako znanstveno istraživanje usmjereno je na rješavanje nekog *znanstvenog problema*. Uočeni znanstveni problem, koji se želi rješavati nekim znanstvenim istraživanjem, valja detaljno i precizno opisati i obrazložiti. Pojedino znanstveno istraživanje u pravilu je usmjereno na rješavanje jednog dijela uočenog znanstvenog problema pa se za svako znanstveno istraživanje jasno navode *ciljevi istraživanja*, a na temelju njih precizno se definiraju *hipoteze*. Dakle, “hipoteze proizlaze iz znanstvenog problema (dijela znanstvenog problema) koji želimo istraživati, odnosno iz hipotetičke teorije (dijela hipotetičke teorije) koju provjeravamo” (Mejovšek, 2003, str. 76.). Vrijednost neke znanstvene hipoteze moguće je procjenjivati temeljem sljedećih mjerila:

- *svrhovitost* – hipoteza treba biti u funkciji postizanja određenog cilja istraživanja;
- *provjerljivost* – hipotezu treba postaviti tako da ju je moguće provjeriti odgovarajućim postupcima;
- *plodotvornost* – hipoteza treba omogućiti donošenje plodotvornih zaključaka u odnosu na istraživani problem;

- *suglasnost* – hipoteza treba biti u skladu s postojećim znanjima o istraživanom problemu;
- *jednostavnost* – hipoteze trebaju biti precizno i jasno formulirane (Marušić i suradnici, 2000).

Hipoteza može biti *nulta* i *alternativna*. Nulta hipoteza se postavlja niječno (primjerice, nije nađena statistički značajna razlika između aritmetičkih sredina grupe A i B; nije nađena statistički značajna povezanost između varijable X i Y itd.), dok se alternativna hipoteza suprotstavlja (proturječi) nultoj hipotezi (primjerice, nađena je statistički značajna razlika između aritmetičkih sredina grupe A i B; nađena je statistički značajna povezanost između varijable X i Y itd.). Postavljene hipoteze provjeravaju se pomoću odgovarajućih statističkih testova, pri čemu se odluka o prihvatanju ili neprihvatanju nulte/alternativne hipoteze donosi uz određenu pogrešku. Naime, cilj je svakog istraživanja doći do istinitog zaključka, odnosno onog koji odgovara objektivnoj stvarnosti. Međutim, to ponekad nije moguće postići jer se istraživanje provodi na temelju vrijednosti dobivenih iz slučajnog uzorka, odnosno dijela populacije. Stoga se u postupku odlučivanja mogu pojaviti dvije vrste pogrešaka:

- pogreška tipa I ili α – odbacimo nultu hipotezu, a ona je točna
- pogreška tipa II ili β – prihvatimo nultu hipotezu, a ona nije točna.

Tablica 2.9-1 pokazuje sve moguće ishode (zaključke) pri statističkom odlučivanju.

Tablica 2.9-1. Mogući ishodi pri statističkom odlučivanju

Statistička odluka	Stvarno stanje	
	H_0 je točna	H_0 nije točna
Odbacujemo H_0	Pogreška tipa I (α) $p = \alpha$	Točna odluka $p = 1 - \beta$
Prihvaćamo H_0	Točna odluka $p = 1 - \alpha$	Pogreška tipa II (β) $p = \beta$

Legenda:

α - vjerojatnost odbacivanja H_0 kada je ona točna (najčešće iznosi 0,05 i 0,01)

β - vjerojatnost prihvatanja H_0 kad ona nije točna

p - vjerojatnost

Testiranje postavljenih hipoteza temelji se na odgovarajućoj *teoretskoj distribuciji (sampling distribuciji)*. *T-testom* se utvrđuje *statistička značajnost razlike* aritmetičkih sredina dvaju uzoraka (*t-test za nezavisne uzorke*), *statistička značajnost razlike* aritmetičkih sredina jednog uzorka mjenenog u dvije vremenske točke (*t-test za zavisne*

uzorke) te statistička značajnost razlike aritmetičke sredine nekog uzorka u odnosu na neku unaprijed poznatu aritmetičku sredinu. Razlike između dviju aritmetičkih sredina moguće je utvrditi jednostavno njihovom usporedbom, ali uočena razlika ne mora biti i statistički značajna. Naime, pojam *statistički značajna razlika* dviju aritmetičkih sredina nije obična razlika između njih, već je to razlika veća od one koja se može dogoditi sasvim slučajno, kao posljedica slučajnoga odabira entiteta u uzorak. Dakle, statistički značajna razlika aritmetičkih sredina dvaju slučajno odabranih uzoraka predstavlja razliku koja je posljedica stvarnih razlika između populacija kojima uzorci pripadaju, a ne slučajnog variranja uzoraka. Statistički značajna razlika je veća od razlike koja se može dobiti slučajnim variranjem uzoraka. *T-test* upravo služi za utvrđivanje *statističke značajnosti razlike* aritmetičkih sredina zavisnih ili nezavisnih uzoraka.

2.9.1. t-test za nezavisne uzorke

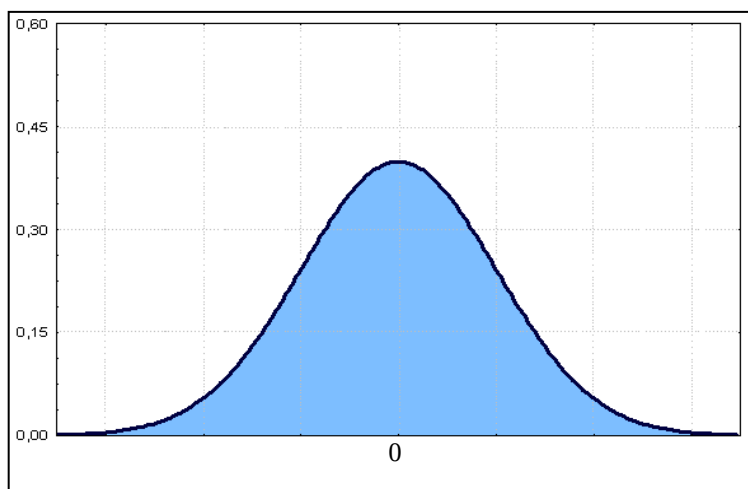
Za lakše razumijevanje *t-testa* pretpostavimo da iz jedne velike i *normalno* distribuirane populacije (npr. $N=10000$) slučajnim odabirom biramo uzorke veličine 5 entiteta ($n=5$). Nakon što odaberemo dva slučajna uzorka izračunamo, njihove aritmetičke sredine. Postavlja se pitanje: hoće li aritmetička sredina prvog uzorka biti jednaka aritmetičkoj sredini drugog uzorka? S obzirom da su entiteti slučajno odabrani u oba uzorka, može se pretpostaviti da aritmetičke sredine tih uzoraka mogu, ali i ne moraju biti jednake. Dakle, izračunamo li razliku između tih dviju aritmetičkih sredina, ona može, ali i ne mora biti jednaka nuli.

Ako nastavimo (npr. 10 000 puta) slučajno birati parove uzoraka iste veličine i računati razlike aritmetičkih sredina (R), dobit ćemo

$$\begin{array}{rcl} \overline{X_1} & - & \overline{X_1} = R_1 \\ \overline{X_2} & - & \overline{X_2} = R_2 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \overline{X_n} & - & \overline{X_n} = R_n \end{array}$$

varijablu razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine 5 entiteta. Postavlja se pitanje: kolika će biti aritmetička

sredina ove varijable i kakva će joj biti distribucija? Aritmetička sredina varijable razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka odgovarala bi *pravoj razlici*. Budući da su uzorci birani iz iste populacije, ta razlika je jednaka *nuli* jer slučajnim odabirom entiteta u uzorak isključujemo bilo kakvu mogućnost sistematske (namjerne) tendencije razlikovanja aritmetičkih sredina uzoraka. Slučajnim odabirom uzoraka osiguravamo da se aritmetičke sredine slučajno razlikuju. To znači da će, uz jednaku vjerojatnost, neke razlike biti pozitivnoga predznaka (aritmetička sredina prvog uzorka slučajno je veća od aritmetičke sredine drugog uzorka), a neke negativnoga predznaka (aritmetička sredina prvog uzorka slučajno je manja od aritmetičke sredine drugog uzorka). Prema tome, tendencija grupiranja razlika aritmetičkih sredina uzoraka bit će oko *nule* prema *normalnoj* distribuciji (slika 2.9-1).



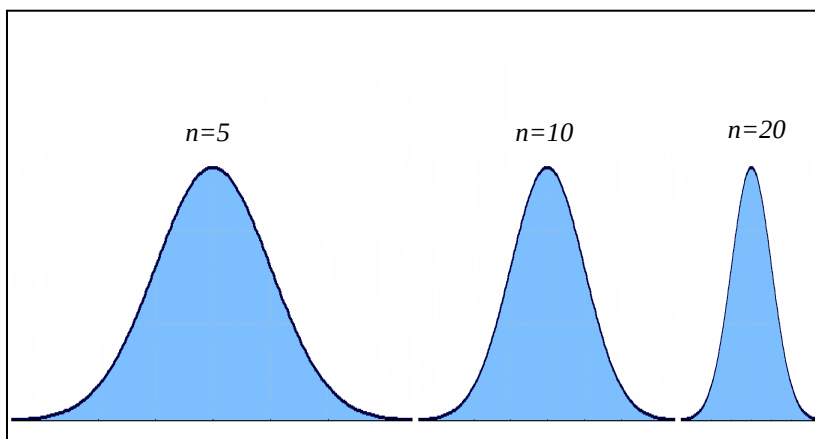
Slika 2.9-1. Distribucija razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka

Ako se nastavi s izborom slučajnih uzoraka, ali ne više veličine 5 entiteta, već 10 i računanjem razlika između njihovih aritmetičkih sredina, dobije se nova varijabla.

$$\begin{array}{rcl}
 \overline{{}_1X_1} & - & \overline{{}_2X_1} = R_1 \\
 \overline{{}_1X_2} & - & \overline{{}_2X_2} = R_2 \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 \overline{{}_1X_n} & - & \overline{{}_2X_n} = R_n
 \end{array}$$

Postavlja se pitanje je li se nešto promijenilo u odnosu na varijablu razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine 5 entiteta?

Nije teško zaključiti da povećanje veličine uzoraka smanjuje vjerojatnost razlika između njihovih aritmetičkih sredina. Prema tome, distribucija razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine 10 entiteta u odnosu na distribuciju razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine 5 entiteta bit će uža, odnosno, imat će manju *standardnu devijaciju* (slika 2.9-2).



Slika 2.9-2. Distribucija razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka veličine $n_1=5$, $n_2=10$, $n_3=20$

Dakle, valja zaključiti da će standardna devijacija varijable razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka biti to manja što su uzorci veći. Osim toga, logično je da će standardna devijacija razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka jednake veličine biti manja kod manje varijabilnih populacija nego populacije kod kojih istraživana pojava više varira. Međutim, kako na varijabilnost neke pojave u određenoj populaciji ne možemo utjecati, smanjenje standardne devijacije razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka može se postići jedino povećanjem uzorka. Standardna devijacija razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka naziva se *standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina* ($s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$).

Ako je poznata standardna devijacija razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka, odnosno *standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina*, onda se u intervalu:

- $\pm 3s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ nalazi približno 99% svih razlika između aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka, a u intervalu
- $\pm 2s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ nalazi se približno 95% (v. poglavlje 2.5.3.1, str. 104-106).

Iz toga slijedi da će svaka razlika između dviju aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka biti statistički značajna ako je, primjerice, 3 puta veća od *standardne pogreške razlika aritmetičkih sredina* ($s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$), zbog toga što je vjerojatnost slučajnog pojavljivanja tako velike razlike između aritmetičkih sredina vrlo mala, manja od 1%. Prema tome, da li će neka razlika između dviju aritmetičkih sredina biti statistički značajna, ovisi o tome koliko je puta veća od *standardne pogreške razlika aritmetičkih sredina* ($s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$).

Koliko je puta razlika aritmetičkih sredina dvaju slučajno odabranih uzoraka veća od standardne pogreške razlika aritmetičkih sredina izračuna se na sljedeći način

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}},$$

gdje je

- t vrijednost koja pokazuje koliko je puta razlika aritmetičkih sredina veća od standardne pogreške razlika aritmetičkih sredina
- $\bar{x}_1$ aritmetička sredina prvog uzorka
- $\bar{x}_2$ aritmetička sredina drugog uzorka
- $s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina.

Standardnu pogrešku razlika aritmetičkih sredina možemo izračunati formulom (matematički dokaz moguće je pronaći u knjizi I. Pavić: Statistička teorija i primjena, str. 244-245):

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)},$$

gdje je

- s_1^2 varijanca prvog uzorka
- s_2^2 varijanca drugog uzorka
- n_1 broj entiteta prvog uzorka
- n_2 broj entiteta drugog uzorka.

S obzirom da je varijanca populacije uglavnom nepoznata, standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina procjenjuje se na temelju procjene varijance populacije pomoću varijance uzorka pa se varijanca računa sa $n-1$ u nazivniku umjesto n .

Izračunata *t-vrijednost* ne raspodjeljuje se prema *normalnoj* distribuciji, već prema *t-distribuciji*. Stoga je potrebno, na temelju *t-distribucije*, za određenu sigurnost procjene, odnosno pogrešku p (u statističkom zaključivanju najčešće se koriste pogreške $p=0,01$ ili 1%, i $p=0,05$ ili 5%), i određeni broj stupnjeva slobode $df = (n_1-1)+(n_2-1)$, utvrditi *kritičnu t-vrijednost*.

Kritične t-vrijednosti za odgovarajući broj stupnjeva slobode (df) i odgovarajuću pogrešku p prikazane su u tablici B str. 315. S obzirom na to da *Studentova t-distribucija* teži k *normalnoj* (v. poglavlje 2.5.3.2, str. 107-108) kada broj stupnjeva slobode teži beskonačnom ($df \rightarrow \infty$), onda su i *t-vrijednosti* za velike uzorke ($n > 100$) vrlo slične vrijednostima normalne distribucije (1,96 za 95%, odnosno 2,58 za 99% sigurnosti procjene).

Ako je *t-vrijednost* veća od *kritične t-vrijednosti*, moguće je zaključiti, uz određenu pogrešku p , da je razlika između aritmetičkih sredina analiziranih uzoraka statistički značajna, odnosno da uzorci ne pripadaju istoj populaciji jer je vjerojatnost da se tako velika razlika dobije slučajno manja od p (najčešće $p=0,01$ ili 1%, odnosno $p=0,05$ ili 5 %). Dakle, odbacujemo *nultu* i prihvaćamo *alternativnu* hipotezu

$|t| >_{df,p} \Rightarrow H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ - Razlika između aritmetičkih sredina analiziranih uzoraka statistički je značajna uz pogrešku p .

Međutim, ako je *t-vrijednost* manja od *kritične t-vrijednosti*, nije moguće tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina analiziranih uzoraka statistički značajna, odnosno da uzorci ne pripadaju istoj populaciji jer se takva razlika može dobiti slučajno u više od 1% ili 5% slučajeva. Dakle, prihvaćamo *nultu* hipotezu

$|t| <_{df,p} \Rightarrow H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$ - Uz pogrešku p ne možemo tvrditi da je razlika između aritmetičkih sredina analiziranih uzoraka statistički značajna.

Standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina, izračunata navedenom formulom, pretpostavlja da oba uzorka potječu iz iste populacije. Stoga je potrebno provjeriti da li im se varijance statistički značajno razlikuju pomoću *F*-testa. *F*-vrijednost kojom se testira statistička značajnost razlika varijanci grupa izračuna se formulom

$$F = \frac{S_{veća}^2}{S_{manja}^2},$$

gdje se u brojnik uvijek uvrštava veća, a u nazivnik manja varijanca.

Izračunata *F*-vrijednost distribuira se prema *F*-distribuciji (v. poglavlje 2.5.3.3, str. 109), uz stupnjeve slobode za veću varijancu $df_1 = n_1 - 1$ i za manju varijancu $df_2 = n_2 - 1$. Kritična *F*-vrijednost do koje se smatra da razlika između varijanci nije statistički značajna očitava se za određeni broj stupnjeva slobode iz tablice *C* (str. 318-321) *F*-vrijednost se iz tablice očitava tako da se broj stupnjeva slobode brojnika (df_1) čita na gornjem rubu tablice (stupci), a broj stupnjeva slobode nazivnika (df_2) čita se na lijevom rubu tablice (reci). Na mjestu križanja stupca i retka očita se kritična *F*-vrijednost. Ako je izračunata *F*-vrijednost manja od tablične *F*-vrijednosti, zaključujemo da razlika između varijanci nije statistički značajna.

Ako se utvrdi statistička značajnost razlika varijanci uzoraka, odnosno odbaci hipoteza o homogenosti varijance, dobivena statistička značajnost varijanci analiziranih uzoraka ne mora neophodno stavljati u pitanje i ispravnost rezultata *t*-testa. Iako *t*-test polazi od pretpostavke da su varijance grupa homogene, mnoge studije (primjerice, Boneau, 1960)¹ su pokazale da *t*-test daje relativno točne rezultate i u slučajevima kada je prekršen uvjet o homogenosti varijanci, ali uz uvjet podjednagog broja entiteta u oba uzorka i sličnih distribucija. Stoga je u praksi potrebno planirati eksperimente u kojima će uzorci biti slične veličine čime će pogreške u računu *t*-testa zbog eventualno različitih varijanci uzoraka biti praktično zanemarive. Ako navedeni uvjet nije ispunjen, a varijance se statistički značajno razlikuju, tada je potrebno koristiti *Cochran-Coxovu metodu* (Cohran i Cox, 1950, prema Petz, 2002). Ovim postupkom standardna pogreška razlika procjenjuje se formulom

¹ Boneau, C.A. (1960). The effects of violations of assumptions underlying the t-test. Psychol. Bull., 57, 49-64.

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

te se izračuna *t-vrijednost*

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Kritična *t-vrijednost* određuje se prema formuli

$$t_p = \frac{s_{x_1}^2 t_1 + s_{x_2}^2 t_2}{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2},$$

gdje je

- t_p kritična *t-vrijednost* za pogrešku p
- $s_{x_1}^2$ standardna pogreška aritmetičke sredine prvog uzorka
- $s_{x_2}^2$ standardna pogreška aritmetičke sredine drugog uzorka
- t_1 tablična *t-vrijednost* uz broj stupnjeva slobode vezana za prvi uzorak ($df=n_1-1$) i pogrešku p
- t_2 tablična *t-vrijednost* uz broj stupnjeva slobode vezana za drugi uzorak ($df=n_2-1$) i pogrešku p .

Ako je izračunata apsolutna *t-vrijednost* veća od na taj način utvrđene kritične *t-vrijednosti*, zaključujemo da je razlika između aritmetičkih sredina statistički značajna uz pogrešku p .

Primjer: Slučajnim odabirom formirani su uzorci od 100 košarkaša i 100 odbojkaša. Osnovni statistički parametri ovih uzoraka u varijabli *skok uvis s mjesta* iznose:

$$\bar{x}_k = 62\text{cm}; s_k = 10\text{cm}$$

$$\bar{x}_o = 67\text{cm}; s_o = 12\text{cm}$$

Potrebno je utvrditi da li se košarkaši i odbojkaši statistički značajno razlikuju u varijabli *skok u vis s mjesta* uz pogrešku od 0,05.

Statističku značajnost razlike aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka košarkaša i odbojkaša u varijabli *skok uvis s mjesta* moguće je

utvrditi uz pomoć *t*-testa za nezavisne uzorke. Prije testiranja uobičajeno je postaviti hipoteze:

- H_0 (nulta hipoteza) – nema statistički značajne razlike između aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka košarkaša i odbojkaša, odnosno za uočenu razliku ne može se s pogreškom $p=0,05$ tvrditi da je statistički značajna. Formalno se ta hipoteza može napisati kao:

$$H_0 : \bar{x}_k = \bar{x}_o .$$

- H_1 (alternativna hipoteza) – postoji statistički značajna razlika između aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka košarkaša i odbojkaša, odnosno uočena razlika može se smatrati statistički značajnom uz pogrešku $p=0,05$. Formalno se ta hipoteza može napisati kao:

$$H_1 : \bar{x}_k \neq \bar{x}_o .$$

Zavisno od rezultata *t*-testa, bit će prihvaćena jedna od navedenih hipoteza.

Standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina iznosi

$$s_{\bar{x}_k - \bar{x}_o} = \sqrt{\frac{(n_k - 1)s_k^2 + (n_o - 1)s_o^2}{n_k + n_o - 2} \left(\frac{n_k + n_o}{n_k n_o} \right)} =$$

$$s_{\bar{x}_k - \bar{x}_o} = \sqrt{\frac{99 \cdot 10^2 + 99 \cdot 12^2}{198} \cdot \frac{200}{1000}} = \sqrt{2,44} = 1,56$$

S obzirom na to da se radi o velikim uzorcima ($n > 30$), standardnu pogrešku razlika aritmetičkih sredina moguće je procijeniti i pojednostavljenom formulom

$$s_{\bar{x}_k - \bar{x}_o} = \sqrt{\frac{s_k^2}{n_1} + \frac{s_o^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{10^2}{100} + \frac{12^2}{100}} = \sqrt{1 + 1,44} = \sqrt{2,44} = 1,56 .$$

t-vrijednost iznosi

$$t = \frac{\bar{x}_o - \bar{x}_k}{s_{\bar{x}_o - \bar{x}_k}} = \frac{67 - 62}{1,56} = \frac{5}{1,56} = 3,2$$

Kritična t-vrijednost (očita se iz tablice B str. 317 za pogrešku $p = 0,05$ i broj stupnjeva slobode $df = 100 - 1 + 100 - 1 = 198$) iznosi $_{198}t_{0,05} = 1,98$. Izračunata *t-vrijednost* ukazuje na to da je *razlika aritmetičkih sredina* ($\bar{x}_o - \bar{x}_k$) uzorka košarkaša i uzorka odbojkaša 3,2 puta veća od *standardne pogreške razlika aritmetičkih sredina* $s_{\bar{x}_o - \bar{x}_k}$. Vjerojatnost da se takva razlika dogodi slučajno je znatno manja od 5% (jer interval $\pm 1,98s_{\bar{x}_o - \bar{x}_k}$ uključuje 95% slučajnih razlika).

Dakle, s obzirom na to da je izračunata *t-vrijednost* veća od *kritične t-vrijednosti*, prihvaća se *alternativna* hipoteza, odnosno, zaključuje se da je razlika aritmetičkih sredina uzoraka košarkaša i odbojkaša statistički značajna uz pogrešku manju od 0,05.

2.9.2. t-test za zavisne uzorke

Statističku značajnost razlika aritmetičkih sredina jednog uzorka mjerenoga u dvije vremenske točke moguće je utvrditi *t-testom za zavisne uzorke*. Primjerice, ako želimo provjeriti učinkovitost nekog nastavnog ili trenažnog procesa, utjecaj nekog lijeka i sl., tada je potrebno neki reprezentativni uzorak entiteta izmjeriti prije (inicijalno stanje) i poslije (finalno stanje) primijenjenog tretmana te utvrditi da li su dobivene razlike među aritmetičkim sredinama promatrane varijable prvog (prije, inicijalno) i drugog (poslije, finalno) mjerenja statistički značajne.

Statistička značajnost razlika aritmetičkih sredina dvaju zavisnih uzoraka testira se pomoću *t-vrijednosti*

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}.$$

Zbog korelacije između rezultata prvoga i drugog mjerenja, *standardna pogreška razlika* ($s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$) izračuna se formulom

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2}{n(n-1)}},$$

gdje je

- $d_i = {}_1x_i - {}_2x_i$ razlika između rezultata ispitanika i u 1. i 2. mjeranju ($i=1...n$)
- n broj ispitanika u uzorku.

Ako se radi o velikim uzorcima ($n > 30$), *standardnu pogrešku razlika* moguće je procijeniti formulom

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{s_{\bar{x}_1}^2 + s_{\bar{x}_2}^2 - 2 \cdot r \cdot s_{\bar{x}_1} \cdot s_{\bar{x}_2}},$$

gdje je

- $s_{\bar{x}_1}$ standardna pogreška aritmetičke sredine prvog mjerenja
- $s_{\bar{x}_2}$ standardna pogreška aritmetičke sredine drugog mjerenja
- r korelacija između varijabli prvog i drugog mjerenja (v. poglavlje 2.11, str. 160-179).

Izračunata *t-vrijednost* (kao i kod *t-testa za nezavisne uzorke*) uspoređuje se s *kritičnom t-vrijednošću* koja se očitava iz tablice B str. 317 uz određenu pogrešku p i broj stupnjeva slobode $df=n-1$. Ako je izračunata *t-vrijednost* veća od *kritične t-vrijednosti*, zaključuje se, uz određenu pogrešku p , da je razlika između aritmetičkih sredina prvog i drugog mjerenja statistički značajna, odnosno da je došlo do statistički značajne promjene u promatranoj varijabli između prvoga i drugog mjerenja.

Primjer: Uzorak od 120 učenika testiran je *Seargentovim testom* prije i poslije tromjesečnog trenažnog procesa provedenoga s ciljem da se poboljša eksplozivna snaga. Dobiveni su sljedeći rezultati:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 45 & \bar{x}_2 &= 49 \\ s_1 &= 10 & s_2 &= 8 \\ r &= 0,75 \end{aligned}$$

Da li su promjene u eksplozivnoj snazi učenika između prvog i drugog mjerenja statistički značajne uz pogrešku od 0,05?

Statističku značajnost razlika aritmetičkih sredina prvoga i drugog mjerenja moguće je utvrditi pomoću *t-testa za zavisne uzorke*. Prije testiranja uobičajeno je postaviti hipoteze:

- $H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2$ - razlika između aritmetičkih sredina prvoga i drugog mjerenja nije statistički značajna uz pogrešku 0,05.
- $H_1 : \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ - razlika između aritmetičkih sredina prvoga i drugog mjerenja statistički je značajna uz pogrešku 0,05.

Zavisno od rezultata *t-testa* bit će prihvaćena jedna od navedenih hipoteza. Dobivene vrijednosti potrebno je uvrstiti u formulu za izračunavanje *standardne pogreške aritmetičkih sredina prvog*

$$s_{x_1} = \frac{10}{\sqrt{120}} = \frac{10}{10,95} = 0,91$$

i drugog mjerenja

$$s_{x_2} = \frac{8}{\sqrt{120}} = \frac{8}{10,95} = 0,73,$$

pomoću kojih se izračunava *standardna pogreška razlika*

$$\begin{aligned} s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} &= \sqrt{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2 - 2 \cdot r \cdot s_{x_1} \cdot s_{x_2}} = \\ &= \sqrt{0,91^2 + 0,73^2 - 2 \cdot 0,75 \cdot 0,91 \cdot 0,73} = 0,6. \end{aligned}$$

Potom se izračuna *t-vrijednost*

$$t = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{49 - 45}{0,6} = \frac{4}{0,6} = 6,6$$

i usporedi se s *kritičnom t-vrijednošću* (koja se očitava iz tablice B str. 317 za pogrešku $p=0,05$ i broj stupnjeva slobode $df=120-1=119$) koja iznosi $_{119}t_{0,05}=1,98$. Izračunata *t-vrijednost* pokazuje da je razlika aritmetičkih sredina prvoga i drugog mjerenja statistički značajna jer je vjerojatnost da se takva razlika dogodi slučajno manja od 0,05 (5%).

Primjer: Uzorak od 12 učenika testiran je prije i poslije dvomjesečnog trenažnog procesa provedenog radi poboljšanja repetitivne snage trupa. Dobiveni su sljedeći rezultati:

	1.mjerenje	2.mjerenje
<i>Učenik</i>	$1x_i$	$2x_i$
A	52	53
B	35	40
C	43	44
D	29	33
E	37	41
F	39	41
G	51	52
H	43	42
I	27	30
J	29	28
K	46	49
L	48	48

Hipoteze:

- $H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2$ - razlika između aritmetičkih sredina prvoga i drugog mjerenja nije statistički značajna uz pogrešku 0,01.
- $H_1 : \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ - razlika između aritmetičkih sredina prvoga i drugog mjerenja statistički je značajna uz pogrešku 0,01.

S obzirom na to da se radi o malom uzorku, potrebno je koristiti izvornu formulu za računanje standardne pogreške razlika. Postupak izračunavanja *t-vrijednosti* provodi se u nekoliko koraka. U prvom koraku izračunaju se razlike između rezultata ispitanika prvog i drugog mjerenja (tablica - stupac 3), a u drugom koraku izračunate se razlike kvadriraju (tablica - stupac 4).

	1	2	3	4
<i>Učenik</i>	$1x_i$	$2x_i$	$d_i = 1x_i - 2x_i$	d_i^2
A	52	53	-1	1
B	35	40	-5	25
C	43	44	-1	1
D	29	33	-4	16
E	37	41	-4	16
F	39	41	-2	4
G	51	52	-1	1
H	43	42	1	1
I	27	30	-3	9
J	29	28	1	1
K	46	49	-3	9
L	48	48	0	0
Zbroj	479	501	-22	84

U trećem koraku izračunaju se sume svih stupaca koje se uvrste u formule za računanje aritmetičkih sredina

$$\bar{x}_1 = \frac{479}{12} = 39,92 ; \bar{x}_2 = \frac{501}{12} = 41,75$$

te u formulu za računanje standardne pogreške razlika

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{84 - 40,33}{132}} = \sqrt{\frac{43,67}{132}} = \sqrt{0,33} = 0,57.$$

U posljednjem koraku izračuna se *t-vrijednost*

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{39,92 - 41,75}{0,57} = -3,19$$

i usporedi s *kritičnom t-vrijednošću* (koja se očitava iz tablice B str. 317 za pogrešku $p=0,01$ i broj stupnjeva slobode $df=12-1=11$) koja iznosi 3,106. Izračunata *t-vrijednost* ukazuje na to da je razlika aritmetičkih sredina prvoga i drugog mjerenja statistički značajna jer je vjerojatnost da se takva razlika dogodi slučajno manja od 1%. Stoga prihvaćamo hipotezu H_1 .

Napomena:

Dodatne informacije vezane uz gradivo izneseno u poglavljima 2.8 i 2.9, mogu se pronaći u knjizi B. Petz: Osnovne statističke metode za nematematičare, poglavlje 9: Razlika između dvije aritmetičke sredine.

2.10

Univarijatna analiza varijance

Univarijatna analiza varijance koristi se za utvrđivanje statističke značajnosti razlika između aritmetičkih sredina dviju ili više grupa u određenoj varijabli.

Analizu varijance, koja se skraćeno naziva ANOVA (od engl. **Analysis of Variance**),

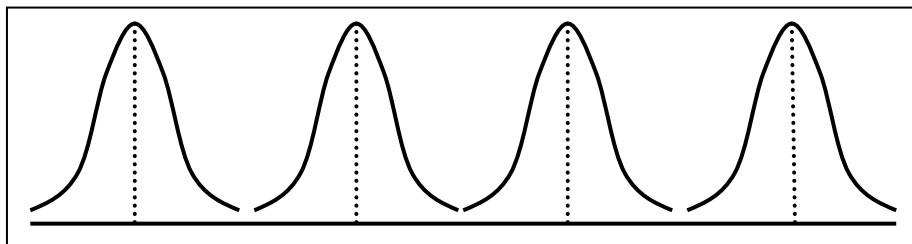
razvio je Ronald Fisher u prvoj polovini dvadesetog stoljeća. Osnovna logika univarijatne analize varijance temelji se na omjeru varijabiliteta *između grupa* (engl. *between groups*) i varijabiliteta *unutar grupa* (engl. *within groups*). Ako je varijabilitet između grupa statistički značajno veći nego varijabilitet unutar grupa, onda se grupe međusobno statistički značajno razlikuju, odnosno, ne pripadaju istoj populaciji. Dakle, da bismo utvrdili jeli razlika između aritmetičkih sredina grupa statistički značajna, varijabilitet između grupa mora biti veći od varijabiliteta unutar grupa (slika 2.10-1).



Ronald A. Fisher (1890. - 1962.) diplomirao je astronomiju na Sveučilištu Cambridge 1912. godine. Njegov interes za teoriju pogrešaka u astronomskim promatranjima doveo ga je do istraživanja statističkih problema. Po završetku studija do 1919. godine radio je kao učitelj matematike, nakon čega prelazi na poljoprivredni institut *Rothamsted Agricultural Experiment Station*. Od tada počinje njegov plodotvoran

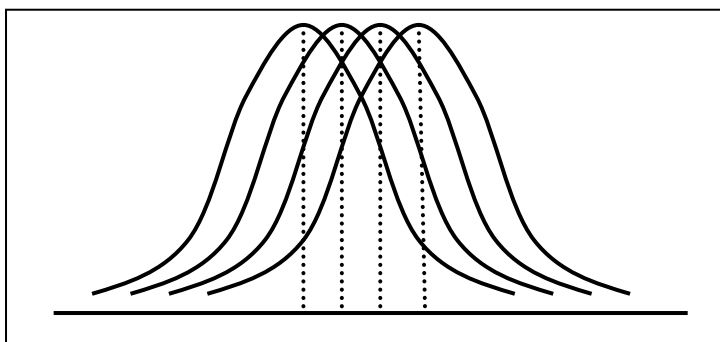
znanstveni rad na razvoju eksperimentalnih nacrti, statističkih metoda i genetike. Dao je velik doprinos razvoju statističke metodologije, od čega najznačajniji oblikovanje analize varijance. Objavio je puno znanstvenih članaka i knjiga, od kojih su najpoznatije *The design of experiments* (1935.) i *Statistical methods and scientific inference* (1956.). Smatra se jednim od osnivača moderne statistike.

Prema, Kolesarić i Petz, 1999; O'Connor i Robertson:
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/Mathematicians/Fisher.html>



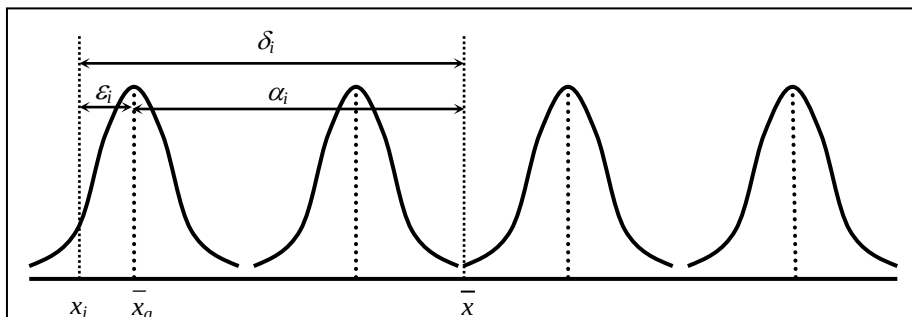
Slika 2.10-1. Varijabilitet između grupa veći od varijabiliteta unutar grupa

Ako je varijabilitet između grupa manji od varijabiliteta unutar grupa (slika 2.10-2), onda se aritmetičke sredine grupa ne razlikuju statistički značajno.



Slika 2.10-2. Varijabilitet između grupa manji od varijabiliteta unutar grupa

Ako se pogleda položaj bilo kojeg rezultata ispitanika (x_i) u skupu svih rezultata (slika 2.10-3), može se uočiti da se odstupanje njegovog rezultata od zajedničke aritmetičke sredine $\bar{x}$ ($\delta_i = x_i - \bar{x}$) može podijeliti na odstupanje od aritmetičke sredine grupe kojoj pripada $\bar{x}_g$ ($\varepsilon_i = x_i - \bar{x}_g$) i na odstupanje aritmetičke sredine grupe kojoj pripada taj rezultat $\bar{x}_g$ od zajedničke aritmetičke sredine $\bar{x}$ ($\alpha_i = \bar{x}_g - \bar{x}$).



Slika 2.10-3: Odstupanje rezultata ispitanika x_i od zajedničke aritmetičke sredine $\bar{x}$ (δ_i), odstupanje od aritmetičke sredine svoje grupe $\bar{x}_g$ (ε_i), odstupanje aritmetičke sredine grupe $\bar{x}_g$ od zajedničke aritmetičke sredine $\bar{x}$ (α_i)

Odstupanje rezultata ispitanika x_i od zajedničke aritmetičke sredine svih grupa $\bar{x}_t$

$$\delta_i = x_i - \bar{x}$$

sastoji se od odstupanja rezultata ispitanika x_i od aritmetičke sredine grupe $\bar{x}_g$ kojoj pripada

$$\varepsilon_i = x_i - \bar{x}_g$$

i od odstupanja aritmetičke sredine grupe $\bar{x}_g$ od zajedničke aritmetičke sredine $\bar{x}_t$

$$\alpha_i = \bar{x}_g - \bar{x}.$$

Dakle,

$$\delta_i = \alpha_i + \varepsilon_i$$

ako se odstupanja rezultata ispitanika od zajedničke aritmetičke sredine kvadriraju i zbroje, dobije se *zajednička suma kvadrata*

$$SS_{tot} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

ili

$$SS_{tot} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - (n \cdot \bar{x}^2)$$

Suma kvadrata između grupa predstavlja sumu kvadrata odstupanja aritmetičkih sredina grupa od zajedničke aritmetičke sredine

$$SS_{ig} = \sum_{g=1}^k n_g (\bar{x}_g - \bar{x})^2$$

ili

$$SS_{ig} = \sum_{g=1}^k (n_g \cdot \bar{x}_g^2) - (n \cdot \bar{x}^2).$$

Suma kvadrata unutar grupa predstavlja sumu kvadratnih odstupanja rezultata entiteta od aritmetičkih sredina grupa kojima pripadaju

$$SS_{ug} = \sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (x_{gi} - \bar{x}_g)^2,$$

gdje je k broj grupa, a n_g broj ispitanika u pojedinoj grupi.

Zajednička suma kvadrata SS_{tot} sastoji od sume kvadrata unutar grupa SS_{ug} i sume kvadrata između grupa SS_{ig} .

Dokaz: Rezultat ispitanika i jednak je $x_{ig} = \bar{x} + (\bar{x}_g - \bar{x}) + (x_{ig} - \bar{x}_g)$, gdje je $\bar{x}$ zajednička aritmetička sredina, a $\bar{x}_g$ aritmetička sredina grupe kojoj pripada ispitanik i . Pa je $(x_{ig} - \bar{x}) = (\bar{x}_g - \bar{x}) + (x_{ig} - \bar{x}_g)$, dakle razlika između rezultata svakog ispitanika i zajedničke aritmetičke sredine može se prikazati kao zbroj razlika između: aritmetičke sredine kojoj ispitanik pripada i zajedničke aritmetičke sredine te rezultata ispitanika i pripadajuće aritmetičke sredine. Ako taj izraz za svakog ispitanika kvadriramo i zbrojimo, dobijemo

$$\sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (x_{ig} - \bar{x})^2 = \sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} [(\bar{x}_g - \bar{x}) + (x_{ig} - \bar{x}_g)]^2 =$$

$$= \sum_{g=1}^k n_g (\bar{x}_g - \bar{x})^2 + 2 \sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (\bar{x}_g - \bar{x})(x_{ig} - \bar{x}_g) + \sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (x_{ig} - \bar{x}_g)^2 =$$

$$= \sum_{g=1}^k n_g (\bar{x}_g - \bar{x})^2 + \sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (x_{ig} - \bar{x}_g)^2, \text{ budući da je}$$

$$2 \sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (\bar{x}_g - \bar{x})(x_{ig} - \bar{x}_g) = 0 \text{ jer je zbroj odstupanja od aritmetičke sredine jednak nuli. Time je dokazano da je}$$

$$SS_{tot} = SS_{ig} + SS_{ug}$$

Da bi se izračunale varijance iz navedenih suma kvadrata, potrebno je svaku sumu kvadrata podijeliti odgovarajućim brojem stupnjeva slobode df .

$$df_{tot} = n - 1$$

$$df_{ug} = n - k$$

$$df_{ig} = k - 1,$$

gdje je n broj entiteta, a k broj grupa.

Zajednička (totalna) varijanca izračuna se

$$\sigma_{tot}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_t)^2}{n - 1},$$

a varijanca unutar grupa

$$\sigma_{ug}^2 = \frac{\sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (x_{gi} - \bar{x}_g)^2}{n - k}$$

te varijanca između grupa

$$\sigma_{ig}^2 = \frac{\sum_{g=1}^k n_g (\bar{x}_g - \bar{x}_t)^2}{k - 1}.$$

Statističku značajnost razlika aritmetičkih sredina grupa ispitanika moguće je utvrditi preko *F-vrijednosti*

$$F = \frac{\sigma_{ig}^2}{\sigma_{ug}^2}.$$

Izračunata *F-vrijednost* predstavlja omjer varijance između grupa (σ_{ig}^2) i varijance unutar grupa (σ_{ug}^2) te ima *F-distribuciju* (vidi tablicu C str. 318-321). *F-distribucija* je pozitivno asimetrična, a *F-vrijednosti* ne mogu biti manje od nule (v. poglavlje 2.5.3.3, str. 109). Ako je *F-vrijednost* manja od 1, odnosno ako je varijanca unutar grupa veća od varijance između grupa, to odmah pokazuje da nema statistički značajne razlike između grupa. Ako je *F-vrijednost* veća od 1, statistička značajnost razlike aritmetičkih sredina grupa ovisit će o broju stupnjeva slobode. Kritična vrijednost do koje se smatra da neka razlika nije statistički značajna očitava se za određeni broj stupnjeva slobode iz tablici C na str. 318-321. *F-vrijednost* iz tablice očitava se tako da se broj stupnjeva slobode brojnika (df_{ig}) čita se na gornjem rubu tablice (stupci), a broj stupnjeva slobode nazivnika (df_{ug}) čita na lijevom rubu tablice (reci). Na mjestu križanja stupca i retka očitava se kritična *F-vrijednost*. Ako je izračunata *F-vrijednost* veća od tablične *F-vrijednosti*, zaključujemo da razlika između aritmetičkih sredina grupa nije slučajna, nego da se aritmetičke sredine grupa statistički značajno razlikuju, tj. da grupe ne pripadaju istoj populaciji.

Treba napomenuti da je i *analiza varijance* (kao i *t - test*) izvedena na pretpostavci da su uzorci slučajno birani iz normalno distribuirane populacije te da su im time i varijance približno jednake. Međutim, ako navedene pretpostavke nisu ispunjene, rezultati *analize varijance* mogu još uvijek biti relativno točni, ali uz uvjet podjednagog broja entiteta u uzorcima i sličnih distribucija. To je u svom istraživanju

dokazao Boneau (1960). Stoga je u praksi potrebno planirati eksperimente u kojima će uzorci biti slične veličine kako bi pogreške u računu *analize varijance* i *t - testa* bile što manje.

Primjer: Četiri slučajno odabrana uzorka od 6 entiteta izmjerena su jednim testom motorike. Dobiveni su sljedeći rezultati (tablica 2.10-1). Potrebno je utvrditi pripadaju li grupe istoj populaciji uz pogrešku 0,05.

Tablica 2.10-1. Rezultati četiriju grupa ispitanika izmjerenih jednim testom motorike

x_1	x_2	x_3	x_4
3	6	1	3
2	3	2	2
4	2	2	2
5	4	3	1
2	5	2	4
4	3	1	5

Statističku značajnost razlika aritmetičkih sredina četiriju promatranih grupa ispitanika moguće je utvrditi *univarijatnom analizom varijance*.

Zavisno od rezultata *univarijatne analize varijance*, bit će prihvaćena jedna od navedenih hipoteza:

- $H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \bar{x}_4$ - razlike između aritmetičkih sredina promatranih grupa nisu statistički značajne.
- $H_1 : \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \neq \bar{x}_3 \neq \bar{x}_4$ - razlike između aritmetičkih sredina promatranih grupa statistički su značajne.

F-vrijednost, pomoću koje će se testirati navedene hipoteze, izračunava se u nekoliko koraka:

U prvom se koraku kvadriraju rezultati svih ispitanika, kao što je prikazano u tablici 2.10-2.

Tablica 2.10-2. Kvadrirani rezultati četiriju grupa ispitanika izmjerenih jednim testom motorike

x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_4^2
9	36	1	9
4	9	4	4
16	4	4	4
25	16	9	1
4	25	4	16
16	9	1	25

Potom se izračunaju sume rezultata i sume kvadrata rezultata za svaku grupu i za sve grupe zajedno

$$\Sigma x_1 = 20; \Sigma x_2 = 23; \Sigma x_3 = 11; \Sigma x_4 = 17; \Sigma x_{tot} = 71$$

$$\Sigma x_1^2 = 74; \Sigma x_2^2 = 99; \Sigma x_3^2 = 23; \Sigma x_4^2 = 59; \Sigma x_{tot}^2 = 255$$

U drugom se koraku izračunaju aritmetičke sredine grupa i zajednička aritmetička sredina

$$\bar{x}_1 = \frac{20}{6} = 3,33; \quad \bar{x}_2 = \frac{23}{6} = 3,83; \quad \bar{x}_3 = \frac{11}{6} = 1,83; \quad \bar{x}_4 = \frac{17}{6} = 2,83;$$

$$\bar{x}_{tot} = \frac{71}{24} = 2,96$$

U trećem se koraku izračunaju:

- ukupna suma kvadrata

$$SS_{tot} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - (n \cdot \bar{x}_t^2) = 255 - (24 \cdot 2,96^2) = 44,72$$

- suma kvadrata između grupa

$$SS_{ig} = \sum_{g=1}^k (n_g \cdot \bar{x}_g^2) - (n \cdot \bar{x}_t^2) = (222,68 - 210,28) = 12,40$$

- suma kvadrata unutar grupa

$$SS_{ug} = SS_{tot} - SS_{ig} = 44,72 - 12,40 = 32,32$$

U četvrtom se koraku izračunaju:

- varijanca između grupa $\sigma_{ig}^2 = \frac{SS_{ig}}{k-1} = \frac{12,40}{3} = 4,13$

- varijanca unutar grupa $\sigma_{ug}^2 = \frac{SS_{ug}}{n-k} = \frac{32,32}{20} = 1,62$

U petom se koraku izračuna F -vrijednost, $F = \frac{\sigma_{ig}^2}{\sigma_{ug}^2} = \frac{4,13}{1,62} = 2,55$

Radi bolje preglednosti, rezultati analize varijance uobičajeno se prikazuju kao u tablici 2.10-3.

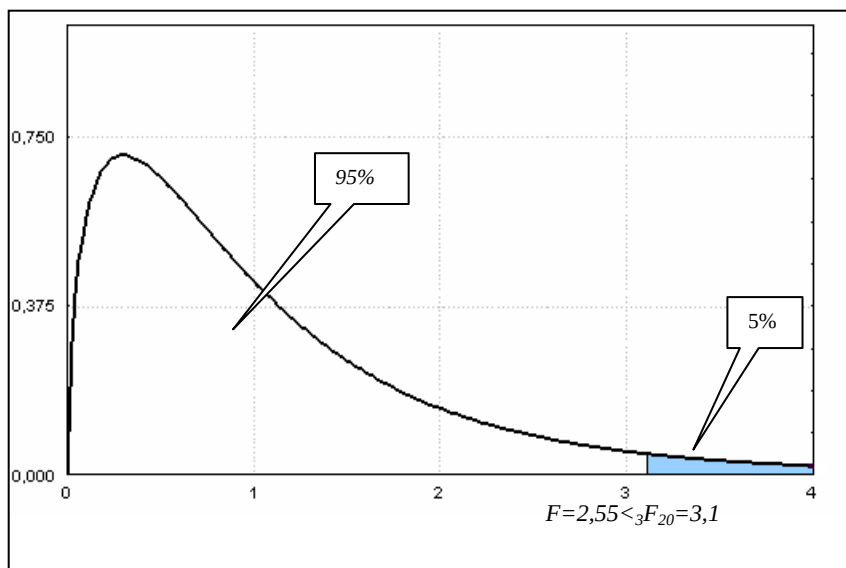
2.10-3. Uobičajen prikaz rezultata analize varijance

	SS	df	σ^2	F
Između grupa	12,40	3	4,13	2,55
Unutar grupa	32,32	20	1,62	
Total	44,72	23		

U šestom koraku se odredi granična F -vrijednost iz tablice C (str. 318-321) za broj stupnjeva slobode $df_{ig} = 3$ (stupci) i $df_{ug} = 20$ (reci) i pogrešku $p = 0,05$.

$${}_3F_{20} = 3,1$$

U sedmom se koraku uspoređi izračunata F -vrijednost s graničnom vrijednošću (slika 2.10-4).



Slika 2.10-4. F – distribucija sa stupnjevima slobode $df_1 = 3$ i $df_2 = 20$

S obzirom na to da je izračunata F -vrijednost manja od granične vrijednosti, prihvaćamo H_0 i zaključujemo da nema statistički značajne razlike između aritmetičkih sredina grupa, odnosno ne možemo uz zadanu pogrešku tvrditi da grupe pripadaju različitim populacijama.

Statističku značajnost razlike između aritmetičkih sredina dviju grupa moguće je utvrditi t -testom i univarijatnom analizom varijance. Naime, ako utvrđujemo statističku značajnost razlike između aritmetičkih sredina dviju grupa, tada je F -vrijednost ekvivalentna t -vrijednosti, odnosno $F = t^2$.

Ako smo analizom varijance utvrdili da četiri analizirane grupe ne pripadaju istoj populaciji, postavlja se pitanje koje se od njih međusobno statistički značajno razlikuju. Za odgovor na to pitanje morali bismo međusobno uspoređivati sve parove uzoraka (npr. t -testom). To su:

1. prvi i drugi
2. prvi i treći
3. prvi i četvrti
4. drugi i treći
5. drugi i četvrti
6. treći i četvrti.

Ukupan broj svih mogućih usporedaba za k uzoraka dobije se formulom

$$c = \frac{k \cdot (k - 1)}{2}.$$

Tako, primjerice, za 8 uzoraka imamo 28 parova koje međusobno uspoređujemo, pa vjerojatnost dobivanja statistički značajne razlike, kad ona stvarno ne postoji, nije više, primjerice, 0,01 ili 0,05 nego je znatno viša. Uspoređujući 28 parova uzoraka, vjerojatno ćemo dobiti da se barem jedan par uzoraka statistički značajno razlikuje, iako ti uzorci pripadaju istoj populaciji, jer pri pogrešci od 0,05, jedna će od dvadeset razlika biti statistički značajna iako u stvari nije. Stoga je potrebno smanjit vjerojatnost pogreške koja nastaje zbog većeg broja međusobnih usporedaba. Jednostavno rješenje ovog problema ponudio je Bonferroni (1936). On predlaže da se pogreška statističkog

zaključka (p) podijeli brojem mogućih usporedaba (c). Dakle, korigirana pogreška izračuna se formulom

$$p' = \frac{p}{c}.$$

Primjerice, ako uspoređujemo 5 uzoraka uz pogrešku 0,01, broj mogućih usporedaba parova uzoraka je 10 ($c=5 \cdot 4 / 2 = 10$), pa korigirana pogreška statističkog zaključka nije više 0,01 već

$$p' = \frac{p}{c} = \frac{0.01}{10} = 0,001.$$

Osim ovog vrlo jednostavnog postupka, postoji više složenijih koje su predložili različiti autori (Tukey, Scheffe, Duncan i dr.), a koji su implementirani u većinu poznatijih računalnih programa za statističku obranu podataka (npr. *STATISTICA*, *SPSS*).

2.11

Korelacija

Promatranjem odnosa između različitih društvenih i prirodnih pojava, moguće je uočiti postojanje stanovite povezanosti. Tako, primjerice, možemo uočiti da postoji povezanost između: tjelesne visine i tjelesne mase, školskog uspjeha i razine intelektualnih sposobnosti, godina starosti i krvnog tlaka, aerobnoga kapaciteta i brzine oporavka, maksimalne snage i uspješnosti u bacanju kugle itd.

Ako izmjerimo neku skupinu ispitanika u *skoku udalj s mjesta i trčanju na 100 metara*, postavlja se pitanje: postoji li povezanost između tih varijabli?

Ako između njih postoji povezanost, a to znači da na temelju rezultata u jednoj varijabli možemo predviđati rezultate u drugoj varijabli, postavljaju se još dva pitanja:

- je li povezanost pozitivna ili negativna, odnosno, da li povećanje rezultata u jednoj varijabli prati povećanje rezultata u drugoj varijabli (pozitivna) ili smanjenje rezultata (negativna)?
- je li povezanost mala ili velika, odnosno, kolika je?

Odgovore na ta pitanja moguće je dobiti korelacijskom analizom.

Korelacijska analiza pokazuje koliko rezultati u jednoj varijabli objašnjavaju rezultate u drugoj varijabli, odnosno, koliko rezultati dviju varijabli sukladno variraju.

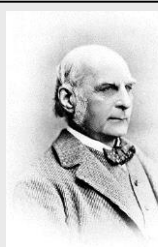
U ovom poglavlju razmotrit će se utvrđivanje odnosa dviju varijabli, premda se može utvrđivati i međusobna povezanost više varijabli (multipla ili višestruka korelacija). Potrebno je naglasiti da se korelacijska analiza provodi na zavisnim uzorcima, odnosno, na istim ispitanicima mjerenima dva ili više puta istim ili različitim mjernim instrumentima.

Začetnikom korelacijske i regresijske analize smatra se engleski antropolog *Francis Galton* koji je istraživao utjecaj naslijeđa na razvoj čovjekovih karakteristika. Surađujući s Galtonom, veliki doprinos razvoju statističkih metoda i njihovoj primjeni u analizi bioloških problema dao je *Karl Pearson*. Pearson je razvio brojne statističke postupake, među kojima i *produkt-moment koeficijent korelacije* (r)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (z_{x_i} z_{y_i})}{n},$$

gdje je

- z_{x_i} standardizirani rezultat ispitanika i u varijabli x
- z_{y_i} standardizirani rezultat ispitanika i u varijabli y



Francis Galton (1822. - 1911.) engleski antropolog (studirao medicinu i matematiku), rođak znamenitog Charlesa Darwina, među prvima je počeo znanstveno istraživati inteligenciju čovjeka. Godine 1884. osnovao je *Antropometrijski laboratorij* za istraživanje individualnih razlika u antropološkim karakteristikama. U svojim je istraživanjima za analizu prikupljenih podataka prvi koristio matematičke metode, čime je dao značajan doprinos razvoju statistike. Dokazivao je da se

prirodne sposobnosti raspodjeljuju prema normalnoj distribuciji. Prvi je uveo pojam korelacije u radu *Co-relations and their measurement, chiefly from anthropometric data*, objavljenom 1888. godine. Surađivao je s Karlom Pearsonom i pomogao je u osnivanju prvog statističkog časopisa *Biometrika*.

Prema, Kolesarić i Petz, 1999.; <http://www.mugu.com/galton/>

December 20, 1888.

Professor G. G. STOKES, D.C.L., President, in the Chair.

The Presents received were laid on the table, and thanks ordered for them.

The following Papers were read:—

I. "Co-relations and their Measurement, chiefly from Anthropometric Data." By FRANCIS GALTON, F.R.S. Received December 5, 1888.

"Co-relation or correlation of structure" is a phrase much used in biology, and not least in that branch of it which refers to heredity, and the idea is even more frequently present than the phrase; but I am not aware of any previous attempt to define it clearly, to trace its mode of action in detail, or to show how to measure its degree.

Two variable organs are said to be co-related when the variation of the one is accompanied on the average by more or less variation of the other, and in the same direction. Thus the length of the arm is said to be co-related with that of the leg, because a person with a long arm has usually a long leg, and conversely. If the co-relation be close, then a person with a very long arm would usually have a very long leg; if it be moderately close, then the length of his leg would usually be only long, not very long; and if there were no co-relation at all then the length of his leg would on the average be mediocre. It is easy to see that co-relation must be the consequence of the variations of the two organs being partly due to common causes. If they were wholly due to common causes, the co-relation would be perfect, as is approximately the case with the symmetrically disposed parts of the body. If they were in no respect due to common causes, the co-relation would be nil. Between these two extremes are an endless number of intermediate cases, and it will be shown how the

Pearsonov koeficijent korelacije (r) može se izračunati na različite načine. Jedan od njih je pomoću formule

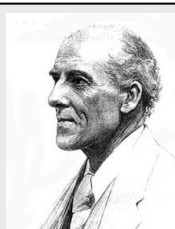
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n d_{xi} d_{yi}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n d_{xi}^2 \sum_{i=1}^n d_{yi}^2}},$$

gdje je

- $d_x = x_i - \bar{x}$ centrirani rezultat entiteta i u varijabli x
- $d_y = y_i - \bar{y}$ centrirani rezultat entiteta i u varijabli y

Koeficijent korelacije je moguće izračunati iz originalnih rezultata (intaktni realni oblik) formulom:

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \left(n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right)}}$$



Karl Pearson (1857. – 1936.) diplomirao je na Sveučilištu Cambridge 1879. godine, nakon čega je proveo karijeru na *University College* u Londonu, gdje je bio profesor od 1911. do 1933. g. Suradujući s Galtonom, razvija matematičko - statističke metode za analizu bioloških problema. Od 1893. do 1912. g. napisao je niz radova pod naslovom *Mathematical Contribution to the Theory of Evolution*, čime je dao izniman doprinos razvoju statističkih

metoda (korelacijske i regresijske analize, χ^2 - test...). Uveo je pojam standardna devijacija. Zajedno s Weldonom i Galtonom osnivač je prvog statističkog časopisa *Biometrika*. Jedan je od najznačajnijih statističara.

Prema, Kolesarić i Petz, 1999; http://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Pearson

VII. *Mathematical Contributions to the Theory of Evolution.—III. Regression, Heredity, and Panmixia.*

By KARL PEARSON, *University College, London.*

Communicated by Professor HENRICI, F.R.S.

Received September 29.—Read November 28, 1895.
Revised November 29, 1895.

CONTENTS.		PAGE.
Introductory		254
Definitions—		
(a.) Variation		256
(b.) Correlation		256
(c.) Natural Selection		257
(d.) Sexual Selection		257
(e.) Reproductive Selection		258
(f.) Heredity		259
(g.) Regression		259
(h.) Panmixia		260
General Theory of Correlation with special Reference to the Problem of Heredity—		
(a.) Historical		261
(b.) Theory of Correlation		261
Special Case of Two Correlated Organs—		
(a.) Theory		264
(b.) Best Value of Correlation-Coefficient		264
(c.) Probable Error of Correlation-Coefficient		265
(d.) Constancy of Correlation in Local Races		266
Regression, Uniparental Inheritance, and Assortative Mating—		
(a.) General Formulae		268
(b.) Special Case of Stature in Man		269
Tables L-V.		270
Conclusions :—		
(i.) Natural Selection		272
(ii.) Sexual Selection		273
(iii.) Reproductive Selection		273
(iv.) Inheritance—Paternal Prepotency		275
(a.) Further Relations between Correlation and Variability—		
(i.) The Coefficient of Variation		276
(ii.) Coefficient of Correlation in terms of Coefficients of Variation		276

gdje je

- x_i rezultat entiteta i u varijabli x
- y_i rezultat entiteta i u varijabli y
- n broj entiteta.

Koeficijent korelacije (r) kreće se u intervalu od -1 do $+1$. Ako je:

- $r = 0$ – nema korelacije između dviju varijabli
- $r = +1$ – potpuna pozitivna korelacija
- $r = -1$ – potpuna negativna korelacija
- $0 < r < +1$ – nepotpuna pozitivna korelacija
- $0 > r > -1$ – nepotpuna negativna korelacija

Izvod : Pearsonov koeficijent korelacije iz standardiziranih rezultata izračuna se

formulom $r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{xi} z_{yi}$. Zamjenom z -vrijednosti odgovarajućim formulama za njihovo izračunavanje dobijemo

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{xi} z_{yi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} \right) = \frac{1}{n \sigma_x \sigma_y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

S obzirom na to da su $d_{xi} = x_i - \bar{x}$ i $d_{yi} = y_i - \bar{y}$ centrirani rezultati, dobijemo

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n d_{xi} d_{yi}}{n \sigma_x \sigma_y}. \text{ Ako u taj izraz uvrstimo formule za izračunavanje standardnih devijacija,}$$

$$\text{dobijemo } r = \frac{\sum_{i=1}^n d_{xi} d_{yi}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_{xi}^2}{n} \frac{\sum_{i=1}^n d_{yi}^2}{n}}} = \frac{\sum_{i=1}^n d_{xi} d_{yi}}{n \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_{xi}^2}{n} \frac{\sum_{i=1}^n d_{yi}^2}{n}}} = \frac{\sum_{i=1}^n d_{xi} d_{yi}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n d_{xi}^2 \sum_{i=1}^n d_{yi}^2}}$$

formulu za izračunavanje Pearsonovog koeficijenta korelacije pomoću centriranih rezultata.

Izvod: Pearsonov koeficijent korelacije iz standardiziranih rezultata izračuna se formulom

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{xi} z_{yi}; \text{ zamjenom } z\text{-vrijednosti odgovarajućim formulama za njihovo}$$

izračunavanje dobijemo

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{xi} z_{yi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} \right) = \frac{1}{n\sigma_x\sigma_y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Množenjem elemenata u zagradama dobijemo

$$r = \frac{1}{n\sigma_x\sigma_y} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_i \bar{y} - y_i \bar{x} + \bar{x}\bar{y}) =$$

$$= \frac{1}{n\sigma_x\sigma_y} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \bar{y} - \sum_{i=1}^n y_i \bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}\bar{y} \right)$$

S obzirom na to da je $\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$, a $\sum_{i=1}^n y_i = n\bar{y}$, dobijemo

$$r = \frac{1}{n\sigma_x\sigma_y} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y} \right) = \frac{1}{n\sigma_x\sigma_y} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \right).$$

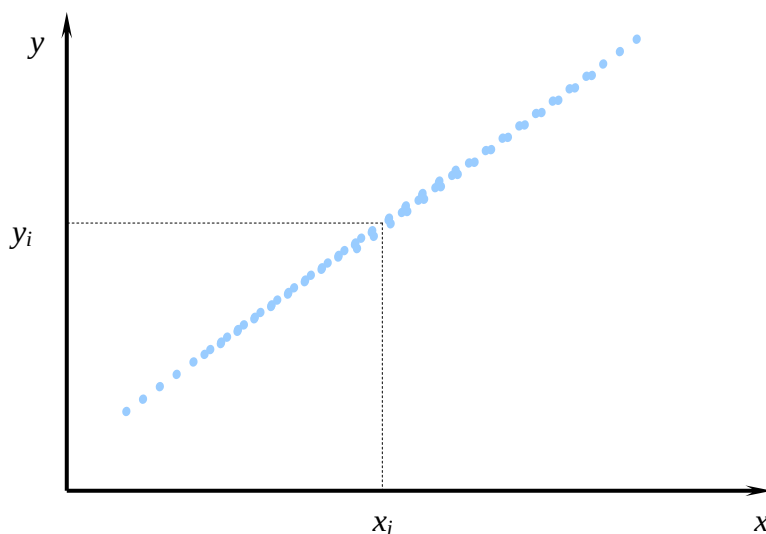
Ako u ovaj izraz uvrstimo formule za izračunavanje aritmetičkih sredina i standardnih devijacija, dobijemo

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)}{n \frac{1}{n} \sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \cdot \frac{1}{n} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}. \text{ Ako brojnik i nazivnik}$$

$$\text{pomnožimo sa } n, \text{ dobijemo } r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}$$

formulu za izračunavanje Pearsenovog koeficijenta korelacije iz originalnih podataka.

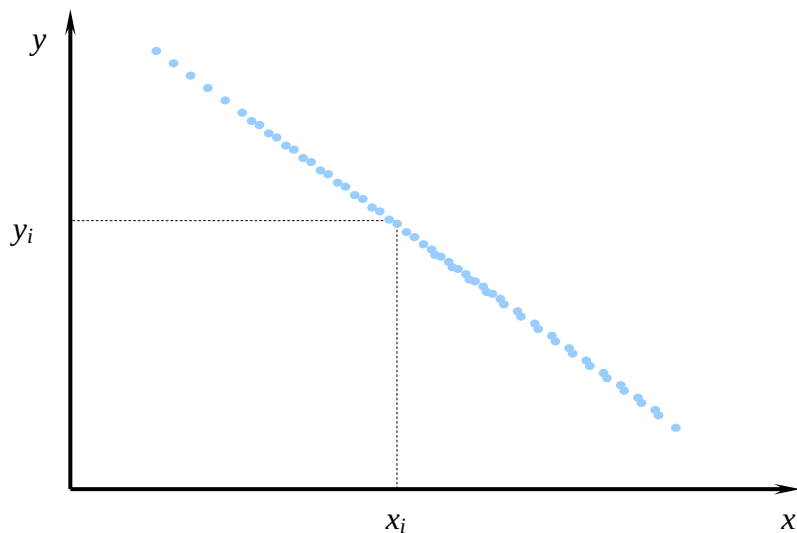
Korelacijski odnos varijabli može se prikazati dijagramom. Primjerice, na *apscisi* se nalaze rezultati entiteta u varijabli x , a na *ordinati* rezultati entiteta u varijabli y . Na sjecištu pravaca okomitih na osi x i y dobiju se rezultati entiteta u bivarijatnom koordinatnom sustavu (slika 2.11-1). Rezultat entiteta označava se točkom s koordinatama $T(x_i, y_i)$.



Slika 2.11-1. Potpuna pozitivna korelacija ($r = +1$)

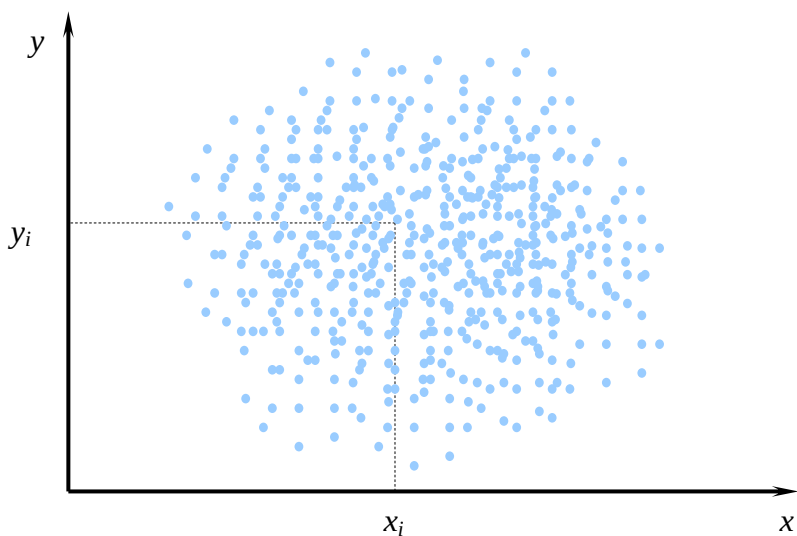
Ako na temelju rezultata nekog ispitanika u jednoj varijabli možemo točno predvidjeti rezultat u drugoj varijabli (slika 2.11-1), odnosno, ako svako povećanje/smanjenje rezultata u jednoj varijabli prati proporcionalno povećanje/smanjenje rezultata u drugoj varijabli, onda se radi o *potpunoj pozitivnoj korelaciji* ($r = +1$). Dakle, svi ispitanici s određenim iznadprosječnim rezultatom u varijabli x imaju jednako toliko iznadprosječan rezultat u varijabli y , a svi ispitanici s određenim ispodprosječnim rezultatom u varijabli x imaju jednako toliko ispodprosječan rezultat u varijabli y .

Ako svako povećanje rezultata u jednoj varijabli prati isto toliko smanjenje rezultata u drugoj varijabli (slika 2.11-2), odnosno, ako postoji potpuna obrnuto proporcionalna veza dviju varijabli, onda se takva korelacija zove *potpuna negativna korelacija* ($r = -1$). U tom slučaju svi ispitanici s određenim iznadprosječnim rezultatom u varijabli x imaju jednako toliko ispodprosječan rezultat u varijabli y , a svi ispitanici s određenim ispodprosječnim rezultatom u varijabli x imaju jednako toliko iznadprosječan rezultat u varijabli y .



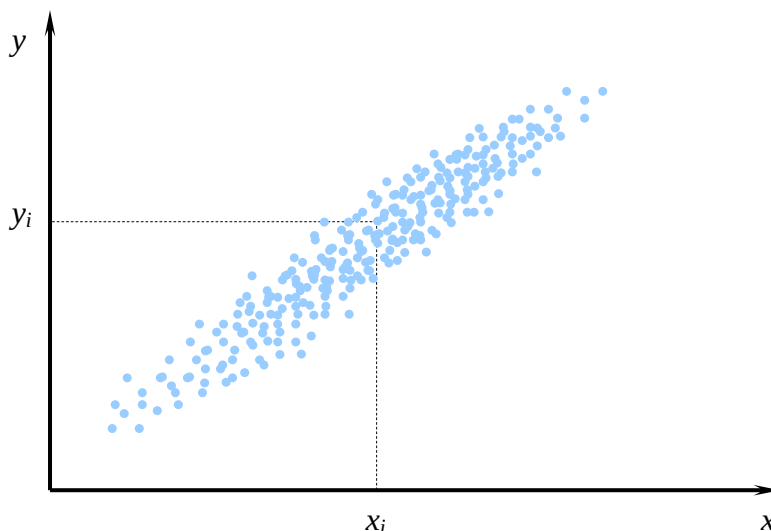
Slika 2.11-2. Potpuna negativna korelacija ($r = -1$)

Ako svakom rezultatu u jednoj varijabli može odgovarati bilo kakav (dobar, prosječan, loš) rezultat u drugoj varijabli, onda te dvije varijable nisu u korelaciji ($r=0$). Rezultati jedne varijable kreću se sasvim nezavisno od rezultata druge varijable (slika 2.11-3), što ukazuje na nepostojanje bilo kakve korelativne veze između promatranih varijabli.



Slika 2.11-3. Korelacija jednaka nuli ($r = 0$)

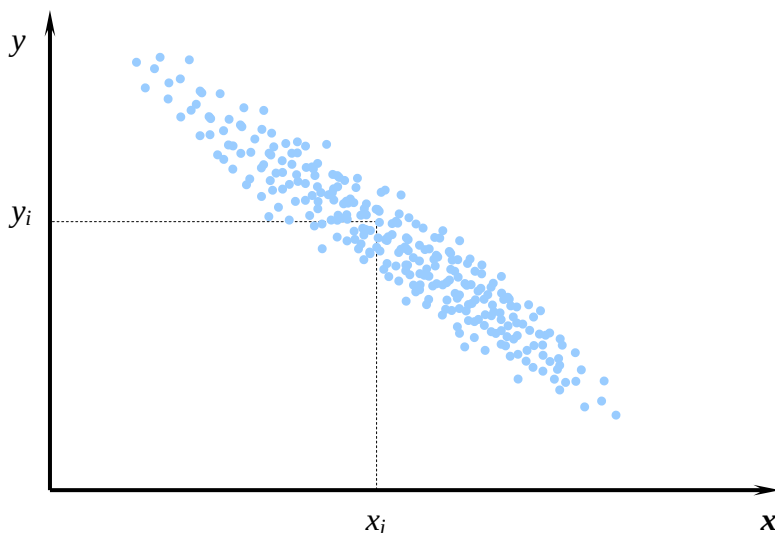
Ako većim rezultatima ispitanika u jednoj varijabli najvjerojatnije odgovaraju veći rezultati u drugoj varijabli, odnosno određenom rezultatu u jednoj varijabli ne odgovara samo jedan rezultat u drugoj varijabli već se rezultati kreću u nekom intervalu tada se radi o *nepotpunoj pozitivnoj korelaciji* ($0 < r < +1$).



Slika 2.11-4. *Nepotpuna pozitivna korelacija ($0 < r < +1$)*

Dakle, na osnovi rezultata ispitanika u jednoj varijabli nije moguće sa 100% sigurnošću tvrditi koliki je njegov rezultat u drugoj varijabli. S određenom vjerojatnošću pretpostavljamo da se ispitanikov rezultat kreće u određenom intervalu (slika 2.11-4). Interval će biti to manji što je koeficijent korelacije bliži 1 (elipsoidni oblik točaka tendira ka pravcu), odnosno veći što je bliži 0 (elipsoidni oblik točaka tendira ka kružnom obliku). Primjerice, korelacija između visine i težine čovjeka je pozitivna i nepotpuna. To znači da će viši čovjek najvjerojatnije biti teži, ali ne možemo točno prognozirati njegovu tjelesnu težinu samo na temelju tjelesne visine. Ako je neki čovjek visok 185 cm, on je najvjerojatnije težak oko 75 kg, ali je poznato da osobe visoke 185 cm mogu biti i teže i lakše od 75 kg. Povezanost svakako postoji, međutim težina ne ovisi isključivo o visini tijela, nego i o drugim karakteristikama (potkožno masno tkivo, mišićna masa itd.).

Sve što je rečeno za nepotpunu pozitivnu korelaciju, važi i za nepotpunu negativnu, osim što je odnos između varijabli obrnuto proporcionalan (slika 2.11-5).



Slika 2.11-5. Nepotpuna negativna korelacija ($0 > r > -1$)

Radi lakše interpretacije korelacije često se koristi *koeficijent determinacije*. On predstavlja proporciju zajedničkog varijabiliteta dviju varijabli, a izračuna se

$$\Delta = r^2.$$

Koeficijent determinacije pomnožen sa 100 daje postotak kojim se može predviđati rezultat u jednoj varijabli ako nam je poznat rezultat u drugoj varijabli. Tako npr., korelacija od 0,66 i iz nje izveden koeficijent determinacije pomnožen sa 100 ukazuje na to da uspješnost predviđanja rezultata na jednom testu na osnovi rezultata u drugom testu iznosi 43%.

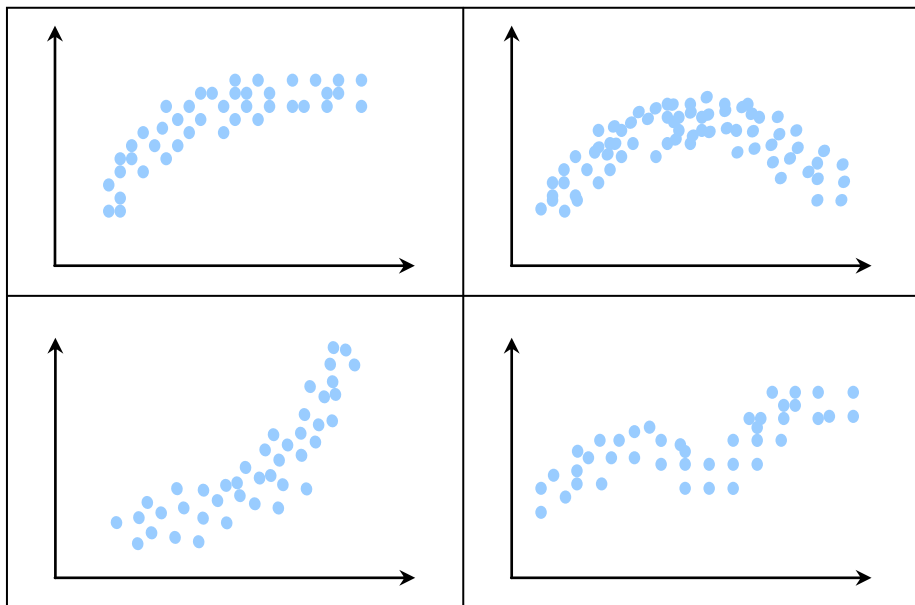
Osim toga, valja napomenuti da *Pearsonov produkt - moment koeficijent korelacije* izražava jačinu *linearanog* odnosa dviju varijabli, što se ne smije izgubiti iz vida pri njegovoj interpretaciji. Naime, odnos između dvije varijable ne mora biti linearan, pa će u tom slučaju *produkt - moment koeficijent korelacije* pokazati znatno manju povezanost od stvarne. Stoga je potrebno, prije računanja koeficijenta korelacije, izraditi korelacijski dijagram (*engl. scatter plot*) kako bi se uočilo radi li se o linearnom ili nelinearnom odnosu dviju varijabli. Ako se iz korelacijskog dijagrama uočava linearan odnos između dviju varijabli, tada je opravdano izračunati *produkt - moment koeficijent korelacije*. Međutim, ako uočeni odnos nije linearan (slika 2.11-12) već nelinearan (logaritamski, eksponencijalni,

paraboličan...), tada se u okviru odgovarajućeg nelinearnog regresijskog modela računa tzv. *indeks korelacije*. Indeks korelacije predstavlja stupanj nelinearne povezanosti između dvije varijable, a računa se kao omjer između *prognozirane* (p_{ss}) i *ukupne* (t_{ss}) sume kvadrata (v. poglavlje 3.1).

$$r = \sqrt{\frac{p_{ss}}{t_{ss}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y'_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

gdje je

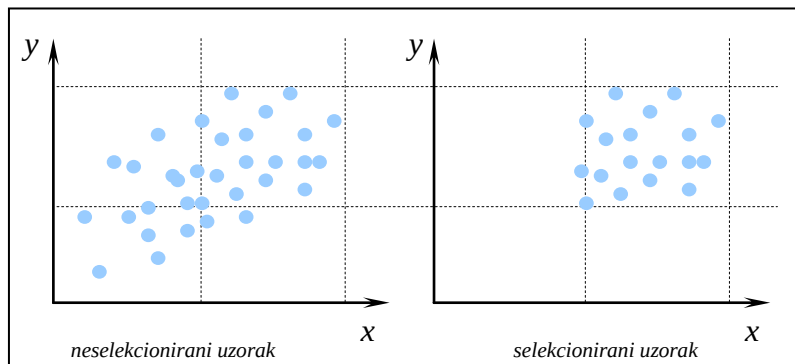
- y_i rezultat entiteta i u zavisnoj varijabli y
- y'_i prognozirani rezultat entiteta i u zavisnoj varijabli y
- $\bar{y}$ aritmetička sredina u zavisnoj varijabli y



Slika 2.11-12. Primjeri nelinearnog odnosa dviju varijabli

Veličina koeficijenta korelacije ne mora ovisiti samo o stupnju povezanosti dviju varijabli, već i o uzorku entiteta. Često se u praksi formiraju uzorci nakon što je proveden neki oblik selekcije (npr. nakon klasifikacijskog ispita za upis na fakultet), čime varijabilnost u promatranim varijablama može biti znatno manja nego u slučaju kada bi svi entiteti bili uključeni u formiranje uzorka (a ne samo oni koji su

prošli klasifikacijski ispit). To za posljedicu ima niži koeficijent korelacije, što ilustrira slika 2.11-13.



Slika 2.11-13. Primjer korelacijskih dijagrama prije i nakon selekcije entiteta

Zbog neadekvatnog uzorka entiteta koeficijent korelacije može biti i znatno veći nego što je stvarna povezanost dviju varijabli. Dobar primjer za takvu pojavu dao je B. Petz u svom udžbeniku (1997). Ako se izračuna koeficijent korelacije između varijabli *spособnost pisanja* i *dužina stopala* na uzorku djece od 7 do 15 godina, tada će koeficijent korelacije između ovih varijabli, za koje nije teško pretpostaviti da međusobno nisu povezane, biti vrlo visok. Naime, s porastom godina djece raste *spособnost pisanja* i *dužina stopala*. Stvarna korelacija između *spособnosti pisanja* i *dužine stopala* je vjerojatno jednaka nuli, međutim, visoki koeficijent korelacije je posljedica neadekvatnog uzorka entiteta. Kada bismo računali korelaciju posebno na uzorcima učenika svakog razreda osnovne škole, vjerojatno bismo dobili koeficijente korelacije jednake nuli. Dakle, visok koeficijent korelacije posljedica je utjecaja treće varijable - *dob*, koja je u pozitivnoj korelaciji s obje varijable (što su djeca starija to bolje pišu, a i dužih su stopala). Ako bismo isključili njen utjecaj, tada bi korelacija između varijabli *spособnost čitanja* i *dužina stopala* bila vjerojatno nula. Analitički se to postiže pomoću formule za računanje tzv. *parcijalne korelacije*

$$r_{xy/z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}},$$

gdje je

- $r_{yx/z}$ koeficijent parcijalne korelacije između varijabli x i y
- r_{yx} koeficijent korelacije između varijabli x i y
- r_{xz} koeficijent korelacije između varijabli x i z

- r_{yz} koeficijent korelacije između varijabli y i z

Parcijalna korelacije predstavlja stupanj povezanosti između dvije varijable iz kojeg je isključen utjecaj jedne ili više ostalih varijabli. U navedenom primjeru izračunavanje koeficijenta parcijalne korelacije bilo je nužno zbog pogrešnog planiranja eksperimenta, odnosno, neadekvatnog izbora uzorka entiteta.

2.11.1. Korelacija kao kosinus kuta dvaju vektora

Kosinus kuta između dvaju vektora, $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, jednak je koeficijentu korelacije među njima. Kosinus kuta koji zatvaraju dva vektora istog reda $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ izračuna se kao omjer skalarnog produkta dvaju vektora i umnoška njihovih normi

$$\cos \alpha = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1/2} (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) (\mathbf{y}^T \mathbf{y})^{-1/2},$$

odnosno

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}$$

Ako se rezultati u varijablama centriraju, odnosno ako su izraženi kao odstupanja od odgovarajućih aritmetičkih sredina,

$$\begin{aligned} x_{ci} &= x_i - \bar{x} \\ y_{ci} &= y_i - \bar{y}, \end{aligned}$$

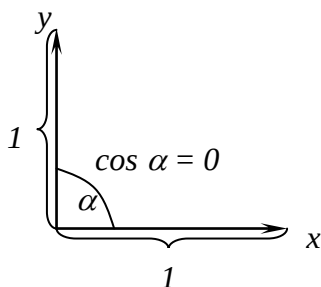
tada je kosinus kuta α jednak

$$\cos \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ci} y_{ci}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{ci}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_{ci}^2}},$$

što je formula za izračunavanje koeficijenta korelacije pa je

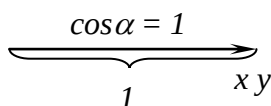
$$r = \cos \alpha.$$

Budući da je kosinus kuta između dvaju centriranih i normiranih vektora jednak koeficijentu korelacije, odnose između varijabli-vektora moguće je prikazivati geometrijski. Ako je korelacija između varijabli jednaka nuli ($r = 0$), tada su dva normirana vektora pod kutom od 90° (slika 2.11-6).



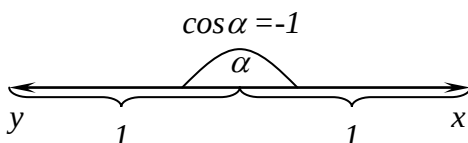
Slika 2.11-6. Korelacija jednaka nuli ($r = 0$)

Ako je korelacija između varijabli maksimalna i pozitivna ($r_{xy}=+1$), tada je kut između dvaju vektora 0° (slika 2.11-7).



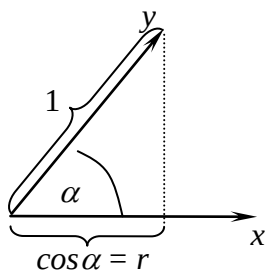
Slika 2.11-7. Maksimalna pozitivna korelacija ($r=+1$)

Ako je korelacija između varijabli maksimalna i negativna ($r=-1$), tada je kut između dvaju vektora 180° (slika 2.11-8).



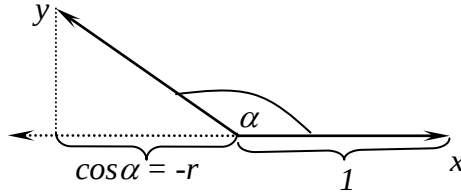
Slika 2.11-8. Maksimalna negativna korelacija ($r=-1$)

Ako je korelacija nepotpuna pozitivna ($0 < r < +1$), tada je kut između dvaju vektora veći od 0° , a manji od 90° (slika 2.11-9).



Slika 2.11-9. Pozitivna nepotpuna korelacija ($0 < r < +1$)

Ako je korelacija nepotpuna negativna ($-1 < r < 0$), tada je kut između dvaju vektora veći od 90° , a manji od 180° (slika 2.11-10).



Slika 2.11-10. Negativna nepotpuna korelacija ($-1 < r < 0$)

2.11.2. Računanje korelacija matričnom algebrom

Neka je X matrica podataka dobivena opisivanjem nekog skupa od n entiteta skupom od m varijabli

$$X = (x_{ij}),$$

gdje je $i = 1, \dots, n$, a $j = 1, \dots, m$.

Podaci iz matrice X standardiziraju se operacijom

$$Z = X_c V^{-1},$$

gdje je $X_c = (X - PX)$ matrica centriranih podataka, $P = \mathbf{1}(\mathbf{1}^T \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^T$ lijevi centroidni projektor matrice X , a V dijagonalna matrica standardnih devijacija.

Matrica korelacija R izračuna se operacijom

$$\begin{aligned} R &= Z^T Z n^{-1} \\ &= \{(X - PX)V^{-1}\}^T \{(X - PX)V^{-1}\} n^{-1} \\ &= V^{-1} (X^T - X^T P)(X - PX)V^{-1} n^{-1} \\ &= V^{-1} (X^T X - X^T PX - X^T PX + X^T PPX)V^{-1} n^{-1} \\ &= V^{-1} (X^T X - X^T PX) V^{-1} n^{-1} \\ &= V^{-1} C V^{-1}, \end{aligned}$$

gdje je V^{-1} inverz dijagonalne matrice standardnih devijacija V , a C matrica kovarijanci.

Matrica korelacija $\mathbf{R}$ je kvadratnog oblika, simetrična je s obzirom na glavnu dijagonalu u kojoj se nalaze jedinice (varijance standardiziranih varijabli jednake su jedinici), a izvan dijagonalni elementi predstavljaju korelacije među varijablama. S obzirom da je matrica, kako je već rečeno, simetrična, svaki koeficijent korelacije ponavlja se dva puta (slika 2.11-11).

Tablica 2.11-11. Matrica korelacija $\mathbf{R}$ za četiri varijable

1	r_{12}	r_{13}	r_{14}
r_{21}	1	r_{23}	r_{24}
r_{31}	r_{32}	1	r_{34}
r_{41}	r_{42}	r_{43}	1

Primjer: 9 ispitanika postiglo je sljedeće rezultate u skoku udalj (SD), trčanju na 100 metara (T100m) i bacanju kugle (BK). Potrebno je izračunati koeficijente korelacije među varijablama uz pomoć matrične algebre.

$\mathbf{X} =$

SD	T100m	BK
359	13,6	561
321	13,9	550
346	13,7	538
332	14	490
450	12,2	518
314	14,1	551
410	12,5	589
425	12,3	602
369	13,5	547

Matrica centriranih podataka $\mathbf{X}_c$ dobije se operacijom

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{X} - \mathbf{1}\mathbf{m}^T,$$

gdje je $\mathbf{1}$ sumacijski vektor sa n jedinica, a $\mathbf{m} = \mathbf{X}^T \mathbf{1} n^{-1}$ vektor aritmetičkih sredina.

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{m}^T \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{X} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline 359 & 13,6 & 561 \\ \hline 321 & 13,9 & 550 \\ \hline 346 & 13,7 & 538 \\ \hline 332 & 14 & 490 \\ \hline 450 & 12,2 & 518 \\ \hline 314 & 14,1 & 551 \\ \hline 410 & 12,5 & 589 \\ \hline 425 & 12,3 & 602 \\ \hline 369 & 13,5 & 547 \\ \hline \end{array} \end{array} - \begin{array}{c} \mathbf{1 m}^T \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline 369,56 & 13,31 & 549,56 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{X}_c \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline -10,56 & 0,29 & 11,44 \\ \hline -48,56 & 0,59 & 0,44 \\ \hline -23,56 & 0,39 & -11,56 \\ \hline -37,56 & 0,69 & -59,56 \\ \hline 80,44 & -1,11 & -31,56 \\ \hline -55,56 & 0,79 & 1,44 \\ \hline 40,44 & -0,81 & 39,44 \\ \hline 55,44 & -1,01 & 52,44 \\ \hline -0,56 & 0,19 & -2,56 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Matrica kovarijanci C varijabli iz X izračuna se operacijom

$$C = X_c^T X_c n^{-1},$$

gdje je X_c matrica centriranih podataka početnih vrijednosti matrice X .

$$\begin{array}{c} \mathbf{X}_c^T \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{SD} & -10,56 & -48,56 & -23,56 & -37,56 & 80,44 & -55,56 & 40,44 & 55,44 \\ \hline \text{T100m} & 0,29 & 0,59 & 0,39 & 0,69 & -1,11 & 0,79 & -0,81 & -1,01 \\ \hline \text{BK} & 11,44 & 0,44 & -11,56 & -59,56 & -31,56 & 1,44 & 39,44 & 52,44 \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{X}_c \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline -10,56 & 0,29 & 11,44 \\ \hline -48,56 & 0,59 & 0,44 \\ \hline -23,56 & 0,39 & -11,56 \\ \hline -37,56 & 0,69 & -59,56 \\ \hline 80,44 & -1,11 & -31,56 \\ \hline -55,56 & 0,79 & 1,44 \\ \hline 40,44 & -0,81 & 39,44 \\ \hline 55,44 & -1,01 & 52,44 \\ \hline -0,56 & 0,19 & -2,56 \\ \hline \end{array} \end{array} n^{-1}$$

$$= C$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \text{SD} & \text{T100m} & \text{BK} \\ \hline \text{SD} & 2337,78 & -36,11 & 531,53 \\ \hline \text{T100m} & -36,11 & 0,58 & -11,41 \\ \hline \text{BK} & 531,53 & -11,41 & 1140,28 \\ \hline \end{array}$$

Ekstrakcijom dijagonale matrice kovarijanci C dobije se dijagonalna matrica varijanci V^2

$$V^2 = \text{diag}C,$$

a operacijom

$$V = (\text{diag}C)^{1/2}$$

dijagonalna matrica standardnih devijacija V .

$$V^2 = \text{diag}C$$

	SD	T100m	BK
SD	2337,78	0	0
T100m	0	0,58	0
BK	0	0	1140,28

$$V = (\text{diag}C)^{1/2}$$

	SD	T100m	BK
SD	48,35	0	0
T100m	0	0,76	0
BK	0	0	33,77

Podaci iz matrice X standardiziraju se operacijom

$$X_c$$

SD	T100m	BK
-10,56	0,29	11,44
-48,56	0,59	0,44
-23,56	0,39	-11,56
-37,56	0,69	-59,56
80,44	-1,11	-31,56
-55,56	0,79	1,44
40,44	-0,81	39,44
55,44	-1,01	52,44
-0,56	0,19	-2,56

$$V^{-1}$$

	SD	T100m	BK
SD	0,02	0,00	0,00
T100m	0,00	1,31	0,00
BK	0,00	0,00	0,03

=

$$Z$$

SD	T100m	BK
-0,22	0,38	0,34
-1,00	0,77	0,01
-0,49	0,51	-0,34
-0,78	0,91	-1,76
1,66	-1,46	-0,93
-1,15	1,04	0,04
0,84	-1,07	1,17
1,15	-1,33	1,55
-0,01	0,25	-0,08

Matrica korelacija R izračuna se operacijom

$$Z^T$$

SD	-0,22	-1,00	-0,49	-0,78	1,66	-1,15	0,84	1,15
T100m	0,38	0,77	0,51	0,91	-1,46	1,04	-1,07	-1,33
BK	0,34	0,01	-0,34	-1,76	-0,93	0,04	1,17	1,55

$$Z$$

$$n^{-1}$$

$$9^{-1}$$

SD	T100m	BK
-0,22	0,38	0,34
-1,00	0,77	0,01
-0,49	0,51	-0,34
-0,78	0,91	-1,76
1,66	-1,46	-0,93
-1,15	1,04	0,04
0,84	-1,07	1,17
1,15	-1,33	1,55
-0,01	0,25	-0,08

$$= R$$

	SD	T100m	BK
SD	1,00	-0,98	0,33
T100m	-0,98	1,00	-0,44
BK	0,33	-0,44	1,00

2.11.3. Testiranje značajnosti koeficijenta korelacije

Koeficijent korelacije dviju varijabli najčešće se izračunava na uzorku ispitanika koji je izvučen iz određene populacije, pa se postavlja pitanje je li dobiveni koeficijent korelacije uistinu tolik i u populaciji. S ciljem da se uz određenu grešku zaključivanja dobiju informacije o povezanosti dviju varijabli u populaciji, utvrđuje se statistička značajnost koeficijenta korelacije dobivenog na uzorku. U tu svrhu postavljamo hipoteze:

- $H_0 : r = 0$ - korelacija nije statistički značajna uz pogrešku p
- $H_1 : r \neq 0$ - korelacija je statistički značajna uz pogrešku p

Statistička značajnost koeficijenta korelacije osobito je važno jer ukazuje na ovisnost koeficijenta korelacije o veličini uzorka iz kojega je izračunat. Test značajnosti utemeljen je na pretpostavci da je svaka od dviju varijabli normalno distribuirana te da njihova zajednička, bivarijatna distribucija odgovara normalnoj. Koeficijent korelacije testira se po sljedećoj formuli

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}},$$

gdje je:

- t vrijednost testa koja se distribuira kao *Studentova t-distribucija*
- r koeficijent korelacije
- n broj entiteta.

Iz formule je vidljivo da *t-vrijednost* ovisi o broju ispitanika i veličini koeficijenta korelacije. Vrijednost t je veća što je stupanj povezanosti među varijablama jači i što je broj entiteta u uzorku veći. *T-vrijednost* se distribuira kao *Studentova t-distribucija*.

Izračunata *t-vrijednost* usporedi se s kritičnom *t-vrijednošću* koja se očitava iz tablice za određeni broj stupnjeva slobode ($df=n-2$) i odabranu pogrešku ($p=0,05$ ili $p=0,01$).

Ako je izračunata *t-vrijednost* veća od *tablične t-vrijednosti*, odbacuje se nulta hipoteza i zaključuje da je koeficijent korelacije statistički značajan, uz mogućnost pogreške od 0,05 ili 0,01, i to stoga jer je

vjerojatnost da će se toliki koeficijent korelacije dobiti slučajno (kad korelacija u populaciji ne postoji) manja od 0,01 i 0,05.

$$t >_{df} t_p \Rightarrow H_1: r \neq 0 - \text{korelacija je statistički značajna uz pogrešku } p.$$

Ako je izračunata *t-vrijednost* manja od *tablične t-vrijednosti*, prihvaća se nulta hipoteza i zaključuje da koeficijent korelacije nije statistički značajan. To, naravno, ne znači da korelacija u populaciji mora biti nula, već se ne može s 99% ili 95% sigurnosti tvrditi da je različita od nule.

$$t <_{df} t_p \Rightarrow H_0: r = 0 - \text{korelacija nije statistički značajna uz pogrešku } p.$$

Kraći način testiranja koeficijenta korelacije je pomoću tablice *F* (str. 324. Uz broj stupnjeva slobode ($df=n-2$) i pogrešku od 0,05 ili 0,01 određen je *kritični koeficijent korelacije* od kojega izračunati koeficijent korelacije mora biti veći da bi bio statistički značajan.

Primjer: Slučajno odabran uzorak od 6 entiteta izmjeren je pomoću dva testa *X* i *Y*. Potrebno je izračunati koeficijent korelacije između varijabli *X* i *Y* i testirati njegovu statističku značajnost uz pogrešku od 0,05.

Radi bolje preglednosti računanje koeficijenta korelacije moguće je provesti uz pomoć tablice 2.11-1.

Tablica 2.11-1. Izračunavanje koeficijenta korelacije

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
3	6	9	36	18
2	3	4	9	6
2	4	4	16	8
4	5	16	25	20
2	5	4	25	10
1	3	1	9	3
$\Sigma 14$	$\Sigma 26$	$\Sigma 38$	$\Sigma 120$	$\Sigma 65$

Dobivene vrijednosti uvrste se u formulu za računanje koeficijenta korelacije iz originalnih podataka

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \left(n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right)}} = \frac{6 \cdot 65 - 14 \cdot 26}{\sqrt{(6 \cdot 38 - 14^2) \cdot (6 \cdot 120 - 26^2)}} =$$

$$= \frac{26}{\sqrt{32 \cdot 44}} = \frac{26}{\sqrt{1408}} = \frac{26}{37,52} = 0,69$$

Izračunati koeficijent korelacije uvrstimo u formulu za testiranje statističke značajnosti

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0,69 \sqrt{\frac{4}{1-0,69^2}} = 0,69 \sqrt{\frac{4}{0,52}} = 1,91$$

Iz tablice *t-vrijednosti* (tablica B, str. 317) za broj stupnjeva slobode $df = n-2=4$ i pogrešku $p=0,05$ dobije se granična *t-vrijednost*

$$4t_{0,05} = 2,78$$

S obzirom na to da je izračunata *t-vrijednost* manja od granične, prihvaćamo

$$H_0: r = 0$$

i zaključujemo da korelacija nije statistički značajna, odnosno ne možemo uz zadanu pogrešku tvrditi da je korelacija u populaciji različita od nule.

3

Multivarijatne metode

3.1

Regresijska analiza

Regresijska analiza je matematičko-statistički postupak kojim se utvrđuje odgovarajuća funkcionalna veza između jedne *zavisne varijable* i jedne ili više *nezavisnih varijabli*. Time se omogućava predviđanje zavisne varijable na temelju promjena u skupu nezavisnih varijabli.

U razvoju regresijske analize važnu ulogu imaju radovi Gaussa, Galtona, Pearsona i Yulea. Pearson i Galton su razvili korelacijsku analizu proučavajući nasljedne osobine te upotrijebili regresijsku jednadžbu kako bi utvrdili funkcionalni odnos između visine očeva i sinova. Pearson je otkrio da je Gauss sedamdeset godina prije njih koristio regresijsku analizu za određivanje orbite planeta (Viskić-Štalec, 1991). Yule je postavio temelje višestrukoj regresijskoj analizi (Yule, 1897).



George Udny Yule (1871. - 1951.) britanski statističar. Nakon što je diplomirao inženjerstvo i fiziku, od 1893. godine počinje surađivati s Karlom Pearsonom na *University College* u Londonu, gdje je od 1896. godine predavao primijenjenu matematiku, a od 1912. statistiku na *Cambridgeu*. U radu

On the Theory of Correlation, objavljenom 1897. godine, razvija vlastiti pristup korelaciji te je postavio temelje za višestruku regresijsku analizu.

Prema, Kolesarić i Petz, 1999., i O'Connor and Robertson: <http://www-groups.dcs.st-d.ac.uk/%7Ehistory/Mathematicians/Yule.html>

Naziv *regresijska analiza* potječe od *Francisa Galtona* koji je, proučavajući odnos između nekih osobina, primjetio da, primjerice, izrazito visoki očevi imaju visoku djecu, ali ona nisu toliko visoka kao očevi, a da izrazito niski očevi imaju nisku djecu, ali nešto višu od očeva. Ovu tendenciju da se ekstremne vrijednosti koje postoje u jednoj generaciji u sljedećoj pomaknu prema prosjeku, Galton je nazvao *zakon o regresiji*¹ prema *prosječnosti*, nakon čega se za matematičku funkciju kojom se uspostavlja funkcionalna veza između dviju varijabli počeo upotrebljavati naziv *regresijska funkcija*, a za cijeli postupak *regresijska analiza*.

Znanstveni članak G. U. Yulea *On the Theory of Correlation* objavljen je u časopisu *Journal of the Royal Statistical Society* 1897. godine.

812		[Dec. 1897.]
On the THEORY of CORRELATION. By G. UDNY YULE.		
CONTENTS :		
I.—On Correlation in General	812	II.—On Normal Correlation
Introductory	812	(1) Case of Two Variables ..
(1) Case of Two Variables	817	Probable Errors
Arithmetical Examples	823	(2) Case of Three Variables ..
(2) Case of Three Variables ..	831	Table of the Values of $\sqrt{1-r^2}$...
(3) " Four " ..	836	Probable Errors of r ...
APPENDIX.		
I.—On Correlation in General. Introductory.		
THE investigation of causal relations between economic phenomena presents many problems of peculiar difficulty, and offers many opportunities for fallacious conclusions. Since the statistician can seldom or never make experiments for himself, he has to accept the data of daily experience, and discuss as best he can the relations of a whole group of changes; he cannot, like the physicist, narrow down the issue to the effect of one variation at a time. The problems of statistics are in this sense far more complex than the problems of physics. In view of this complexity it will, I think, be generally allowed that the statistical methods hitherto employed are frequently inadequate. No apology therefore is necessary for bringing before the Society a method that, whatever its difficulties, exceeds in completeness and generality any other that covers the same ground. Few of the results given in the sequel are entirely new, but they have not hitherto been collected together or fully illustrated by numerical examples. The majority have at best found notice in this <i>Journal</i> in notices or abstracts of papers by Professor Edgeworth, Mr. Francis Galton, or Professor Pearson. Before proceeding to the development of formulae, it may be well to define a few terms that are possibly unfamiliar. The quantities—necessarily numerical quantities—whose relations it is desired to investigate will be spoken of as the <i>variables</i>, since their magnitude varies. Instead of speaking of "causal relation," "causally related quantities," we will use the terms "correlation," "correlated quantities." This definition is provisional, subject to numerical measures given later. The ordinary table of double entry which gives the frequency of occurrence of different pairs of two associated or correlated variables will be called a <i>frequency table</i> or <i>correlation table</i>. The		

Opći oblik regresijskog modela moguće je izraziti sljedećom relacijom

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m) + e,$$

gdje je

- Y zavisna (kriterijska) varijabla
- $X_1, \dots, X_m$ nezavisne (prediktorske) varijable
- e greške prognoze
- f odgovarajuća funkcija.

Dakle, pomoću regresijske analize možemo predviđati vrijednosti zavisne varijable na temelju promjena nezavisnih varijabli. Ako je moguće funkcionalnu vezu jedne zavisne i jedne ili više nezavisnih varijabli izraziti odgovarajućim matematičkim modelom na temelju kojega je moguće točno utvrđivati vrijednosti zavisne varijable na osnovi varijacija drugih varijable, radi se o *determinističkom modelu*

¹ Regresija (lat. *regressio*) - povratak, vraćanje, nazadovanje i sl.

($e=0$). Pod *stohastičkim* modelom podrazumijeva se odgovarajuća funkcionalna veza kod koje odgovarajućim vrijednostima nezavisnih varijabli odgovara više vrijednosti zavisne varijable ($e \neq 0$).

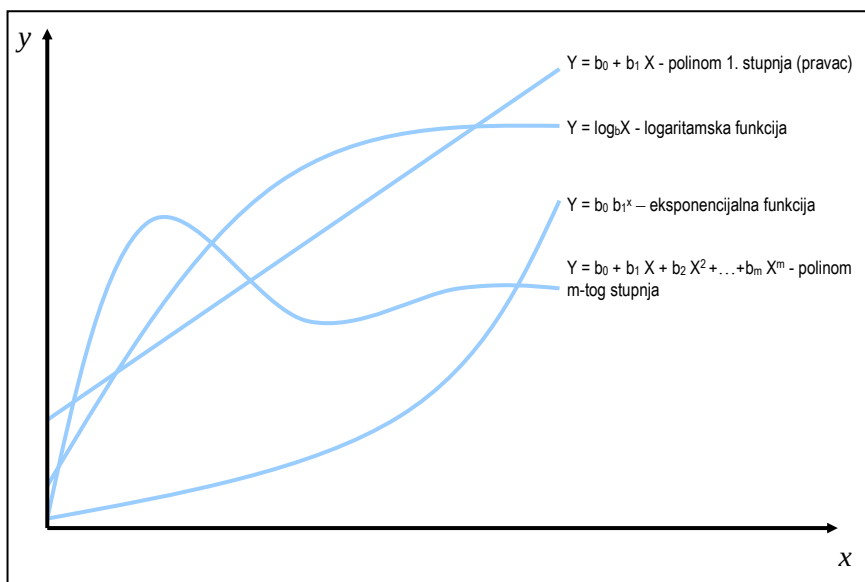
Modele za utvrđivanje funkcionalne zavisnosti moguće je generalno podijeliti na temelju dvaju kriterija:

- prema broju nezavisnih varijabli na *jednostavne* (engl. *simple*) i *višestruke* (engl. *multiple*) regresijske modele.
- prema odnosu između zavisne i nezavisnih varijabli na *linearne* i *nelinearne* regresijske modele (slika 3.1-1).

U tablici 3.1-1 prikazana je klasifikacija regresijskih modela s obzirom na spomenute kriterije.

Tablica 3.1-1. Klasifikacija regresijskih modela

	LINEARAN	NELINEARAN
JEDNOSTAVAN (SIMPLE)	$Y = b_0 + b_1 X$ – polinom 1. stupnja (pravac)	$Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$ – polinom 2. stupnja (parabola) $Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_m X^m$ – polinom n-tog stupnja $Y = b_0 b_1^x$ – eksponencijalna funkcija $Y = \log_b X$ – logaritamska funkcija itd.
VIŠESTRUKI (MULTIPLE)	$Y = b_0 + b_1 X_1 + \dots + b_m X_m$	



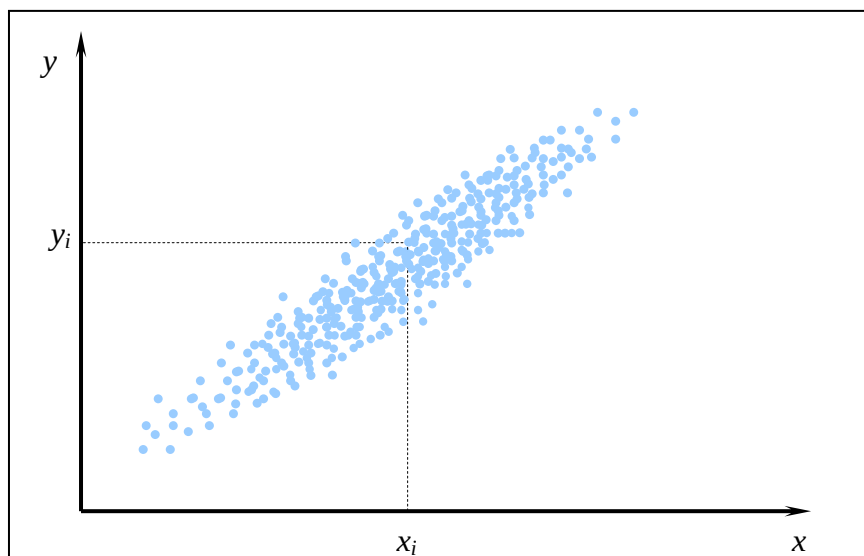
Slika 3.1-1. Linearna (pravac) i neke nelinearne (logaritamska, eksponencijalna i polinom n-tog stupnja) matematičke funkcije

3.1.1. Jednostavna linearna regresijska analiza

Jednostavnom regresijskom analizom izražava se odnos dviju pojava. Vrijednosti pojave čije se varijacije objašnjavaju (prognoziraju) predstavljaju vrijednosti *zavisne (kriterijske) varijable* y , dok vrijednosti pojave na temelju koje se objašnjavaju varijacije zavisne varijable predstavljaju vrijednosti *nezavisne (prediktorske) varijable* x . Opći je oblik jednostavne regresije

$$y = f(x) + e$$

Međutim, pitanje je koja funkcija, odnosno, koji model (linearni, eksponencijalni, logaritamski, polinom m -tog stupnja itd.) najbolje objašnjava relaciju dviju varijabli. S obzirom na to da ne postoji jedinstvena metoda odabira modela koji najbolje aproksimira određenu funkcionalnu zavisnost varijabli, jedan od najjednostavnijih i najčešće korištenih načina je tzv. *empirijski pristup* koji se zasniva na zakonu velikih brojeva. Primjerice, ako se za neki skup empirijskih podataka (n entiteta opisanih dvjema varijablama) želi pronaći takva matematička funkcija koja najbolje aproksimira odnos dviju varijabli, onda je potreban grafički prikaz rasipanja rezultata u koordinatnom sustavu (korelacijski dijagram). Na *apscisi* (os x) se nalaze rezultati nezavisne varijable, a na *ordinati* (os y) rezultati zavisne varijable. Svaki je rezultat u koordinatnom sustavu predstavljen odgovarajućom točkom s koordinatama $T(x_i, y_i)$.



Slika 3.1-2. Rezultati n entiteta u koordinatnom sustavu varijabli X i Y

Prema rasporedu točaka u koordinatnom sustavu istraživač donosi odluku o obliku funkcionalne veze te bira odgovarajuću funkciju $f(x)$. Da bismo bili što sigurniji u oblik matematičke funkcije koja će najbolje aproksimirati odnos rezultata dviju varijabli, potrebno je raspolagati velikim brojem empirijskih podataka, tako da je iz oblika raspodjele moguće uočiti oblik odgovarajuće matematičke funkcije. Vrlo često korištena matematička funkcija kojom se može aproksimirati linearnu zavisnost između varijabli jest *jednadžba pravca*.

$$f(x) = y = b_0 + b_1 x + e,$$

gdje je

- y zavisna varijabla
- x nezavisna varijabla
- b_0 i b_1 regresijski koeficijenti
- e rezidualne vrijednosti ili greške prognoze.

Dakle, jednostavna linearna regresijska analiza upotrebljava se za utvrđivanje *linearne* zavisnosti jedne zavisne i jedne nezavisne varijable.

Neka je svaki entitet slučajno izabranog uzorka od n entiteta iz populacije P izmjeren u varijablama y i x s rezultatom (x_i, y_i) , $i=1, \dots, n$. Ako postoji linearna zavisnost rezultata entiteta u varijablama y i x , tada je regresijska funkcija jednaka jednadžbi pravca

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gdje je

- y_i rezultat entiteta i u zavisnoj varijabli
- b_0 i b_1 regresijski koeficijenti
- x_i rezultat entiteta i u nezavisnoj varijabli
- e_i rezidualna vrijednost entiteta i .

U matričnom obliku

$$\begin{array}{c} \overbrace{y} \\ \left| \begin{array}{c} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{array} \right| = \overbrace{X} \cdot \overbrace{b} + \overbrace{e} \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & x_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} b_0 \\ b_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{array} \right|, \end{array}$$

gdje je

- $\mathbf{y}$ vektor n rezultata entiteta u zavisnoj varijabli
- $\mathbf{X}$ matrica (reda $n \times 2$) rezultata n entiteta u nezavisnoj varijabli
- $\mathbf{b}$ vektor regresijskih koeficijenata
- $\mathbf{e}$ vektor rezidualnih rezultata n entiteta.

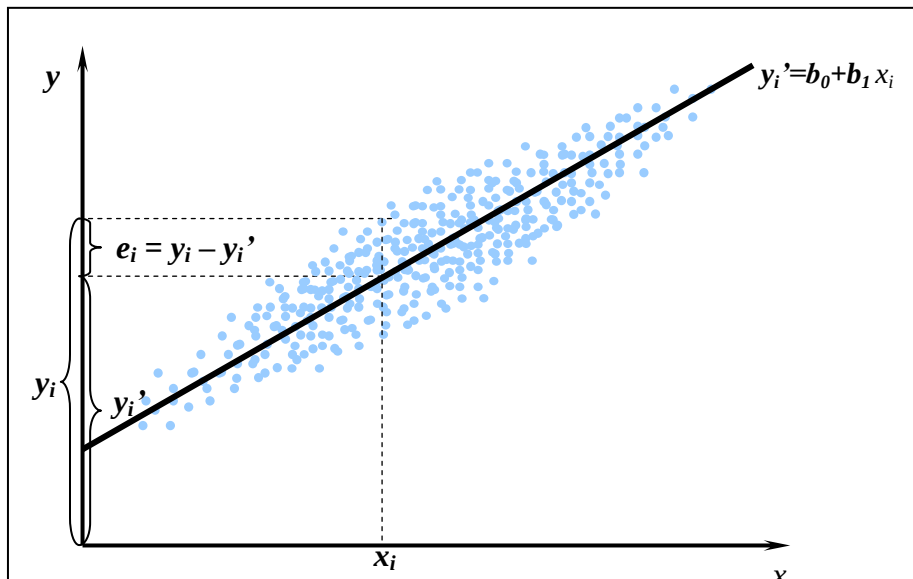
Ako se iz grafičkog prikaza (slika 3.1-2) uočava da je odnos između varijabli x i y linearan, može se aproksimirati jednačinom pravca. Pravac je potrebno „provući“ tako da bude istovremeno najbliži svim rezultatima entiteta (točkama), odnosno da odstupanja vrijednosti zavisne varijable od pravca budu što manja.

Metodom najmanjih kvadrata izračunaju se regresijski koeficijenti za jednačinu

$$y_i' = b_0 + b_1 x_i$$

uz uvjet da suma kvadrata rezidualnih vrijednosti, odnosno odstupanja izmjerenih vrijednosti (y_i) od prognoziranih (y_i'), bude minimalna

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i')^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (b_0 + b_1 x_i))^2 = \min$$



Slika 3.1-3. Regresijski pravac dobiven po modelu najmanjih kvadrata

Slika 3.1-3 prikazuje rezultate entiteta u nezavisnoj (x_i) i zavisnoj (y_i) varijabli te prognozirane rezultate (y_i') koji su dobiveni prema modelu

najmanjih kvadrata. Koeficijenti b_0 i b_1 su nepoznanice koje treba izračunati, a e_i su rezidualne vrijednosti s očekivanom vrijednošću

$$E(e) = 0$$

Sustav normalnih jednadžbi²

$$\mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b},$$

gdje je

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{y} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{vmatrix}$$

svodi se na oblik

$$\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{vmatrix}$$

ili

$$b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

² Normalne jednadžbe su linearne po koeficijentima $b_0, \dots, b_m$.

$$b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Ako se lijeva i desna strana pomnoži sa n^{-1} , dobije se

$$b_0 + b_1 \bar{x} = \bar{y}$$

pa je

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

Iz gornje relacije vidljivo je da za $b_1 = 0$ vrijednost zavisne varijable za bilo koju vrijednost nezavisne varijable jednaka je njenoj aritmetičkoj sredini $\bar{y} = b_0$. To ukazuje da ne postoji nikakva funkcionalna zavisnost između varijabli.

Vektor regresijskih koeficijenata izračuna se primjenom inverza matrice $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y},$$

odnosno

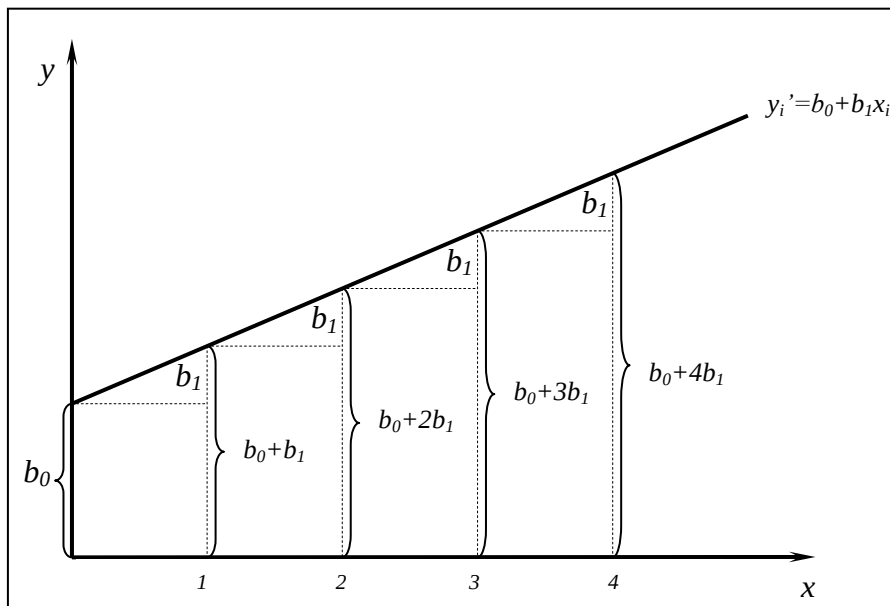
$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

Slijedi da je

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$
$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

Regresijski koeficijent b_0 je konstantna vrijednost koja je jednaka odsječku na osi zavisne varijable, odnosno vrijednost zavisne varijable ukoliko je vrijednost nezavisne varijable jednaka nuli (slika 3.1-4).

Regresijski koeficijent b_1 određuje nagib pravca, odnosno pokazuje koliko se u prosjeku linearno mijenja vrijednost zavisne varijable za jedinični porast vrijednosti nezavisne varijable (slika 3.1-4).



Slika 3.1-4. Grafički prikaz vrijednosti regresijskih koeficijenata b_0 i b_1

Vrijednosti koeficijenata b_0 i b_1 moguće je izračunati i formulom

$$b_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}},$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

gdje su

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n}$$

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}$$

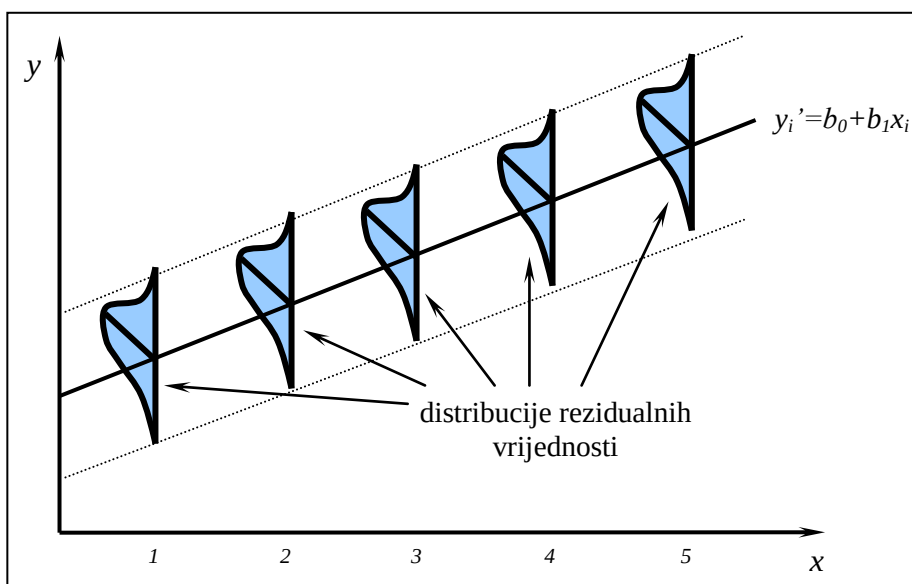
Rezidualni vektor $\mathbf{e}$ dobije se

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{b}$$

Elementi vektora $\mathbf{e}$ predstavljaju odstupanja izmjerenih vrijednosti zavisne varijable y_i od prognoziranih vrijednosti y_i' .

Jednadžba $y_i' = b_0 + b_1 x_i$ aproksimira odnos varijabli u smislu aritmetičke sredine. Stoga za vrijednosti vektora $\mathbf{e}$ vrijede sljedeće pretpostavke:

- očekivana vrijednost jednaka je nuli, odnosno prosječna pogreška u beskonačno dugoj seriji eksperimenata je nula: $E(e) = 0$, odnosno $E(y) = b_0 + b_1 x$
- varijanca distribucije reziduala e_i je konstantna za sve vrijednosti x_i
- distribucija vjerojatnosti reziduala e_i je normalna
- rezidualne vrijednosti su međusobno nezavisne.



Slika 3.1-5: Distribucije rezidualnih rezultata oko pravca regresije

Slika 3.1-5 prikazuje normalne distribucije rezidualnih rezultata za odgovarajuće vrijednosti u nezavisnoj varijabli oko pravca regresije.

Rezidualne vrijednosti dane su u mjernim jedinicama zavisne varijable. Radi jednostavnije interpretacije, moguće je izračunati i *relativne rezidualne vrijednosti* ($\hat{e}$)

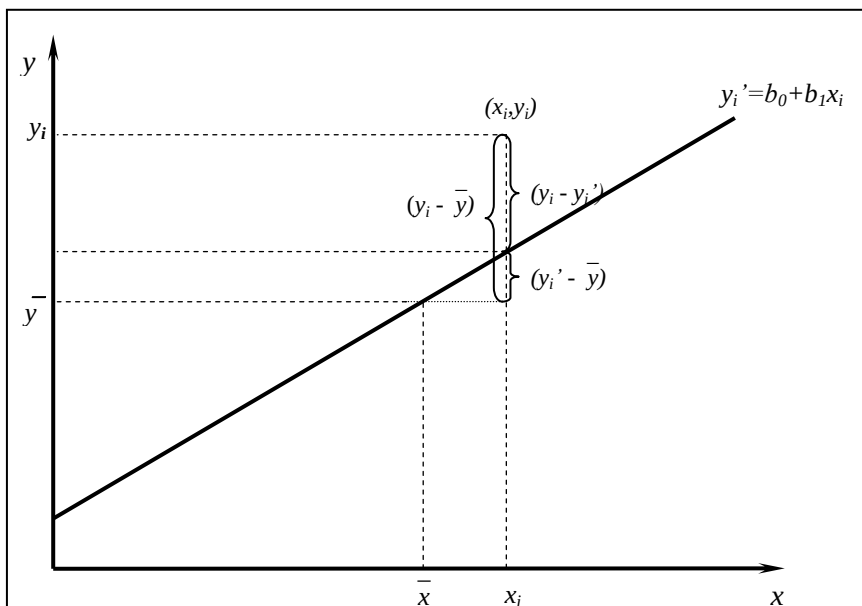
$$\hat{e}_i = \frac{y_i - y_i'}{y_i} \cdot 100$$

Promatra li se odstupanja izmjerenih vrijednosti zavisne varijable od aritmetičke sredine (slika 3.1-6), moguće je uočiti da je

$$(y_i - \bar{y}) = (y_i' - \bar{y}) + (y_i - y_i')$$

gdje je

- $(y_i - \bar{y})$ odstupanje izmjerenog rezultata entiteta i od aritmetičke sredine
- $(y_i' - \bar{y})$ odstupanje prognozirano rezultata entiteta i od aritmetičke sredine
- $(y_i - y_i')$ odstupanje izmjerenog rezultata entiteta i od prognoziranog, odnosno rezidualna vrijednost.



Slika 3.1-6. Odstupanje prognozirano i rezidualnog rezultata u odnosu na odstupanje izmjerenog rezultata od aritmetičke sredine

Kvadriranjem i zbrajanjem navedenih odstupanja n entiteta dobije se

$$\underbrace{t_{ss}}_{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \underbrace{p_{ss}}_{\sum_{i=1}^n (y_i' - \bar{y})^2} + \underbrace{r_{ss}}_{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i')^2},$$

gdje je

- $t_{ss} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ *ukupna suma kvadrata*
- $p_{ss} = \sum_{i=1}^n (y_i' - \bar{y})^2$ *prognozirana suma kvadrata*
- $r_{ss} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i')^2$ *rezidualna suma kvadrata*

Varijancu rezidualnih rezultata moguće je izračunati tako da se rezidualna suma kvadrata (r_{ss}) podijeli stupnjevima slobode $df=n-2$, pa je

$$\sigma_e^2 = \frac{r_{ss}}{df} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i')^2}{n-2}.$$

Drugi korijen iz varijance rezidualnih vrijednosti predstavlja *standardnu pogrešku prognoze* (σ_e).

Standardna pogreška prognoze (σ_e) predstavlja standardnu devijaciju raspršenosti izmjerenih rezultata oko pravca regresije, odnosno disperziju rezultata u odnosu na regresijsku funkciju kao aritmetičku sredinu. Stoga je standardna pogreška prognoze mjera reprezentativnosti regresijskog modela.

U standardnu pogrešku prognoze potrebno je izračunati i *korelaciju* (r) između rezultata varijabli x i y . Stupanj povezanosti dviju varijabli, koji je predstavljen u obliku regresijskog pravca, moguće je izračunati pomoću prognozirane (p_{ss}) ili rezidualne (r_{ss}) te totalne sume kvadrata (t_{ss}) prema formuli

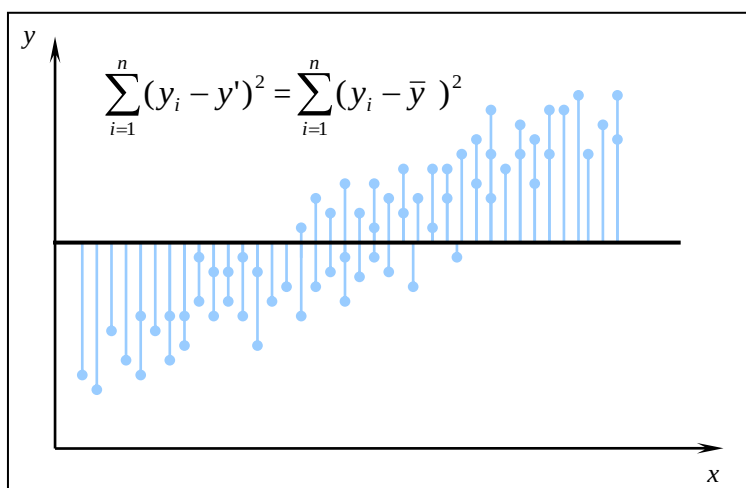
$$r^2 = \frac{p_{ss}}{t_{ss}} = \frac{t_{ss} - r_{ss}}{t_{ss}} = 1 - \frac{r_{ss}}{t_{ss}},$$

pa je

$$r = \sqrt{\frac{p_{ss}}{t_{ss}}} = \sqrt{1 - \frac{r_{ss}}{t_{ss}}}.$$

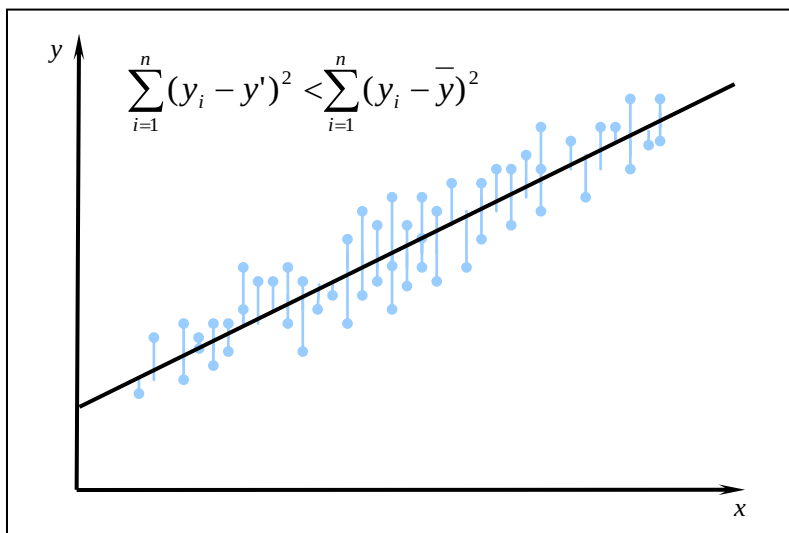
Kvadrat koeficijenta korelacije naziva se *koeficijent determinacije* i predstavlja količinu varijabiliteta zavisne varijable koja je objašnjiva nezavisnom varijablom. Koeficijent determinacije je mjera doprinosa nezavisne varijable prognozi zavisne varijable, odnosno pokazuje koliki je dio pogreške pri prognozi zavisne varijable reduciran korištenjem nezavisne varijable.

Primjerice, slika 3.1-7 prikazuje slučaj kada se nezavisna varijabla x ne koristi za prognozi zavisne varijable y . U tom je slučaju najbolja prognoza zavisne varijable njezina aritmetička sredina $\bar{y}$ ($y' = \bar{y}$). Tada je suma kvadrata rezidualnih odstupanja jednaka totalnoj sumi kvadrata, a koeficijent determinacije jednak je nuli.



Slika 3.1-7. Rezidualne vrijednosti kada se varijabla x ne koristi za prognozu rezultata varijable y

Ako se na istom skupu podataka metodom najmanjih kvadrata izračuna regresijski pravac (slika 3.1-8) tada je suma kvadrata rezidualnih odstupanja manja od totalne sume kvadrata, a koeficijent determinacije veći od nule.



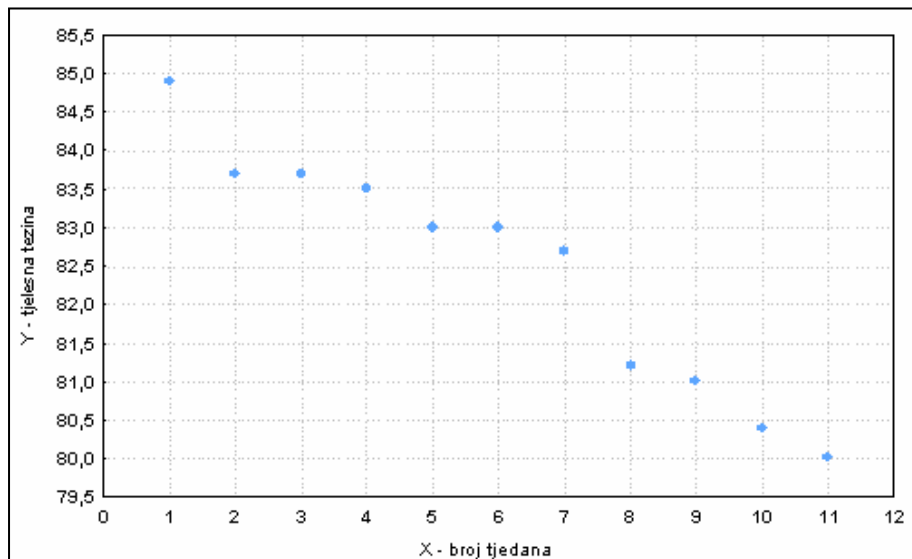
Slika 3.1-8. Rezidualne vrijednosti kada se po modelu najmanjih kvadrata izračuna regresijski pravac za prognozu rezultata varijable y na temelju rezultata varijable x

Stoga se koeficijent determinacije kreće od 0 do 1. Jednak je nuli ako je $r_{ss} = t_{ss}$. To znači da na veličinu ukupnog varijabiliteta zavisne varijable nezavisna varijabla nema nikakva utjecaja. Ako je $r_{ss} = 0$ koeficijent determinacije maksimalne vrijednosti (1), što znači da je cjelokupan varijabilitet zavisne varijable moguće pripisati utjecaju nezavisne varijable, odnosno rezultate u zavisnoj varijabli moguće je točno predvidjeti preko rezultata nezavisne varijable.

Primjer: Ispitanik *TT* prošao je 11-tjedni kineziološki tretman radi redukcije potkožnog masnog tkiva i poboljšanja funkcionalnih sposobnosti. Nakon svakog tjedna tretmana mjerena je *tjelesna težina* (x). Potrebno je utvrditi linearnu funkcionalnu zavisnost između nezavisne varijable x - broj tjedana kineziološkog tretmana i varijable y - tjelesna težina.

x	y
1	84,9
2	83,7
3	83,7
4	83,5
5	83,0
6	83,0
7	82,7
8	81,2
9	81,0
10	80,4
11	80,0

Prema rasporedu točaka (slika 3.1-9) u koordinatnom sustavu (korelacijskom dijagramu) moguće je uočiti da *jednadžba pravca* dobro aproksimira odnos između zavisne (y - *tjelesna težina*) i nezavisne varijable (x - broj *tjedana kineziološkog tretmana*).



Slika 3.1-9. Korelacijski dijagram (x - 11 tjedana kineziološkog tretmana, y - tjelesna težina)

Izračunavanje regresijskih koeficijenata po modelu najmanjih kvadrata za jednadžbu pravca moguće je uz pomoć formula

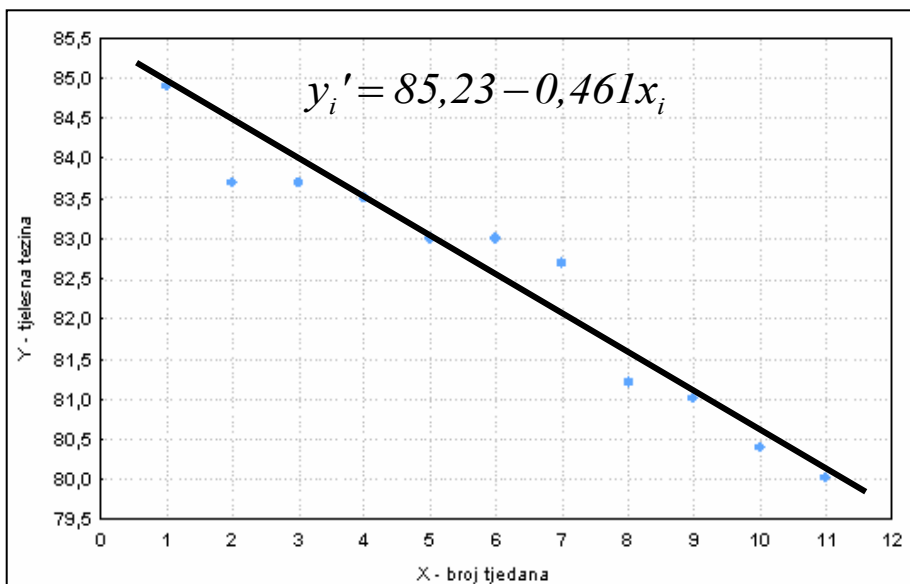
	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	1	84,9	1	84,9
	2	83,7	4	167,4
	3	83,7	9	251,1
	4	83,5	16	334,0
	5	83,0	25	415,0
	6	83,0	36	498,0
	7	82,7	49	578,9
	8	81,2	64	649,6
	9	81,0	81	729,0
	10	80,4	100	804,0
	11	80,0	121	880,0
Σ	66	907,1	506	5391,9
$\bar{x}$	6	82,464	46	490,173

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} =$$

$$b_0 = \frac{907,1 \cdot 506 - 66 \cdot 5391,9}{11 \cdot 506 - 66^2} = 85,23$$

$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} =$$

$$b_1 = \frac{11 \cdot 5391,9 - 66 \cdot 907,1}{11 \cdot 506 - 66^2} = -0,461$$



Slika 3.1-10. Regresijski pravac $y_i' = 85,23 - 0,461x_i$ dobiven prema modelu najmanjih kvadrata

Pomoću regresijskih koeficijenata izračunaju se prognozirani rezultati

x_i	$y_i' = 85,23 - 0,461x_i$
1	84,77
2	84,31
3	83,85
4	83,39
5	82,92
6	82,46
7	82,00
8	81,54
9	81,08
10	80,62
11	80,16

Standardna pogreška prognoze i koeficijent korelacije izračunaju se formulama

$y_i - y_i'$	$(y_i - y_i')^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
0,13	0,02	2,44	5,94
-0,61	0,37	1,24	1,53
-0,15	0,02	1,24	1,53
0,11	0,01	1,04	1,07
0,08	0,01	0,54	0,29
0,54	0,29	0,54	0,29
0,70	0,49	0,24	0,06
-0,34	0,12	-1,26	1,60
-0,08	0,01	-1,46	2,14
-0,22	0,05	-2,06	4,26
-0,16	0,03	-2,46	6,07
	$r_{ss} = 1,40$		$t_{ss} = 24,77$

3.1.2. Višestruka (multipla) regresijska analiza

U kineziološkim istraživanjima češći je slučaj da se utvrđuje funkcionalna zavisnost više nezavisnih varijabli i jedne zavisne varijable (primjerice, u mnogim kineziološkim istraživanjima utvrđivale su se relacije između antropoloških karakteristika i uspjeha u pojedinim kineziološkim aktivnostima). S obzirom na to da uspješnost u kineziološkim aktivnostima nije određena samo jednim, već uvijek skupom međusobno povezanih čimbenika, potreban je multivarijatni pristup kineziološkim problemima. Stoga se u kineziologiji, kao i drugim antropološkim znanostima, najčešće primjenjuju multivarijatne metode, među koje se ubraja i višestruka regresijska analiza.

Funkcionalnu zavisnost nezavisnih varijabli i jedne zavisne varijable moguće je izraziti višestrukom linearnom regresijskom jednadžbom

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m + e,$$

gdje je

- y zavisna varijabla
- $x_1 \dots x_m$ nezavisne varijable
- $b_0 \dots b_m$ regresijski koeficijenti
- e rezidualna varijabla.

Za izračunavanje regresijskih koeficijenata ($b_0, \dots, b_m$) potrebno je da svaka varijabla ima n vrijednosti, gdje je $n > m$; m -broj nezavisnih varijabli. To praktično znači da u nekom istraživanju treba izmjeriti najmanje $m+1$ entiteta kako bi se dobio dovoljan broj linearnih jednadžbi za izračunavanje $m+1$ regresijskih koeficijenata.

Dakle, ako n entiteta opišemo jednom zavisnom i m nezavisnim varijablama (gdje je $n > m$), dobije se sustav od n linearnih jednadžbi

$$y_i = b_0 + b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + \dots + b_mx_{im} + e_i,$$

gdje je $i = 1, \dots, n$ (n - broj entiteta, $n > m$),

odnosno, u matičnom obliku

$$\begin{array}{c} \overbrace{\mathbf{y}} \\ \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & \cdot & \cdot & x_{nm} \end{array} \right] \cdot \overbrace{\mathbf{b}} + \overbrace{\mathbf{e}} \\ \left[\begin{array}{c} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ b_m \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{array} \right], \end{array}$$

gdje je

- $\mathbf{y}$ vektor rezultata n entiteta u zavisnoj varijabli
- $\mathbf{X}$ matrica (reda $n \times m + 1$) rezultata entiteta u m nezavisnih varijabli
- $\mathbf{b}$ vektor $m+1$ regresijskih koeficijenata
- $\mathbf{e}$ vektor rezidualnih rezultata n entiteta.

Metodom najmanjih kvadrata izračunaju se regresijski koeficijenti $\mathbf{b}$ za jednadžbu

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{b}$$

uz uvjet da suma kvadrata rezidualnih vrijednosti, odnosno odstupanja izmjerenih vrijednosti y_i od prognoziranih y_i' bude minimalna.

Sustav normalnih jednadžbi³ dobije se množenjem gornjeg izraza s $\mathbf{X}^T$ ($\mathbf{X}^T$ - transponirana matrica $\mathbf{X}$)

$$\mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b}$$

Ako dobiveni izraz pomnožimo inverzom matrice $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, dobijemo

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b}.$$

Kako je $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{I}$, gdje je $\mathbf{I}$ - matrica identiteta, a množenje bilo koje matrice matricom identiteta ostavlja matricu nepromijenjenom (kao broj 1 u skalarnoj algebri), dobije se

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

vektor $\mathbf{b}$ sa $m+1$ regresijskih koeficijenata u kojemu b_0 predstavlja vrijednost zavisne varijable kada su vrijednosti nezavisnih varijabli jednake nuli, a

³ Normalne jednadžbe su linearne po koeficijentima $b_0, \dots, b_m$.

b_j ($j = 1, \dots, m$) su regresijski koeficijenti koji predstavljaju veličine promjena vrijednosti zavisne varijable za jedinični porast vrijednosti nezavisne varijable x_j , uz uvjet da su vrijednosti preostalih nezavisnih varijabli konstantne; ako se vrijednost nezavisne varijable x_j poveća za jedan (uz uvjet da se ne mijenjaju vrijednosti preostalih nezavisnih varijabli), vrijednost zavisne varijable povećat će se u prosjeku za vrijednost b_j .

Rezidualni vektor $\mathbf{e}$ dobije se oduzimanjem prognoziranih rezultata entiteta od izmjerenih

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{b}.$$

Rezidualne vrijednosti dane su u mjernim jedinicama zavisne varijable. Radi jednostavnije interpretacije moguće je izračunati i *relativne rezidualne vrijednosti*

$$\hat{e}_i = \frac{y_i - y_i'}{y_i} 100.$$

Standardna pogreška prognoze (σ_e), odnosno standardna devijacija izmjerenih rezultata u odnosu na prognozirane je

$$\sigma_e^2 = \sqrt{\frac{r_{ss}}{df}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i')^2}{n - m - 1}}$$

Ako se rezultati dobiveni mjerenjem n entiteta u zavisnoj varijabli i m nezavisnih varijabli standardiziraju, odnosno transformiraju u standardiziranu skalu s očekivanim vrijednostima $E(z_i)=0$ i $E(z_i^2)=1$, onda je *standardizirani* oblik linearne regresijske jednadžbe

$$\mathbf{k} = \beta_1 \mathbf{Z}_1 + \beta_2 \mathbf{Z}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{Z}_m + \boldsymbol{\varepsilon},$$

odnosno, u matičnom obliku

$$\begin{matrix} \mathbf{k} = & \mathbf{Z} & \mathbf{\beta} & + & \boldsymbol{\varepsilon} \\ \left\{ \begin{matrix} k_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_n \end{matrix} \right\} = & \left[\begin{matrix} z_{11} & \cdot & \cdot & z_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & \cdot & \cdot & z_{nm} \end{matrix} \right] \cdot & \left\{ \begin{matrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_m \end{matrix} \right\} & + & \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{matrix} \right\}, \end{matrix}$$

gdje je

- $\mathbf{k}$ vektor n standardiziranih rezultata entiteta u zavisnoj varijabli
- $\mathbf{Z}$ matrica (reda $n \times m$) n standardiziranih rezultata entiteta u m nezavisnih varijabli
- $\boldsymbol{\beta}$ vektor m standardiziranih regresijskih koeficijenata
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor standardiziranih rezidualnih rezultata n entiteta.

Analogno postupku za izračunavanje regresijskih koeficijenata pod modelom najmanjih kvadrata moguće je izračunati i standardizirane regresijske koeficijente (β_j). Množenjem izraza $\mathbf{k} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}$ sa $\mathbf{Z}^T n^{-1}$ dobije se

$$\underbrace{\mathbf{Z}^T \mathbf{k} n^{-1}}_{\mathbf{r}} = \underbrace{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} n^{-1}}_{\mathbf{R}} \boldsymbol{\beta},$$

gdje je

- $\mathbf{Z}^T \mathbf{k} n^{-1} = \mathbf{r}$ vektor korelacija zavisne i nezavisnih varijabli
- $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} n^{-1} = \mathbf{R}$ matrica interkorelacija nezavisnih varijabli.

Dakle, može se pisati da je

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \boldsymbol{\beta}.$$

Ako navedeni izraz pomnožimo inverzom matrice $\mathbf{R}$, dobijemo

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\beta}.$$

S obzirom da je $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ - matrica identiteta čije množenje bilo kojom matricom ostavlja matricu nepromijenjenom), onda je

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} = \boldsymbol{\beta}.$$

Standardizirani regresijski koeficijenti β_j ($j=1, \dots, m$) predstavljaju veličinu promjene zavisne varijable izraženu u dijelovima standardne devijacije za jedinični porast standardizirane vrijednosti nezavisne varijable z_j , uz uvjet da su vrijednosti preostalih nezavisnih varijabli konstantne. Ako se vrijednost nezavisne varijable z_j poveća za jednu standardnu devijaciju (uz uvjet da se ne mijenjaju vrijednosti preostalih nezavisnih varijabli), vrijednost zavisne varijable povećat će se u prosjeku za β_j standardnih devijacija. Budući da su standardizirani regresijski koeficijenti izračunati na standardiziranim varijablama, oni predstavljaju relativan doprinos svake nezavisne varijable prognozi zavisne varijable pa se smatraju koeficijentima utjecaja.

Vektor rezidualnih vrijednosti ε dobije se oduzimanjem vektora standardiziranih prognoziranih rezultata k' od vektora standardiziranih izmjerenih rezultata k

$$\varepsilon = k - k' = k - Z \beta$$

Koeficijent determinacije multiple korelacije izračunava se prema formuli

$$\rho^2 = \beta^T r,$$

odnosno

$$\rho^2 = \sum_{j=1}^m \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \dots + \beta_m r_m = \sum_{j=1}^m \beta_j r_j = \sum_{j=1}^m p_j,$$

pa je multipla korelacija jednaka $\rho = \sqrt{\rho^2}$.

Multipla korelacija predstavlja mjeru povezanosti skupa nezavisnih varijabli i zavisne varijable. Ako je vrijednost multiple korelacije jednaka nuli ($\rho = 0$), tada skupom nezavisnih varijabli nije moguće predviđati zavisnu varijablu. Ako je multipla korelacija maksimalne vrijednosti ($\rho = 1$), tada je cjelokupan varijabilitet zavisne varijable moguće pripisati utjecaju nezavisnih varijabli, odnosno rezultate u zavisnoj varijabli moguće je točno predvidjeti pomoću nezavisnih varijabli. Dakle, multipla korelacija pokazuje kolika je vrijednost svih nezavisnih varijabli u predviđanju (objašnjenju) neke zavisne varijable.

Vrijednosti p_j predstavljaju varijabilitet zajednički pojedinoj nezavisnoj varijabli i zavisnoj varijabli, odnosno predstavljaju relativni udio svake nezavisne varijable u objašnjenom varijabilitetu zavisne varijable. Suma svih p_j jednaka je ρ^2 te se naziva *parcijalni koeficijent determinacije*. Ako se p_j pomnoži sa 100, dobije se postotak zajedničke varijance pojedine nezavisne i zavisne varijable. Analizom *parcijalnih koeficijenata determinacije* (p_j) moguće je otkriti tzv. *supresore*. Primjerice, ako je p_j negativnog predznaka, a pripadajući standardizirani regresijski koeficijent (β_j) ima visoku vrijednost, onda je varijabla j supresor). Supresor je ona nezavisna varijabla koja je u nultoj ili vrlo niskoj korelaciji sa zavisnom varijablom, a ima visoku vrijednost standardiziranog regresijskog koeficijenta (β_j).

Za potpuniji uvid u mehanizme djelovanja čimbenika na istraživanu pojavu moraju se izračunati još neki pokazatelji:

- Ako iz inverza korelacijske matrice ($\mathbf{R}^{-1}$) izdvojimo recipročnu vrijednost dijagonale, dobijemo matricu $\mathbf{S}^2$

$$\mathbf{S}^2 = (\text{dijag} \mathbf{R}^{-1})^{-1}$$

čije vrijednosti predstavljaju neobjašnjene dijelove varijance svake nezavisne varijable u odnosu na ostale.

- Operacijom

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{S}^2$$

dobije se dijagonalna matrica $\mathbf{D}^2$ čiji elementi predstavljaju *koeficijente determinacije*, odnosno, *kvadrate multiplih korelacija* pojedine nezavisne varijable s ostalima ($\mathbf{I}$ je matrica identiteta reda $m \times m$; m -broj nezavisnih varijabli). Ako je koeficijent determinacije pojedine varijable (d_j^2) visok, to znači da ta varijabla ne može bitno utjecati na prognozu zavisne varijable (povećanje multiple korelacije) jer je veliki dio njezine varijance sadržan u ostalim varijablama. Stoga valja zaključiti da nezavisne varijable trebaju biti u međusobno što manjim korelacijama, ali istodobno u što većoj korelaciji sa zavisnom varijablom.

Izuzetak od ovog pravila su supresorske varijable jer mogu povećati multiplu korelaciju iako su u niskim korelacijama sa zavisnom varijablom, a u visokim s nekom nezavisnom varijablom. Supresorska varijabla povećava multiplu korelaciju jer prigušuje (supresira) dio varijance koja nije povezana sa zavisnom varijablom neke nezavisne varijable.

- Korelacija između dviju varijabli iz koje je isključen utjecaj svih ostalih varijabli zove se *parcijalna korelacija*. Operacijom

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}$$

izračuna se matrica $\mathbf{P}$ koje su izvandijagonalni elementi parcijalne korelacije. Ako su parcijalne korelacije niske, a korelacije visoke, to znači da je međusobna povezanost dviju varijabli uzrokovana utjecajem drugih.

3.1.3. Testiranje značajnosti regresijskog modela

S obzirom na to da je multipla korelacija mjera doprinosa svih nezavisnih varijabli objašnjenju zavisne varijable, pomoću *F*-testa testiramo njezinu statistička značajnost. Multiplu korelaciju uz hipoteze

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

testiramo prema tablici 3.1-2.

Tablica 3.1-2: F - test (ANOVA)

	Stupnjevi slobode (df)	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	F – vrijednost
Prognozirana	$df_p = m$	$p_{ss} = \sum_{i=1}^n (y'_i - \bar{y})^2$	$mp_{ss} = \frac{p_{ss}}{m}$	$F = \frac{mp_{ss}}{mr_{ss}}$
Rezidualna	$df_r = n - m - 1$	$r_{ss} = \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2$	$mr_{ss} = \frac{r_{ss}}{n - m - 1}$	
Ukupna	$df_t = n - 1$	$t_{ss} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$		

Izračunata *F*-vrijednost uspoređuje se s *kritičnom* koja se dobije uz pomoć *F*-distribucije za određeni broj stupnjeva slobode i pogrešku zaključivanja *p*. *Kritična F-vrijednost* očitava se iz tablice (vidi tablicu C str. 318-321) tako da se broj stupnjeva slobode df_p očitava na gornjem rubu tablice (stupci), a df_r na lijevom rubu tablice (reci). Na mjestu križanja stupca i retka očitava se *kritična F-vrijednost*.

Ako je izračunata *F*-vrijednost manja od *kritične*, prihvaća se nulta hipoteza (H_0) i zaključuje da nema statistički značajne povezanost između analiziranog skupa nezavisnih varijabli i zavisne varijable.

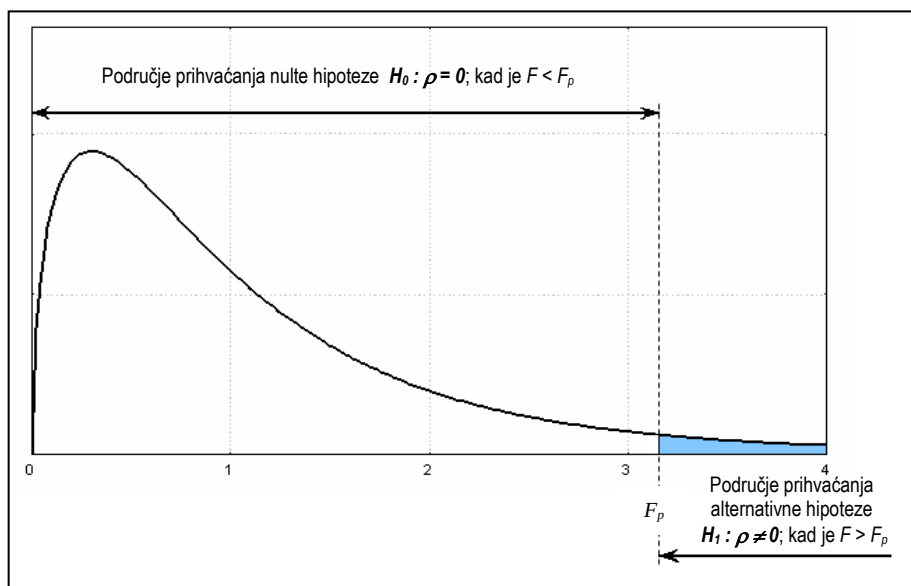
$$F < F_p \Rightarrow H_0 : \rho = 0.$$

Ako je izračunata *F*-vrijednost veća od *kritične* odbacuje se nulta hipoteza (H_0) i prihvaća alternativna (H_1) te se zaključuje da postoji

statistički značajna povezanost između skupa nezavisnih varijabli i zavisne varijable uz pogrešku p (slika 3.1-9).

$$F > F_p \Rightarrow H_1 : \rho \neq 0.$$

U tom slučaju testira se statistička značajnost utjecaja pojedine nezavisne varijable.



Slika 3.1-9. F – distribucija

Za testiranje značajnosti pojedinog regresijskog koeficijenta b_j postavljaju se hipoteze

$$H_0 : b_j = 0$$

$$H_1 : b_j \neq 0$$

Ako je vrijednost regresijskog koeficijenta populacije B_j jednaka nuli, onda je područje prihvatanja nulte hipoteze

$$0 \pm t_p \cdot \sigma_{b_j},$$

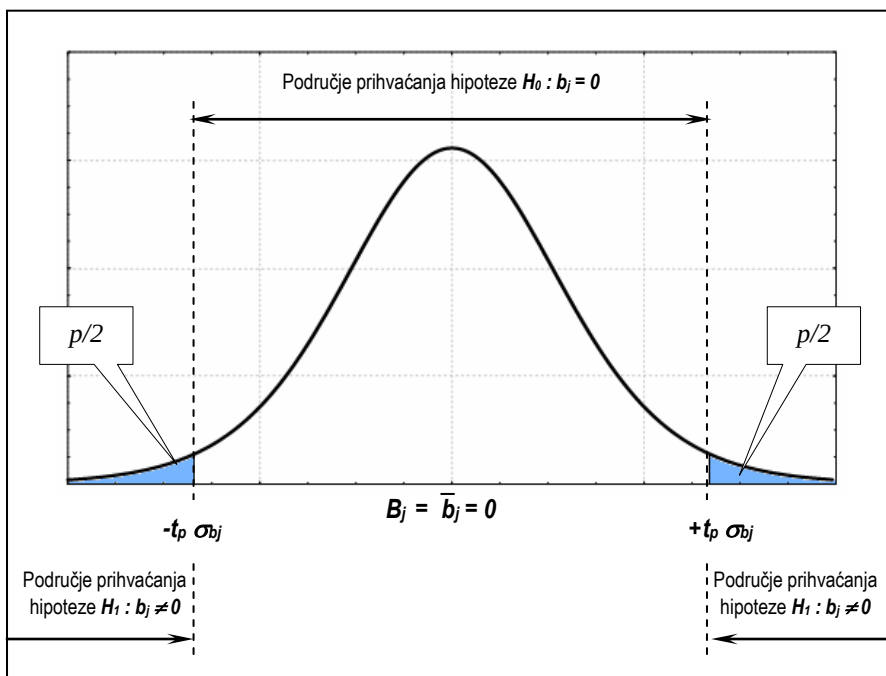
gdje je

- t_p kritična t -vrijednost koja se dobije pomoću t -distribucije za pogrešku p i broja stupnjeva slobode $df = n - m - 1$
- σ_{b_j} standardna pogreška regresijskog koeficijenta b_j , odnosno standardna devijacija regresijskih koeficijenata uzoraka b_j oko vrijednosti regresijskog koeficijenta populacije B_j

Standardna pogreška regresijskog koeficijenta b_j izračuna se formulom

$$\sigma_{b_j} = \sigma_e \sqrt{w_{jj}},$$

gdje je σ_e standardna pogreška prognoze, a w_{jj} ($j=1, \dots, m$; m -broj nezavisnih varijabli) dijagonalni element matrice $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ (matematički dokaz u knjizi Ž. Pauše: Uvod u matematičku statistiku, str. 297-298).



Slika 3.1-10. Distribucija slučajnog variranja regresijskog koeficijenta uzorka b_j ako je regresijski koeficijent populacije jednak nuli ($B_j = 0$)

Ako se vrijednost regresijskog koeficijenta uzorka b_j kreće u intervalu $0 \pm t_p \cdot \sigma_{b_j}$ (slika 3.1.10), tada prihvaćamo nultu hipotezu (H_0). Ako je regresijski koeficijent uzorka b_j izvan tog intervala, prihvaća se alternativna hipoteza (H_1) uz pogrešku p te se zaključuje: regresijski koeficijent je statistički značajan, odnosno vjerojatnost da je slučajno različit od nule manja je od p .

Ako se regresijski koeficijent b_j podijeli standardnom pogreškom σ_{b_j} , dobije se *t-vrijednost*

$$t = \frac{b_j}{\sigma_{b_j}}$$

Ako je $|t| < t_p$ prihvaćamo nultu hipotezu (H_0), odnosno ako je $|t| > t_p$, odbacujemo nultu hipotezu i prihvaćamo alternativnu (H_1) uz pogrešku p .

3.1.4. Provjera kvalitete regresijskog modela

Postupci kojima se utvrđuje kvaliteta odabranog regresijskog modela (sa svrhom da se poboljša) spadaju u području *regresijske dijagnostike*. Većina se odnosi na rezidualna odstupanja, te se ubrajaju u područje *rezidualne analize*. Rezidualna odstupanja, odnosno pogreške prognoze predstavljaju razliku između originalnih i prognoziranih rezultata. Pretpostavlja se da:

- očekivana vrijednost jednaka je nuli, odnosno prosječna pogreška u beskonačno dugoj seriji eksperimenata jednaka je nuli
- varijanca distribucije reziduala konstantna je za sve vrijednosti u zavisnoj varijabli
- je distribucija vjerojatnosti reziduala je normalna
- reziduali udruženi s jednom vrijednošću zavisne varijable nemaju utjecaja na rezidualne udružene s drugom vrijednošću zavisne varijable, odnosno nema sistematske kovarijacije rezidualnih odstupanja sa zavisnim i nezavisnim varijablama.

Analize rezidualnih odstupanja odnose se na provjeru navedenih karakteristika. Jedan od najčešće korištenih testova za provjeru kvalitete regresijskog modela odnosi se na provjeru korelacije između rezidualnih odstupanja. Ako su vrijednosti rezidualnih odstupanja međusobno korelirane, govori se o pojavi *autokorelacije*.

Razlikujemo koeficijent autokorelacije nultog, prvog, odnosno j -tog reda. Koeficijent autokorelacije nultog reda ρ_0 jednak je jedinici jer je korelacija između rezultata istih entiteta u paru jednaka jedan. Za procjenu kvalitete regresijskog modela koristi se koeficijent autokorelacije prvog reda koji se izračuna za $n-1$ parova rezidualnih odstupanja $(e_2, e_1), (e_3, e_2), \dots, (e_n, e_{n-1})$ formulom

$$\rho_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t \cdot e_{t-1})}{\sum_{t=1}^n (e_t)^2}$$

Najčešće primjenjivan test za testiranje autokorelacija rezidualnih odstupanja prvog reda je *Durbin-Watsonov test* (Durbin i Watson, 1951). Durbin-Watsonovim testom izračuna se veličina d koja predstavlja omjer zbroja kvadrata prvih razlika rezidualnih odstupanja i zbroja kvadrata rezidualnih odstupanja

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}.$$

Nulta hipoteza pretpostavlja nepostojanje autokorelacije, a alternativna postojanje autokorelacije (pozitivne ili negativne). Hipoteze se testiraju na temelju rezultata testa d i kritične vrijednosti d_L i d_U , koje se odrede uz određenu razinu značajnosti i stupnjeve slobode $df_1 = n$; n -broj entiteta, $df_2 = m$; m -broj nezavisnih varijabli. Ako je

- $d < d_L$, prihvaća se hipoteza o postojanju pozitivne autokorelacije
- $d > d_U$, prihvaća se nulta hipoteza o nepostojanju autokorelacije,
- $d_L < d < d_U$, test ne dovodi do zaključka.

Negativna korelacija testira se na isti način, s time što se s kritičnim vrijednostima d_L i d_U uspoređuje vrijednost $(4 - d)$. Osim provjere kvalitete modela pomoću *Durbin-Watsonova testa*, ispitivanje je moguće i na temelju različitih vrsta rezidualnih odstupanja i raznih vrsta grafikona rasipanja rezidualnih vrijednosti. Tim postupcima moguće je identificirati ekstremne rezultate entiteta (*outliers*) koji uvelike mogu utjecati na finalni rezultat. Stoga pojavu tih vrijednosti treba objasniti, a nerijetko se može utvrditi da je riječ o pogrešnom rezultatu entiteta u određenoj varijabli. Ti su postupci su sadržani u svim poznatijim programskim paketima za statističko-grafičku obradu podataka (primjerice, *STATISTICA*, *SPSS*, i dr).

Napomena:

Dodatne informacije o gradivu iznesenom u ovom poglavlju mogu se pronaći u knjizi I. Šošić (2004). Primjenjena statistika, poglavlje 13.7 Elementi regresijske dijagnostike (514-531). Zagreb: Školska knjiga.

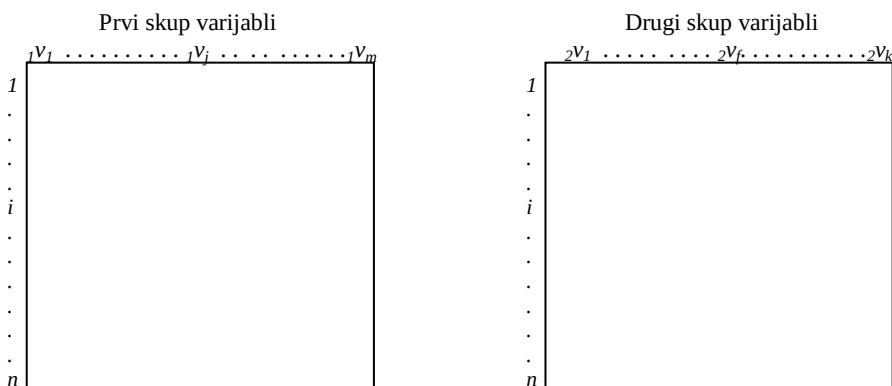
3.1.5. Dekompozicija varijance jednog skupa varijabli drugim skupom varijabli

Regresijska analiza može se koristiti i za dekompoziciju varijance nekih varijabli, nakon čega se na dekomponiranim varijablama mogu provoditi različite analize, zavisno od cilja istraživanja. Primjerice, ako se želi parcijalizirati utjecaj jednog skupa varijabli na neki drugi skup varijabli, onda je to moguće učiniti na način da se utvrde relacije drugog skupa varijabli s varijablama prvog skupa te dekomponiraju rezultati entiteta u prvom skupu varijabli na zavisni dio i dio koji je nezavisan od drugog skupa varijabli. Dakle, svaki se rezultat nekog entiteta u određenoj varijabli može dekomponirati na dio koji je zavisan od nekog drugog skupa varijabli i dio koji predstavlja vrijednost tog entiteta nezavisnu od tog skupa varijabli. Stoga se može napisati da je

$$v_i = v_i^{(p)} + v_i^{(r)},$$

gdje je

- v_i rezultat entiteta i u varijabli v
- $v_i^{(p)}$ rezultat entiteta i u varijabli v koji zavisi od nekog drugog skupa varijabli
- $v_i^{(r)}$ rezultat entiteta i u varijabli v koji ne zavisi od nekog drugog skupa varijabli.



Slika 3.1-11. Rezultati n entiteta u dva skupa varijabli

gdje je $1, \dots, n$ isti skup entiteta opisan prvim $(1v_1, \dots, 1v_m)$ i drugim $(2v_1, \dots, 2v_k)$ skupom varijabli.

Prema slici 3.1-11, varijancu svake varijable iz prvog skupa na zavisnu (prognoziranu) i nezavisnu (rezidualnu) varijancu u odnosu na drugi skup varijabli moguće je dekomponirati nizom regresijskih analiza u kojima bi se svaka varijabla iz prvog skupa postavila kao kriterijska, dok bi skup prediktorskih varijabli činile sve varijable drugog skupa.

Ako pretpostavimo da je ${}_1\mathbf{v}_j$ jedna od varijabli prvog skupa izračunata kao linearna kombinacija svih varijabli drugog skupa, znači da se varijabla ${}_1\mathbf{v}_j$ može prikazati kao

$${}_1\mathbf{v}_j = b_0 + b_1 \cdot {}_2\mathbf{v}_1 + b_2 \cdot {}_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_k \cdot {}_2\mathbf{v}_k + {}_1\mathbf{e}_j,$$

gdje je:

- ${}_1\mathbf{v}_j$ neka od m varijabli prvog skupa ($j = 1, \dots, m$)
- ${}_2\mathbf{v}_1, \dots, {}_2\mathbf{v}_k$ k varijabli drugog skupa
- $b_0, \dots, b_k$ koeficijenti linearne regresije
- ${}_1\mathbf{e}_j$ pogreške procjene.

Time su određene vrijednosti kojima se može izvršiti dekompozicija svake varijable prvog skupa

$${}_1\mathbf{v}_j = {}_1\mathbf{v}_j^{(p)} + {}_1\mathbf{v}_j^{(r)},$$

gdje je

$${}_1\mathbf{v}_j^{(p)} = b_0 + b_1 \cdot {}_2\mathbf{v}_1 + b_2 \cdot {}_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_k \cdot {}_2\mathbf{v}_k,$$

a

$${}_1\mathbf{v}_j^{(r)} = {}_1\mathbf{e}_j = {}_1\mathbf{v}_j - {}_1\mathbf{v}_j^{(p)},$$

gdje je

- ${}_1\mathbf{v}_j^{(p)}$ je zavisni (prognozirani) dio varijable j prvog skupa od k varijabli drugog skupa
- ${}_1\mathbf{v}_j^{(r)}$ je nezavisni (rezidualni) dio varijable j prvog skupa od k varijabli drugog skupa.

Prema tome, serijom od m regresijskih analiza moguće je rezultate ispitnika prvog skupa dekomponirati na zavisne (prognozirane) i nezavisne (rezidualne) od varijabli drugog skupa. Na temelju tako dekomponiranih varijabli mogu se poduzimati daljnje analize. Primjerice, ako se želi utvrditi utjecaj određenog skupa motoričkih varijabli (prvi skup varijabli) na uspješnost u nekom sportu (kriterijska

varijabla), uz pretpostavku da su entiteti izjednačeni po morfološkim varijablama (drugi skup varijabli), onda je potrebno utvrditi utjecaj morfoloških varijabli (drugi skup varijabli) na motoričke varijable (prvi skup varijabli) te dekomponirati rezultate entiteta na dio zavisen o skupu morfoloških varijabli i dio nezavisan od njih te nakon toga utvrditi relacije između nezavisnog dijela rezultata entiteta u motoričkim varijablama i uspjeha u nekom sportu. Dakle, utvrditi utjecaj skupa motoričkih varijabli na uspjeh u određenom sportu nakon parcijalizacije utjecaja morfoloških varijabli. Ovaj postupak transformacije varijabli moguće je ubrzati primjenom algoritma za dekompoziciju varijance jednog skupa varijabli drugim skupom varijabli, utemeljenog na regresijskoj teoriji, a koje Momirović, Štalec i Zakrajšek (1973) nazivaju *generalne image transformacije*.

Neka su X_1 matrica podataka entiteta iz skupa $E=\{e_i; i=1, \dots, n\}$ opisanih skupom kvantitativnih varijabli $V_1=\{v_j; j=1, \dots, m_1\}$, a X_2 matrica podataka istih entiteta opisanih skupom kvantitativnih varijabli $V_2=\{v_f; f=1, \dots, m_2\}$.

Centrirani podaci iz matrica X_1 i X_2 dobije se operacijom

$$X_{c1} = X_1 - \mathbf{1}m_1^T \quad X_{c2} = X_2 - \mathbf{1}m_2^T,$$

gdje su $m_1=X_1^T \mathbf{1}n^{-1}$ i $m_2=X_2^T \mathbf{1}n^{-1}$ vektori aritmetičkih sredina prvog i drugog skupa varijabli.

Matrice kovarijanci za varijable prvog i drugog skupa izračunaju se operacijom

$$C_1 = X_{c1}^T X_{c1} n^{-1} \quad C_2 = X_{c2}^T X_{c2} n^{-1},$$

a matrica kroskovarijanci operacijom

$$C_{21} = X_{c2}^T X_{c1} n^{-1}$$

Prema kriteriju najmanjih kvadrata moguće je izračunati regresijske koeficijente

$$B_1 = C_2^{-1} C_{21},$$

temeljem kojih je moguće izračunati varijable prvog skupa, procijenjene prema modelu najmanjih kvadrata varijablama drugog skupa

$$\mathbf{X}_1' = \mathbf{X}_{c2} \mathbf{B} + \mathbf{1} \mathbf{m}_1^T$$

te rezidualne (nezavisne) rezultate entiteta u varijablama prvog skupa

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1'$$

Isti postupak moguće je primijeniti i na standardiziranim podacima.

Taj postupak često se primjenjuje pri utvrđivanju efekata primijenjenog eksperimentalnog tretmana. Naime, da bi se utvrdio utjecaj nekog tretmana, najčešće se koristi eksperimentalni nacrt u kojem jedna grupa nije podvrgnuta tretmanu (kontrolna grupa), a druga mu se podvrgava (eksperimentalna grupa). Ako su kontrolna i eksperimentalna grupa slučajno odabrane iz iste populacije, a to znači da se ne razlikuju statistički značajno u inicijalnom stanju, onda se značajnost promjena izazvanih primijenjenim tretmanom može utvrđivati preko razlike vektora aritmetičkih sredina u finalnom stanju. Međutim, ako se kontrolna i eksperimentalna grupa statistički značajno razlikuju u inicijalnom stanju, onda navedeni postupak nije opravdan. U tom slučaju potrebno je neutralizirati utjecaj razlika kontrolne i eksperimentalne grupe u inicijalnom stanju na razlike u finalnom stanju te nakon toga utvrđivati značajnost razlika vektora aritmetičkih sredina u finalnom stanju. To se može spomenutim postupkom i to tako da se varijable prvog mjerenja kontrolne i eksperimentalne grupe promatraju kao prediktorski (nezavisni) skup, a varijable koje opisuju stanje entiteta kontrolne i eksperimentalne grupe u drugom mjerenju kao kriterijski (zavisni) skup. Time se dobiju rezultati entiteta kontrolne i eksperimentalne grupe u drugom mjerenju u promatranom skupu varijabli koji su nezavisni (rezidualni) od varijabli prvog mjerenja. Na tako dobivenim rezidualnim rezultatima moguće je utvrđivati značajnost promjena izazvanih primijenjenim tretmanom preko razlika vektora aritmetičkih sredina eksperimentalne i kontrolne grupe u finalnom stanju. Taj postupak obično se naziva *analiza kovarijance*. U okviru analiza kovarijance obično se izvodi univarijatna i multivarijatna analiza varijance ili pak diskriminacijska analiza izvedena tako da se iz analiziranog skupa varijabli parcijalizira utjecaj nekog drugog skupa varijabli koji ima logički status smetnji (Momirović, Gredelj i Sirovicza, 1977).

3.2.

Faktorska analiza

U znanstvenim istraživanjima često se nastoje obuhvatiti brojne pojave koje su u međusobnim vezama. Rezultat korelacijske analize u takvim istraživanjima je

$$\frac{m(m-1)}{2}$$

koeficijenata korelacije (m -broj varijabli). Ako je, primjerice, broj varijabli 50, potrebno je analizirati 1225 koeficijenata korelacije. Velik broj koeficijenata korelacije otežava dublji i jasniji uvid u zakonitosti i strukturu proučavanih pojava pa je u znanstvenom radu postavljen princip *parsimonije* (štednje). Taj princip zahtijeva da se veći broj pojava objasni što manjim brojem osnovnih čimbenika (faktora). U tu se svrhu koristi *faktorska analiza*. Začetnikom faktorske analize smatra se Charles Edward Spearman, koji je prvi postavio dvofaktorsku teoriju inteligencije izrazivši je jednadžbom:



Charles Edward Spearman (1863. – 1945.), engleski psiholog. Nakon što je proveo 15 godina kao časnik u britanskoj vojsci u Indiji, posvetio se studiju fiziologije, psihologije i filozofije u Njemačkoj. Tijekom studiranja 1904. godine publicirao je znameniti rad *General Intelligence*

Objectively Determined and Measured u kojem je predstavio svoju dvofaktorsku teoriju inteligencije. Ovaj rad smatra se iznimno važnim (ne samo u psihologiji) jer je Spearman za empirijsku provjeru svoje teorije razvio prvi model *faktorske analize*, čime je pokrenuo novi metodološki pristup antropološkim istraživanjima.

<http://www.psych.usyd.edu.au/differences5/scholars/spearman.html>

$$z_j = a_j g + s_j,$$

gdje je

- z_j manifestna varijabla j
- a_j koeficijent utjecaja generalnog faktora g na manifestnu varijablu j
- g generalni faktor
- s_j faktor specifičan samo za manifestnu varijablu j .

Za empirijsku provjeru svog teoretskog koncepta Spearman je razvio prvi model faktorske analize (Spearman, 1904).

Osim Spearmana, značajnu ulogu u razvoju faktorske analize imao je američki psihometričar Louis Leon Thurstone, koji je za svoju teoriju o postojanju više primarnih mentalnih sposobnosti razvio *multifaktorsku analizu* (Thurstone, 1931). Danas je faktorska analiza¹ zajedničko ime za više metoda kojima je zajednički cilj kondenzacija većeg broja *manifestnih varijabli*, među kojima postoji povezanost (korelacija), na manji broj *latentnih dimenzija ili faktora*. *Manifestne varijable* dobivene su mjerenjem, dok *latentne dimenzije* nisu izravno mjerljive postojećim mjernim instrumentima, već se dobivaju linearnom kombinacijom manifestnih varijabli. Primjerice, latentne dimenzije mogu biti motoričke sposobnosti

Znanstveni članak C.E. Spearmana: *General Intelligence Objectively Determined and Measured* objavljen je u časopisu *American Journal of Psychology* 1904. godine.

"GENERAL INTELLIGENCE," OBJECTIVELY DETERMINED AND MEASURED.

By C. SPEARMAN.

TABLE OF CONTENTS.

	Page
Chap. I. Introductory.	202
1. Signs of Weakness in Experimental Psychology	202
2. The Cause of this Weakness	204
3. The Identities of Science	205
4. Scope of the Present Experiments	205
Chap. II. Historical and Critical	206
1. History of Previous Researches	219
2. Conclusions to be drawn from these Previous Researches	222
3. Criticism of Prevalent Working Methods	225
Chap. III. Preliminary Investigation	225
1. Obviation of the Four Faults Quoted	225
2. Definition of the Correspondence Sought	227
3. Irrelevancies from Practice	228
(a) Pitch	232
(b) Sight	233
(c) Weight	233
(d) Intelligence	233
4. Irrelevancies from Age	235
5. Irrelevancies from Sex	236
6. The Elimination of these Irrelevancies	238
7. Alterations and Equivalencies	241
Chap. IV. Description of the Present Experiments	241
1. Choice of Laboratory Psychics	242
2. Instruments	243
(a) Sound	244
(b) Light	245
(c) Weight	246
3. Modes of Procedure	246
(a) Experimental Series I	247
(b) " " II	247
(c) " " III	248
(d) " " IV	249
(e) " " V	249
4. The Estimation of Intelligence	249
5. Procedure in Deducing Results	252
(a) Method of Correlation	252
(b) Elimination of Observational Errors	253
(c) Elimination of Irrelevant Factors	255
Chap. V. The Present Results	256
1. Method and Meaning of Demonstration	256
2. Correspondence between the Discrimination and the Intelligence	259



Louis Leon Thurstone (1887. - 1955.), znameniti američki psihometričar. Karijeru je započeo kao inženjer elektrotehnike. Patentirao je filmski projektor. Radio je kao asistent u laboratoriju T. A. Edisona. Na Sveučilištu u Chicagu diplomirao je i doktorirao psihologiju. Znatno je pridonio razvoju teorije mjerenja, a osobito razvoju faktorske analize. U radu *Multiple factor analysis*, koji objavljuje 1931. godine u časopisu *Psychological Review*, postavlja teoretski model grupnih faktora za čiju empirijsku

provjeru razvija multifaktorsku analizu. Osim toga uvodi i definira kriterije za *jednostavnu strukturu faktora*, čime je usmjerio daljnji razvoj faktorske analize.

Prema Kolesarić i Petz (1999).

¹ Za potpuniji uvid u različite modele faktorske analize potrebno je koristiti dodatnu literaturu, primjerice, knjige: A. Fulgosi (1984). Faktorska analiza, Školska knjiga, Zagreb; N. Viskić-Štalec (1991). Elementi faktorske analize, Fakultet za fizičku kulturu, Zagreb.

(koordinacija, eksplozivna snaga, fleksibilnost itd.) jer nisu izravno mjerljive, a odgovorne su za uspješnost u motoričkim aktivnostima (npr. skok udalj s mjesta, trčanje 20 metara itd.), koje predstavljaju manifestne varijable. Stoga je osnovni cilj faktorske analize otkriti potencijalne uzroke povezanosti među brojnim pojavama.

Kineziološke aktivnosti mogu se smatrati posljedicama djelovanja velikog broja faktora, odnosno antropoloških karakteristika, koje se aktiviraju u različitim omjerima. Odnos između manifestnih varijabli (npr. motoričkih aktivnosti) i faktora (npr. motoričkih sposobnosti) može se izraziti u obliku jednadžbe

$$z_{ij} = a_{j1} f_{i1} + a_{j2} f_{i2} + \dots + a_{jk} f_{ik} + u_j e_{ij},$$

gdje je

- z_{ij} rezultat ispitanika i u manifestnoj varijabli j ($j=1, \dots, m$) za koju vrijedi $E(z_j)=0$; $E(z_j^2)=1$
- f_{ip} rezultati ispitanika i u skupu zajedničkih faktora ($p=1, \dots, k$; $k < m$) za koje vrijedi $E(f_p) = 0$
- a_{jp} koeficijenti utjecaja pojedinog faktora f_p na varijablu j ($p=1, \dots, k$)
- e_{ij} rezultat ispitanika i u rezidualnom faktoru j za koji vrijedi $E(e_j)=0$
- u_j koeficijent utjecaja rezidualnog faktora e_j .

U matičnom obliku

$$\begin{array}{c} \mathbf{Z} \\ \left(\begin{array}{cccc} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nm} \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \left(\begin{array}{cccc} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1k} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nk} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{array} \right) \end{array} + \begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \left(\begin{array}{cccc} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nm} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{U} \\ \left(\begin{array}{cccc} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{mm} \end{array} \right) \end{array}$$

Znanstveni članak L.L. Thurstonea: *Multiple factor analysis*, objavljen je u časopisu *Psychological Review* 1931. godine.

MULTIPLE FACTOR ANALYSIS

BY L. L. THURSTONE
The University of Chicago

The two-factor problem of Spearman consists in the analysis of a table of intercorrelations for the discovery of some general factor that is common to all of the variables in the table. Spearman differentiates three types of factors, namely, a general factor which is common to all of the variables but not to all of them, and specific factors that are peculiar to single variables alone. In practice, the Spearman two-factor methods meet with the difficulty that group factors are frequently encountered. The two-factor methods are not applicable to situations that involve group factors except in indirect ways. This is a serious limitation on Spearman's technique since many important psychological problems involve a complex of variables that are known from the nature of the problem to contain group factors. The present multiple factor methods in no way contradict the Spearman two-factor methods which are very ingenious and powerful in the situations to which they apply. The present multiple factor method may be thought of as supplementary to the Spearman two-factor method in that we do not have any restrictions as to the number of general factors or the number of group factors.

It is the purpose of this paper to describe a more generally applicable method of factor analysis which has no restrictions as regards group factors and which does not restrict the number of general factors that are operative in producing the intercorrelations. Our first question concerns the number of general, independent, and uncorrelated factors that are operative in producing a given table of intercorrelations for any number of variables. In our terminology general factors will include what Spearman calls general and group factors.

406

gdje je

- $\mathbf{Z}$ matrica rezultata n entiteta u m manifestnih varijabli
- $\mathbf{F}$ matrica rezultata n entiteta u k zajedničkih faktora
- $\mathbf{A}$ matrica koeficijenata utjecaja k faktora na m manifestnih varijabli
- $\mathbf{E}$ matrica rezultata n entiteta u m rezidualnih faktora
- $\mathbf{U}$ dijagonalna matrica koeficijenata utjecaja m rezidualnih faktora.

Takav oblik dekompozicije rezultata entiteta u skupu manifestnih varijabli naziva se *generalni linearni model*. Jednadžba predstavlja polaznu pretpostavku za faktorsku analizu koje cilj je otkriti koji faktori i u kolikoj mjeri utječu na uspješnost entiteta u nekoj manifestnoj varijabli.

Uz pretpostavke da su kovarijance između rezidualnih faktora te zajedničkih i rezidualnih faktora jednake nuli, može se pokazati da su korelacije između manifestnih varijabli uzrokovane zajedničkim faktorima

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} + \mathbf{U}^2$$

Izvod:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} n^{-1} \\ &= (\mathbf{F}\mathbf{A} + \mathbf{E}\mathbf{U})^T (\mathbf{F}\mathbf{A} + \mathbf{E}\mathbf{U}) n^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{F}^T + \mathbf{U}^T \mathbf{E}^T) (\mathbf{F}\mathbf{A} + \mathbf{E}\mathbf{U}) n^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{E} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{E}^T \mathbf{F} \mathbf{A} + \mathbf{U}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{U}) n^{-1} \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} n^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{U}^2 \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} + \mathbf{U}^2 \end{aligned}$$

gdje je $\mathbf{M} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} n^{-1}$ matrica kovarijanci zajedničkih faktora, $\mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{E} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{E}^T \mathbf{F} \mathbf{A} = 0$ jer su zajednički i rezidualni faktori međusobno nezavisni, a $\mathbf{U}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2$ dijagonalna matrica varijanci rezidualnih faktora jer su rezidualni faktori međusobno nezavisni.

Ako su i zajednički faktori međusobno nezavisni, tada je matrica korelacija manifestnih varijabli jednaka

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{U}^2.$$

Ako se također pretpostavi da je $\mathbf{U}^2 = 0$, onda je

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

pa je moguće zaključiti da se cijeli problem svodi na utvrđivanje matrice $\mathbf{A}$.

Moguće je razlikovati dva osnovna tipa primjene faktorske analize:

- eksplorativna primjena
- konfirmativna primjena.

Eksplorativnom primjenom faktorske analize utvrđuju se faktori u nekom prostoru manifestnih varijabli kada ni broj ni struktura faktora nisu unaprijed poznati, dok *konfirmativna primjena* pretpostavlja empirijsku provjeru nekog unaprijed postavljenog (hipotetskog) modela o broju i strukturi faktora.

Kako je već rečeno, postoje brojni faktorski modeli, no moguće je razlikovati dva osnovna modela faktorske analize: *faktorski model* i *komponentni model*. Prema Viskiće-Štalec (1991) osnovna razlika između ta dva modela jest u tome što komponentni model ne diferencira zajedničku i uniknu varijancu prije kondenzacije varijabli u komponente, odnosno faktorizacija se izvodi na nereduciranoj matrici korelacija, dok faktorski model diferencira zajedničku (komunalitet) i uniknu varijancu varijabli te faktorizaciju izvodi na zajedničkom dijelu varijance varijabli. Osim toga, razlike mogu biti i u inicijalnoj metrici varijabli, kriteriju za određivanje broja faktora, tipu rotacije inicijalnog koordinatnog sustava koji osigurava optimalnu parsimonijsku strukturu i način izračunavanja rezultata entiteta na dobivenim faktorima (faktorski skorovi).

U daljnjem tekstu bit će predstavljena *metoda glavnih komponenata* ili *komponentni model* (engl. *principal components*) u realnoj metrici kao jedan od osnovnih i najčešće korištenih modela eksplorativne faktorske analize.

Napomena:

Opis i objašnjavanje svih modela faktorske analize nadilazi ambicije ove knjige, stoga se zahtjevniji čitatelji upućuju na knjige:

- A. Fulgosi (1984). Faktorska analiza. Zagreb: Školska knjiga.
 - N. Viskiće-Štalec (1991). Elementi faktorske analize. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
- ili na neku drugu knjigu koja detaljnije i sveobuhvatnije opisuje veći broj faktorski modela.

3.2.1. Komponentni model faktorske analize

Komponentni model faktorske analize predložio je Harold Hotelling 1933. godine. Ovim modelom se iz skupa manifestnih varijabli utvrđuju linearno nezavisne komponente na temelju nereducirane korelacijske matrice (u glavnoj dijagonali su jedinice), što omogućava objašnjenje ukupne varijance analiziranog skupa manifestnih varijabli pomoću dobivenih komponenata. Pri tome se postiže da prva ekstrahirana komponenta objašnjava maksimalno moguć dio ukupne varijance, druga maksimalno moguć dio preostale varijance itd. Takav postupak omogućava da svaka sljedeća komponenta objašnjava manju proporciju varijance od prethodno ekstrahirane komponente pa se minimalnim brojem komponenata može objasniti maksimalna količina ukupne varijance manifestnih varijabli.

Neka su u matrici B podaci skupa $E = \{e_i; i = 1, \dots, n\}$ entiteta koji su opisani skupom $V = \{v_j; j = 1, \dots, m\}$ varijabli



Harold Hotelling (1895. – 1973.), američki ekonomist, matematičar i statističar. Kao profesor na Columbia University uz nekoliko vrlo zapaženih radova iz područja ekonomije objavio je i veći broj značajnih radova iz područja matematičke statistike. U članku *The Generalization of Student's Ratio*, objavljenom 1931. godine u časopisu *Annals of Mathematical Statistics*, generalizirao je Studentov t -test za analizu više varijabli

(Hotellingov multivarijatni T^2 -test). Osobito je značajan njegov doprinos razvoju multivarijatnih analiza. U članku *Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components*, objavljenom 1933. godine u časopisu *Journal of Educational Psychology*, predložio je komponentni model faktorske analize, a u članku *Relation Between Two Sets of Variates*, objavljenom u znamenitom časopisu *Biometrika* 1936. godine, predlaže metodu za utvrđivanje relacija između dvaju skupova varijabli (kanoničku analizu).

Znanstveni članak H. Hotellinga: *Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components* objavljen je u časopisu *Journal of Educational Psychology* 1933. godine.

The Journal of Educational Psychology

ANALYSIS OF A COMPLEX OF STATISTICAL VARIABLES INTO PRINCIPAL COMPONENTS¹

HAROLD HOTELLING

Columbia University

1. INTRODUCTION

Consider n variables attaching to each individual of a population. These statistical variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ might for example be scores made by school children in tests of speed and skill in solving arithmetical problems or in reading; or they might be various physical properties of telephone poles, or the rates of exchange among various currencies. The x 's will ordinarily be correlated. It is natural to ask whether some more fundamental set of independent variables exists, perhaps fewer in number than the x 's, which determine the values the x 's will take. If $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ are such variables, we shall then have a set of relations of the form

$$x_i = f_i(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Quantities such as the γ 's have been called mental factors in recent psychological literature. However in view of the prospect of application of these ideas outside of psychology, and the conflicting usage attaching to the word "factor" in mathematics, it will be better simply to call the γ 's *components* of the complex depicted by the tests.

We shall consider only normally distributed systems of components having zero correlations and unit variances. If we use the symbol E to denote the expectation, or mean value in the population, of the quantity following it, the condition that the means shall be zero is expressed by

$$E\gamma_i = 0.$$

The assumptions of unit variances and zero correlations may be combined in the statement

¹ A study made in part under the auspices of the Unitary Traits Committee and the Carnegie Corporation.

The author is indebted to Professor Truman L. Kelley, who was responsible for the initiation of this study and the propounding of many of the questions to which answers are here attempted; also to Professors I. L. Thurstone, Clark V. Hull, C. Spearman, and E. L. Thorndike, who raised some of the further questions treated.

$$B = (b_{ij})$$

Operacijom

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}_c \mathbf{V}^{-1},$$

gdje je

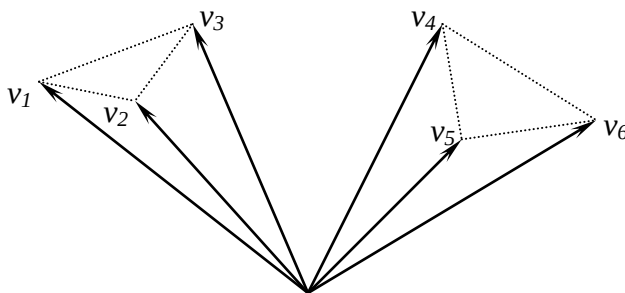
- $\mathbf{B}_c$ matrica centriranih podataka dobivenih operacijom $\mathbf{B}_c = \mathbf{B} - \mathbf{1}\mathbf{m}^T$ ($\mathbf{m}$ -vektor aritmetičkih sredina varijabli iz matrice $\mathbf{B}$)
- $\mathbf{V}^{-1}$ dijagonalna matrica standardnih devijacija varijabli iz matrice $\mathbf{B}$, dobije se matrica standardiziranih varijabli (v. poglavlje 2.7. str. 105-114).

Matrica korelacija (v. poglavlje 2.11. str. 151-170) varijabli iz $\mathbf{Z}$ izračuna se operacijom

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} n^{-1}.$$

U matrici korelacija uočava se da su neke varijable međusobno u višim korelacijama, dok su s ostalim varijablama manje povezane. Grupiranje varijabli prema međusobnoj povezanosti ukazuje na postojanje nekog broja latentnih dimenzija koje su odgovorne za generiranje njihova kovarijabilnosa. Stoga faktorska analiza polazi upravo od matrice korelacija. Pri tome komponentni model polazi od nereducirane korelacijske matrice (dijagonalni elementi su jedinice, a izvandijagonalni korelacije između manifestnih varijabli), dok neki modeli polaze od reducirane korelacijske matrice (dijagonalni elementi nisu jedinice već koeficijenti pouzdanosti manifestnih varijabli, procjene komunaliteta, kvadrati multiplih korelacija svake varijable s preostalima iz skupa, najveći koeficijent korelacije i sl.).

S obzirom na to da koeficijenti korelacija predstavljaju i kosinuse kutova između vektora, moguće ih je prikazati geometrijski (slika 3.2-1).



Slika 3.2-1. Geometrijski prikaz korelativnih odnosa nekog skupa od 6 manifestnih varijabli

Na slici 3.2-1 prikazani su korelativni odnosi među 6 manifestnih varijabli. Jasno se vidi da manifestne varijable v_1 , v_2 i v_3 čine jednu

skupinu, a v_4 , v_5 i v_6 čine drugu skupinu međusobno jače povezanih varijabli. To upućuje na zaključak da kovariranje tog skupa manifestnih varijabli dominantno određuju dva faktora. Komponentni model faktorske analize rješava problem utvrđivanja faktora tzv. *spektralnom dekompozicijom korelacijske matrice R*

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{R} \quad = \quad \mathbf{X} \quad \quad \quad \boldsymbol{\lambda} \quad \quad \quad \mathbf{X}^T \\
 \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & r_{12} & \cdot & \cdot & r_{1m} & x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & x_{1m} \\
 r_{21} & 1 & \cdot & \cdot & r_{2m} & x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 r_{m1} & r_{m2} & \cdot & \cdot & 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdot & \cdot & x_{mm}
 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & x_{1m} & \lambda_1 & & & & \\
 x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{2m} & & \lambda_2 & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \\
 x_{m1} & x_{m2} & \cdot & \cdot & x_{mm} & & & & & \lambda_m
 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 x_{11} & x_{21} & \cdot & \cdot & x_{m1} & x_{11} & x_{21} & \cdot & \cdot & x_{m1} \\
 x_{12} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{m2} & x_{12} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{m2} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_{1m} & x_{2m} & \cdot & \cdot & x_{mm} & x_{1m} & x_{2m} & \cdot & \cdot & x_{mm}
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

koja se izvodi rješavanjem *karakteristične jednadžbe korelacijske matrice R*

$$(\mathbf{R} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) \mathbf{X} = 0$$

Rješavanjem karakteristične jednadžbe dobije se matrica svojstvenih vektora $\mathbf{X}$ za koju vrijedi da je

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T = \mathbf{I},$$

gdje je $\mathbf{I}$ matrica identiteta (matrica koje su dijagonalni elementi jedinice, a izvandijagonalni nule) te dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti $\boldsymbol{\lambda}$ za čije dijagonalne elemente vrijedi

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \text{ i } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = m.$$

Postoji niz postupaka za utvrđivanje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora. Primjerice, *Hotellingov iterativni postupak*, *Q-R postupak dijagonalizacije* itd.

Napomena:

Detaljniji opis većeg broja postupaka za utvrđivanje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora nalazi se u knjizi A. Fulgosi (1984). Faktorska analiza (str. 100-114). Zagreb: Školska knjiga.

Varijable matrice standardiziranih podataka Z moguće je transformirati u glavne komponente K operacijom

$$\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & \cdot & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & \cdot & k_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdot & \cdot & k_{nm} \end{matrix}}^K & = & \overbrace{\begin{matrix} z_{11} & z_{12} & \cdot & \cdot & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \cdot & \cdot & z_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdot & \cdot & z_{nm} \end{matrix}}^Z & \cdot & \overbrace{\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdot & \cdot & x_{mm} \end{matrix}}^X \end{matrix}$$

pri čemu je varijanca glavne komponente k_j jednaka λ_j ($j=1,\dots,m$), a kovarijance glavnih komponenata jednake su nuli.

Dokaz: Operacijom $K^T K n^{-1}$ izračunava se matrica kovarijanci koje su dijagonalni elementi varijance. Dakle,

$$\begin{aligned} K^T K n^{-1} &= (Z X)^T (Z X) n^{-1} \\ &= X^T Z^T Z X n^{-1} \\ &= X^T R X \\ &= X^T X \lambda X^T X \\ &= \lambda \end{aligned}$$

jer je $X^T X = I$, gdje je I matrica identiteta, a množenje bilo koje matrice matricom identiteta ostavlja matricu nepromijenjenom. Dakle, λ predstavlja dijagonalnu matricu svojstvenih vrijednosti λ_j u glavnoj dijagonali, koje su ujedno varijance glavnih komponenata iz matrice K . Time je dokazano da su vektori glavnih komponenata k_j ortogonalni i imaju varijance λ_j .

Normiranjem glavnih komponenata K vrijednostima iz matrice λ dobije se matrica standardiziranih glavnih komponenata

$$\begin{aligned} \psi &= K \lambda^{-1/2} \\ &= Z X \lambda^{-1/2} \end{aligned}$$

s varijancama jedan.

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\psi^T \psi n^{-1} &= (K \lambda^{-1/2})^T (K \lambda^{-1/2}) n^{-1} \\
&= K^T K \lambda^{-1/2} \lambda^{-1/2} n^{-1} \\
&= \lambda \lambda^{-1/2} \lambda^{-1/2} \\
&= \lambda \lambda^{-1} \\
&= I
\end{aligned}$$

jer je $K^T K n^{-1} = \lambda$, a $\lambda^{-1/2} \lambda^{-1/2} = \lambda^{-1}$. Dakle, vektori matrice standardiziranih komponenata su ortonormirani.

Korelacije manifestnih varijabli iz matrice $\mathbf{Z}$ i standardiziranih komponenata iz matrice ψ izračunaju se operacijom

$$\begin{array}{c} \mathbf{H} \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{X} \end{array} \begin{array}{c} \lambda^{1/2} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdot & \cdot & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdot & \cdot & h_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdot & \cdot & h_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdot & \cdot & x_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \sqrt{\lambda_m} \end{vmatrix}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \mathbf{Z}^T \psi n^{-1} \\
&= \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{X} \lambda^{-1/2} n^{-1} \\
&= \mathbf{R} \mathbf{X} \lambda^{-1/2} \\
&= \mathbf{X} \lambda \mathbf{X}^T \mathbf{X} \lambda^{-1/2} \\
&= \mathbf{X} \lambda^{1/2}
\end{aligned}$$

jer je $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{I}$, gdje je $\mathbf{I}$ matrica identiteta, a $\lambda \lambda^{-1/2} = \lambda^{1/2}$.

Elementi matrice $\mathbf{H}$ predstavljaju korelacije manifestnih varijabli i glavnih komponenata i obično se nazivaju faktorska opterećenja (*engl. factor loadings*). Matrica $\mathbf{H}$ obično se naziva *matrica glavnih osovina* ili *inicijalni koordinatni sustav*.

3.2.1.1. Kriteriji za odabir značajnog broja faktora

Već je rečeno da je cilj svake faktorske analize (pa i metode glavnih komponentata) utvrditi manji broj faktora pomoću kojih je moguće što bolje objasniti promatrani skup manifestnih varijabli. Broj komponentata potrebnih za potpunu reprodukciju analiziranog skupa manifestnih varijabli jednak je broju manifestnih varijabli sa svojstvom

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$$

S obzirom na to da svaka sljedeća komponenta objašnjava sve manji dio ukupne varijance, moguće je odabrati manji broj glavnih komponentata koje objašnjavaju skup manifestnih varijabli. Zbog toga je potrebno utvrditi kriterije za odabir manjeg broja glavnih komponentata koje će bez većeg gubitka informacija dobro reproducirati promatrani prostor manifestnih varijabli. Postoji više kriterija za odabir značajnog broja glavnih komponentata. U nastavku će biti opisani samo najčešće korišteni kriteriji i oni koji su u većini istraživanja² pokazali dobre karakteristike. To su *GK-kriterij* (Guttman i Kaiser), *PB-kriterij* (Štalec i Momirović, 1971) i *Scree-test* (Cattell, 1966).

GK-kriterij

Prema GK-kriteriju značajan broj glavnih komponentata određuje se preko njihove varijance, odnosno preko svojstvenih vrijednosti korelacijske matrice ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$). Značajnima se smatraju samo one komponente čija je svojstvena vrijednost (varijanca) veća od ili je jednaka jedan. Istraživanje Vesne Lužar pokazalo je da ovaj kriterij daje maksimalan broj interpretabilnih komponentata te da se ne ponaša konzistentno, u svim slučajevima što često dovodi do hiperfaktorizacije³ (Lužar, 1976, prema Viskić-Štalec, 1991).

PB - kriterij

Pomoću ovog kriterija odabiru se glavne komponente dovoljne za objašnjenje ukupne zajedničke varijance manifestnih varijabli. Pri

² Jedno od istraživanja provela je V. Lužar (1976) koja je ispitivala osjetljivost različitih kriterija na tip, distribuciju i varijancu pogreške, na temelju simulirajućeg eksperimenta.

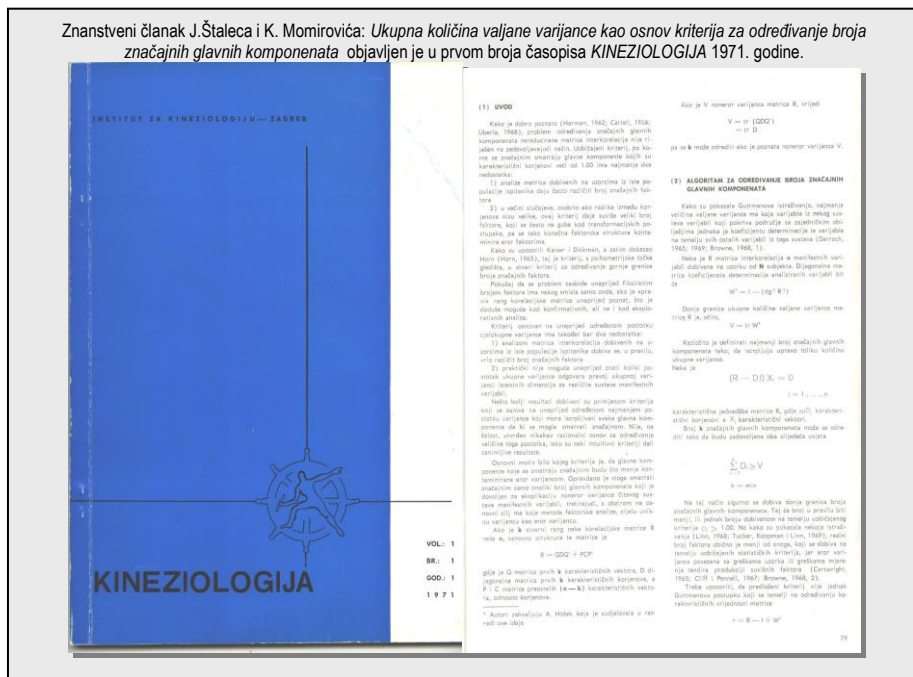
³ daje više faktora nego ih stvarno postoji.

tome je ukupna količina zajedničke varijance manifestnih varijabli jednaka

$$\Sigma smc = \text{tr}ag(I - U^2),$$

gdje smc (kvadrat multiple korelacije) predstavlja zajednički dio varijance svake varijable s preostalima iz promatranog skupa, odnosno onaj dio ukupne varijance pojedine varijable koji je jednak koeficijentu determinacije multiple korelacije pojedine varijable i svih preostalih varijabli promatranog skupa, I matrica identiteta, a U^2 matrica uniknih dijelova varijanci svake varijable koja se izračuna operacijom

$$\mathbf{U}^2 = (\text{diag} \mathbf{R}^{-1})^{-1}$$

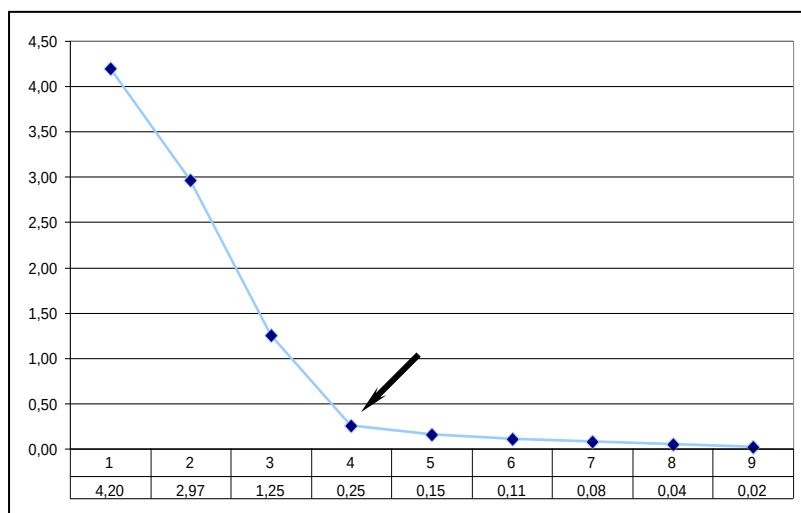


Prema PB-kriteriju značajnim komponentama smatraju se one komponente kojih je suma svojstvenih vrijednosti λ_j , poredanih po veličini, manja od Σsmc . Autori smatraju da ovaj kriterij daje donju granicu značajnih faktora te bolju interpretabilnost zadržanih komponenata. U spomenutom istraživanju V. Lužar ističe da PB-kriterij nije osjetljiv na tip distribucije rezultata entiteta u manifestnim varijablama, veličinu i nenulte kovarijance varijabli pogrešaka, ali je osjetljiv na singularne skupove varijabli u kojem slučaju

hiperfaktorizira (u nekim slučajevima više nego GK-kriterij) jer su unikviteti nekih varijabli blizu nule, dok do hipofaktorizacije⁴, a samim time i do gubitka valjanih informacija, primjenom ovog kriterija dolazi u slučajevima kad je omjer manifestnih varijabli i entiteta mali te ako sadrže veliku količinu varijance greške (Lužar, 1976, prema Viskiće-Štalec, 1991).

Scree-test

Osim navedenih kriterija, Cattell (1966) je predložio određivanje značajnih komponenata pomoću tzv. *scree plot*. *Scree plot* je grafički prikaz svojstvenih vrijednosti korelacijske matrice (slika 3.2-2). Subjektivnom procjenom odredi se točka poslije koje se svojstvene vrijednosti smanjuju u skladu s blagim linearnim trendom. Prema slici 3.2-2 značajne su prve tri glavne komponente čije varijance (svojstvene vrijednosti) ne čine linearan kontinuum. Cattell je takav način određivanja značajnog broja glavnih komponenata nazvao *scree-test*.



Slika 3.2-2. Scree plot – grafikon svojstvenih vrijednosti korelacijske matrice

⁴ daje manji broj faktora nego ih stvarno postoji.

3.2.1.2. Komunaliteti i unikviteti

Nakon odabira značajnog broja komponenata jednim od kriterija dobije se reducirana matrica $\mathbf{H}$ sa m redaka (varijabli) i k stupaca (komponenta), pri čemu je uvijek $k \leq m$. U daljnjem će se tekstu ta matrica označavati također sa $\mathbf{H}$.

$$\mathbf{H} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{značajne glavne} & \text{glavne komponente} \\ \text{komponente} & \text{koje nisu značajne} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} h_{11} & . & . & h_{1k} & . & . & . & h_{1m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ h_{m1} & . & . & h_{mk} & . & . & . & h_{mm} \end{array} \right) \end{array}$$

Dakle, matrica $\mathbf{H}$ sadrži korelacije između m manifestnih varijabli i k značajnih glavnih komponenata. Kvadrirani elementi matrice $\mathbf{H}$ predstavljaju zajedničku varijancu svake manifestne varijable s pojedinom glavnom komponentom. Stoga se operacijom

$$h_j^2 = \sum_{p=1}^k h_{jp}^2 = h_{j1}^2 + h_{j2}^2 + \dots + h_{jk}^2$$

izračuna *komunalitet* manifestne varijable j . Komunaliteti predstavljaju onaj dio ukupne varijance svake manifestne varijable koji je moguće objasniti pomoću k značajnih komponenata, dok se ostali dio varijance (dio koji nije moguće objasniti pomoću k značajnih komponenata) naziva *unikvit* (u_j^2), a izračuna se operacijom

$$u_j^2 = 1 - h_j^2,$$

jer je varijanca svake manifestne varijable jednaka jedan. Dakle, varijancu svake manifestne varijable moguće je dekomponirati na *komunalitet* (h^2) i *unikvit* (u^2).

$$1 = h_j^2 + u_j^2$$

Korištenjem matrične algebre, operacijom

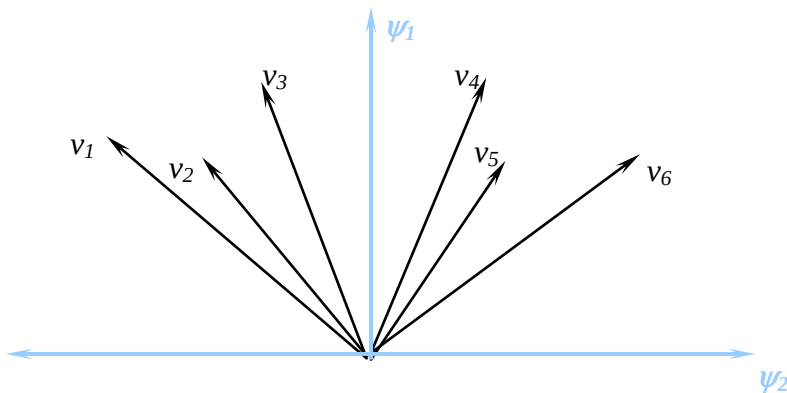
$$\mathbf{H}^2 = \text{diag}(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)$$

dobije se dijagonalna matrica *komunaliteta* $\mathbf{H}^2$, a dijagonalna matrica *unikviteta* $\mathbf{U}^2$ izračuna se operacijom

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{H}^2$$

3.1.2.3. Rotacije

Inicijalni koordinatni sustav, predstavljen matricom $\mathbf{H}$, dobiven je tako da prva glavna komponenta objasni najveći dio zajedničke varijance analiziranog skupa manifestnih varijabli, druga, uz uvjet ortogonalnosti, najviše preostale varijance itd. To znači da se prva glavna komponenta ponaša kao generalni faktor promatranog prostora manifestnih varijabli, dok ga druga obično diferencira u dvije grupe. To pokazuje da, osim prve komponente koja se ponaša kao generalni faktor, ostale komponente nije moguće smisleno interpretirati. Slika 3.2-2 prikazuje korelativne odnose između 6 manifestnih varijabli i dviju značajnih glavnih komponenata.



Slika 3.2-3. Geometrijski prikaz korelativnih odnosa 6 manifestnih varijabli i dviju značajnih glavnih komponenata

Vidljivo je da je samo prvu glavnu komponentu moguće smisleno interpretirati i to u slučajevima kada su sve manifestne varijable u međusobno visokim korelacijama, a ostale glavne komponente nisu značajne. Realnija i interpretabilnija solucija postiže se daljnjom transformacijom inicijalnoga koordinatnog sustava u poziciju tzv. *jednostavne strukture*. Pojam jednostavne strukture potječe od

Thurstonea (Thurston, 1947, prema Fulgosi, 1984) koji je definirao i kriterije kojima se može prosuđivati jednostavna struktura neke faktorske matrice. Jednostavnu strukturu moguće je definirati kao pokušaj smanjenja faktorskog kompleksiteta svake manifestne varijable, odnosno pokušaj da zajednički dio varijance (komunalitet) neke manifestne varijable objašnjava što manje značajnih faktora. Pri tom treba težiti da korelacija neke manifestne varijable s nekim faktorom bude jedan, a sa svim ostalim nula. Takva transformacija, odnosno rotacija inicijalnoga koordinatnog sustava izvodi se uz (ortogonalne rotacije) i bez (neortogonalne ili kosokutne rotacije) zadržavanja ortogonalnosti između faktora prema određenom matematičkom kriteriju koji će osigurati jednostavnu strukturu.

Ortogonalna rotacija

Za dobivanje jednostavne strukture faktora uz uvjet ortogonalnosti, potreban je neki operator T koji predstavlja ortonormiranu matricu, za koju vrijedi da je $T^T T = I$. Matrica transformiranih standardiziranih glavnih komponenata ϕ dobije se operacijom

$$\begin{aligned}\phi &= \psi T \\ &= K \lambda^{-1/2} T \\ &= Z X \lambda^{-1/2} T,\end{aligned}$$

a operacijom

$$A = Z^T \phi n^{-1},$$

odnosno

$$A = H T$$

matrica korelacija manifestnih varijabli i transformiranih glavnih komponenata (faktora) A .

Dokaz:

$$\begin{aligned}A &= Z^T \phi n^{-1} \\ &= Z^T Z X \lambda^{-1/2} T n^{-1} \\ &= R X \lambda^{-1/2} T \\ &= X \lambda X^T X \lambda^{-1/2} T \\ &= X \lambda^{1/2} T \\ &= H T\end{aligned}$$

jer je $X^T X = I$, a $\lambda \lambda^{-1/2} = \lambda^{1/2}$.

S obzirom na to da je T ortonormirana matrica, komunaliteti varijabli

$$\text{diag}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \text{diag}(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)$$

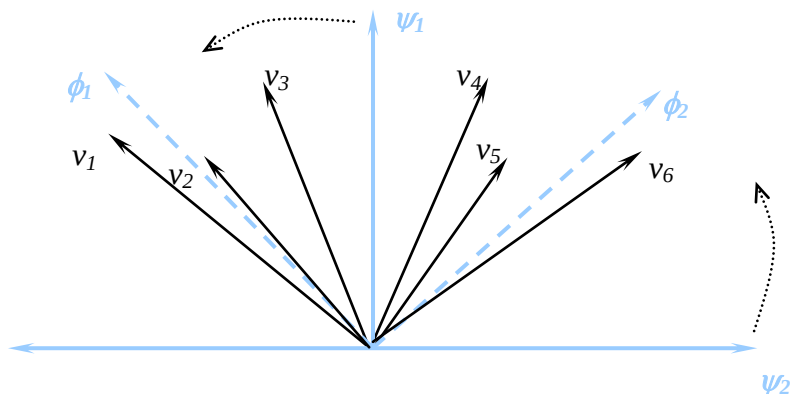
ne će se promijeniti.

Dokaz:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{A}^T &= \mathbf{H}\mathbf{T}(\mathbf{H}\mathbf{T})^T \\ &= \mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{T}^T\mathbf{H}^T \\ &= \mathbf{H}\mathbf{H}^T\end{aligned}$$

jer je $\mathbf{T}^T\mathbf{T}=\mathbf{I}$.

Dakle, problem se svodi na izbor matrice T kojom će se transformirati matrica H u matricu A . Matricu T moguće je odrediti uz definiranje matematičkoga kriterija koji će osigurati dobivanje jednostavne strukture (slika 3.2-4). Kriteriji za rotaciju su matematičke funkcije kojima se maksimizira ili minimizira varijanca manifestnih varijabli i faktora.



Slika 3.2-4. Geometrijski prikaz korelativnih odnosa nekog skupa od 6 manifestnih varijabli i dviju značajnih glavnih komponenata prije (ψ_1 i ψ_2) i nakon ortogonalne rotacije (ϕ_1 i ϕ_2)

Prema Fulgosiju (1984), najčešće korišten kriterij za ortogonalnu rotaciju je *varimax* (Kaiser, 1958) kojim se maksimizira varijanca faktora. Varijanca faktora p maksimizira se operacijom

$$v_p = \frac{m \sum_{j=1}^m (a_{jp})^2 - \left(\sum_{j=1}^m a_{jp}^2 \right)^2}{m^2},$$

gdje je

- $p=1, \dots, k$ (k - broj značajnih faktora)
- $j=1, \dots, m$ (m - broj manifestnih varijabli).

Maksimiziranje svih faktora postiže se maksimiziranjem sume svih vrijednosti v_p

$$v = \sum_{p=1}^k v_p,$$

Ovim postupkom se maksimizira suma varijanci k stupaca u matrici A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & a_{mk} \end{bmatrix}$$

$$v = \sum_{p=1}^k v_p = v_1 \cdot \dots \cdot v_k$$

$$v_1 = \frac{m \sum_{j=1}^m (a_{j1})^2 - \left(\sum_{j=1}^m a_{j1}^2 \right)^2}{m^2}$$

Autor je primijetio da se tim postupkom ne postiže zadovoljavajuća jednostavna struktura jer vrijednost v_p ovisi o komunalitetima varijabli h_j^2 pa je i utjecaj određene manifestne varijable na dobivanje jednostavne strukture zavisao od njezinog komunaliteta i to tako da

PSYCHOMETRIKA—VOL. 23, NO. 3

SEPTEMBER, 1958

THE VARIMAX CRITERION FOR ANALYTIC ROTATION IN FACTOR ANALYSIS*

HENRY F. KAISER

UNIVERSITY OF ILLINOIS

An analytic criterion for rotation is defined. The scientific advantage of analytic criteria over subjective (graphical) rotational procedures is discussed. Carroll's criterion and the quartimax criterion are briefly reviewed; the varimax criterion is outlined in detail and contrasted both logically and numerically with the quartimax criterion. It is shown that the normal varimax solution probably coincides closely to the application of the principle of simple structure. However, it is proposed that the ultimate criterion of a rotational procedure is factorial invariance, not simple structure—although the two notions appear to be highly related. The normal varimax criterion is shown to be a two-dimensional generalization of the classic Spearman case, i.e., it shows perfect factorial invariance for two pure clusters. An example is given of the invariance of a normal varimax solution for more than two factors. The oblique normal varimax criterion is stated. A computational outline for the orthogonal normal varimax is appended.

In factor analysis, an analytic criterion for rotation is defined as one that imposes mathematical conditions beyond the fundamental factor theorem, such that a factor matrix is uniquely determined. Historically, the first such criterion was Thurstone's treatment of the principal axes problem [10]: from any arbitrary factor matrix he suggested rotating under the criterion that each factor successively accounts for the maximum variance. But principal axes have seldom been accepted as psychologically very interesting ([9], p. 139). The rotation problem for psychologically meaningful factors is usually handled judgmentally. Scientifically, however, this procedure is not very satisfactory: the ad hoc quality of subjective rotation makes uniquely determined factors impossible; only factors that are subject to the uncertainties and controversies besetting any a posteriori reasoning can be defined. In contrast, an analytic criterion for rotation would allow factor analysis to become a straightforward methodology stripped of its subjectivity and a proper tool for scientific inquiry.

The Quartimax Criterion

The first analytic criterion for determining psychologically interpretable factors was presented in 1953 by Carroll [1]. In an attempt to provide a

*Part of the material in this paper is from the writer's Ph.D. thesis. I am indebted to my committee, Professors F. J. Tyler, R. C. Tryon, and H. D. Carter, chairman, for many helpful suggestions and criticisms. Dr. John Cadfrey suggested the name *varimax*, and wrote the original IBM 602A computer program for this criterion.

I am also indebted to the staff of the University of California Computer Center for help in programming the procedures described in the paper for their IBM 701 electronic computer. Since their installation is partially supported by a grant from the National Science Foundation, the assistance of this agency is acknowledged.

187

varijable s većim komunalitetima lakše postižu jednostavnu strukturu od varijabli s manjim komunalitetom. Stoga je potrebno izvršiti normalizaciju faktorskih opterećenja manifestnih varijabli prije rotacije (Kaiser, 1958). Za normalizaciju faktorskih opterećenja manifestnih varijabli potrebno je vrijednosti u retku matrice $\mathbf{H}$ podijeliti kvadratnim korijenom komunaliteta svake manifestne varijable

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} \frac{h_{11}}{\sqrt{h_1^2}} & \cdot & \cdot & \frac{h_{1k}}{\sqrt{h_1^2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{h_{m1}}{\sqrt{h_m^2}} & \cdot & \cdot & \frac{h_{mk}}{\sqrt{h_m^2}} \end{bmatrix}$$

Ova se normalizacija može primijeniti na sve ostale kriterije.

Neortogonalna rotacija

Matricu $\mathbf{T}$ kojom će se transformirati standardizirane glavne komponente u novu poziciju, moguće je pronaći operacijom

$$\begin{aligned} \phi &= \psi \mathbf{T} \\ &= \mathbf{K} \lambda^{-1/2} \mathbf{T} \\ &= \mathbf{Z} \mathbf{X} \lambda^{-1/2} \mathbf{T}, \end{aligned}$$

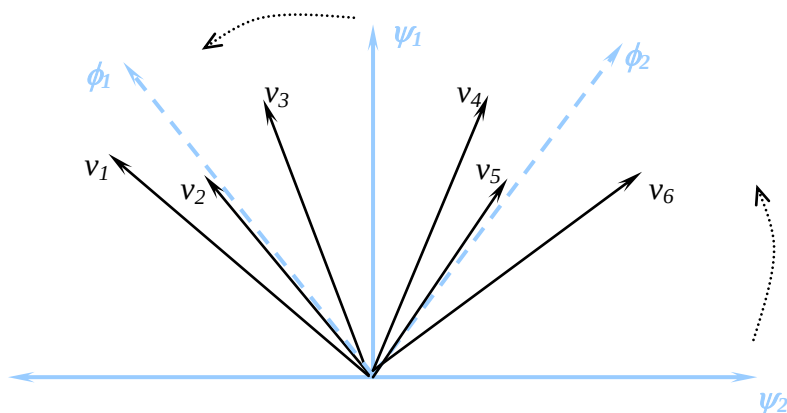
a da pri tom dobiveni faktori ne moraju biti ortogonalni (slika 3.2-5). Za takvu transformaciju potreban je neki operator $\mathbf{T}$ koji zadovoljava uvjet

$$\text{diag}(\mathbf{T}^T \mathbf{T}) = \mathbf{I}$$

Matrica $\mathbf{T}$ predstavlja matricu kosinusa kutova između pojedinih parova početnih ortogonalnih komponenata i transformiranih komponenata. Suma kvadriranih elemenata u svakom stupcu jednaka je jedinici. Budući da su vektori u matrici $\mathbf{T}$ jedinični vektori (duljine jedan), operacijom

$$(\mathbf{T}^T \mathbf{T}) = \mathbf{M}$$

dobiju se kosinusi koteva između transformiranih komponenata koji ustvari, predstavljaju korelacije između njih.



Slika 3.2-5. Geometrijski prikaz korelativnih odnosa nekog skupa od 6 manifestnih varijabli i dviju značajnih glavnih komponenata prije (ψ_1 i ψ_2) i nakon neortogonalne rotacije (ϕ_1 i ϕ_2)

Matrica korelacija (*matrica strukture*) manifestnih varijabli i transformiranih standardiziranih glavnih komponenata F dobije se operacijom

$$F = Z^T \phi n^{-1},$$

odnosno,

$$F = H T.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} F &= Z^T \phi n^{-1} \\ &= Z^T Z X \lambda^{-1/2} T n^{-1} \\ &= R X \lambda^{-1/2} T \\ &= X \lambda X^T X \lambda^{-1/2} T \\ &= X \lambda^{1/2} T \\ &= H T \end{aligned}$$

jer je $X^T X = I$, a $\lambda \lambda^{-1/2} = \lambda^{1/2}$.

Matrica A (*matrica sklopa*), koja sadrži paralelne projekcije (koordinate) manifestnih varijabli na transformirane komponente, izračuna se operacijom

$$A = F M^{-1}$$

Isto tako je matricu strukture F moguće izračunati preko matrice sklopa A i matrice korelacija između faktora M operacijom

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \mathbf{M}$$

Transformacijsku matricu $\mathbf{T}$ za neortogonalnu rotaciju uz uvjet da je $\text{diag}(\mathbf{T}^T \mathbf{T}) = \mathbf{I}$ moguće je utvrditi pomoću Crawford-Fergusonove funkcije (Crawford i Ferguson, 1970, prema Viskić-Štalec, 1991):

$$f(A) = k_1 \mathbf{T} + k_2 \mathbf{F} = \min,$$

$$\text{gdje} \quad \mathbf{T} = \sum_{j=1}^m \sum_{\underbrace{p=1 \atop p \neq q}}^k \sum_{q=1}^k a_{jp}^2 a_{jq}^2, \quad \mathbf{F} = \sum_{p=1}^k \sum_{\underbrace{i=1 \atop i \neq j}}^m \sum_{j=1}^m a_{ip}^2 a_{jp}^2$$

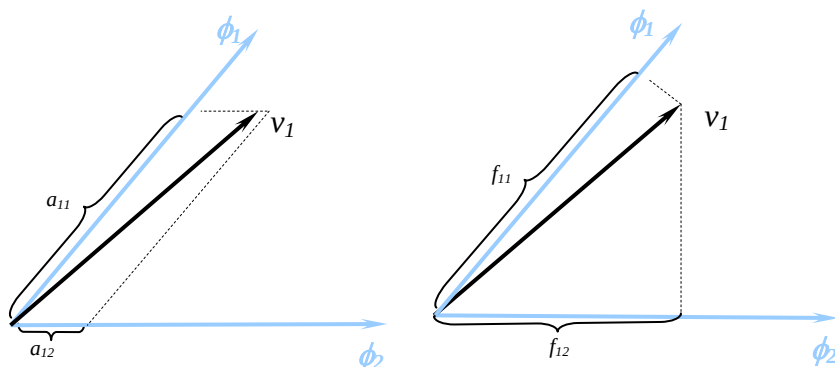
Izborom konstanti k_1 i k_2 moguće je definirati razne kriterije za transformaciju:

- $k_1 = 1, k_2 = 0$ - *oblimin*,
- $k_1 = m - 1, k_2 = 1$ - *kosokutni varimax*,
- $k_1 = 2m - k, k_2 = k$ - *kosokutni equamax*,
- $k_1 = m - 1, k_2 = k - 1$ - *obliparsimax*,
- $k_1 = 0, k_2 = 1$ - *obliparsifact*.

U tim transformacijama također je moguće primijeniti Kaiserov postupak normalizacije.

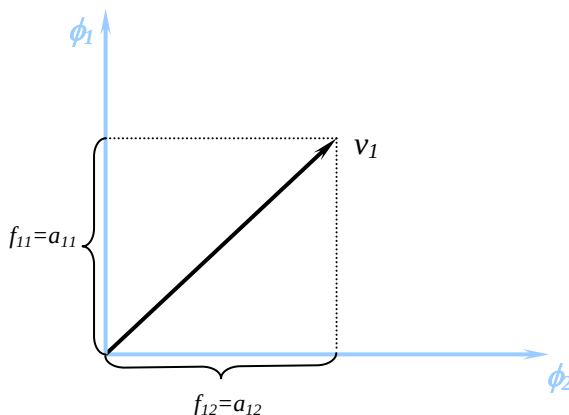
Dakle, kao rezultat svake neortogonalne rotacije dobiju se tri matrice rezultata:

- $\mathbf{A}$ - matrica koordinata ili paralelnih projekcija manifestnih varijabli na transformirane faktore - *matrica sklopa*. Paralelne projekcije predstavljaju vrijednosti koje odgovaraju udaljenosti od ishodišta do mjesta koje se dobije povlačenjem paralela s faktorima do vrha manifestne varijable (slika 3.2-6).
- $\mathbf{F}$ - matrica korelacija ili ortogonalnih projekcija manifestnih varijabli na transformirane faktore - *matrica strukture*. Ortogonalne projekcije predstavljaju vrijednosti koje odgovaraju udaljenosti od ishodišta do točke dobivene povlačenjem okomica s vrha manifestne varijable na faktore (slika 3.2-6).
- $\mathbf{M}$ - matrica korelacija između faktora.



Slika 3.2-6. Paralelne i ortogonalne projekcije manifestnih varijabli na transformirane faktore

U interpretaciji matrica rezultata nakon neortogonalne rotacije, matrica **A** (matrica sklopa) je od primarne važnosti jer jasnije pokazuje koje varijable određuju pojedine faktore. Ako se usporede paralelne i ortogonalne projekcije sa slike 3.2-6, vidi se da manifestna varijabla v_1 u znatno većoj mjeri determinira faktor ϕ_1 nego ϕ_2 prema paralelnim projekcijama, dok tako jasna razlika nije uočljiva na temelju ortogonalnih projekcija. Što su manje korelacije između faktora, to je manja razlika između paralelnih i ortogonalnih projekcija. Ako su faktori međusobno nezavisni (ortogonalni), tada su paralelne i ortogonalne projekcije jednake (slika 3.2-7).



Slika 3.2-7. Paralelne i ortogonalne projekcije manifestnih varijabli na ortogonalne faktore

Zato se kao rezultat ortogonalne rotacije dobije samo jedna matrica faktorskih opterećenja koja pokazuje kakva je korelacija svake manifestne varijable sa svakim značajnim faktorom. Time interpretacija faktora postaje znatno jednostavnija. Fulgosi, uspoređujući ortogonalne i neortogonalne rotacije, ističe kako

ortogonalne rotacije daju konačna rješenja, a neortogonalne ne zato što:

...kod ortogonalnih solucija neophodno je da suma kvadrata faktorskih opterećenja za svaku varijablu bude nakon rotacije jednaka sumi kvadrata tih faktorskih opterećenja prije rotacije, dok kod kosokutnih rotacija toga nema. To znači da nema tog ograničenja, pa je stoga moguće da suma kvadrata faktorskih koeficijenata za istu varijablu bude različita nakon rotacije od sume prije rotacije. Na taj način različiti kriteriji za jednostavnu strukturu mogu kod kosokutnih transformacija dati različite solucije. (Fulgosi, 1984: 224).

Nasuprot tome, Momirović ističe :

Iako su ortogonalni faktori znatno jednostavniji za statističke manipulacije, takve su solucije u najvećem broju slučajeva artifičijalne, jer je teško zamisliti psihičke funkcionalne strukture, koje bi bile bez međusobnih korelacija. Ortogonalni faktori mogu biti matematički, adekvatna solucija problema predmeta mjerenja, ali takva solucija se rijetko kada da adekvatno psihologijski interpretirati. Osim toga sasvim precizno određenje faktora nije moguće sa ortogonalnim strukturama. Zbog računskih razloga, a i zbog toga što faktori, koji su u korelaciji, nameću pitanje faktora (obično nazvanih drugog reda) koji su odgovorni za njihove korelacije, mnogi faktorsti preferiraju ortogonalne solucije. Ali ako se faktori ne tretiraju kao matematičke apstrakcije, već im se želi pridati psihološka egzistencija, onda je nužno dopustiti da budu u bilo kakvim međusobnim korelacijama.” (Momirović, 1966: 64.).

S kineziološkog stajališta, a na temelju mnogobrojnih dosadašnjih istraživanja u kojima se utvrđivala latentna struktura antropoloških karakterisika, moguće je zaključiti da su neortogonalne rotacije prihvatljivije jer nije realno pretpostaviti da su sve antropološke karakteristike međusobno nezavisne, pa se ortogonalnim transformacijama ne mogu dobiti realna rješenja. Osim toga, i neortogonalnim rotacijama moguće je dobiti i ortogonalne faktore ako analizirani podaci (manifestne varijable) to zahtijevaju. S obzirom na to da se neortogonalnim rotacijama mogu dobiti faktori koji su međusobno povezani, to omogućava “faktoriziranje” dobivenih faktora i dobivanje faktora višeg reda koji su odgovorni za njihove korelacije. Nameće se zaključak da, iako ne daju konačna rješenja te su matematički i interpretativno složenije od ortogonalnih, neortogonalnim rotacijama treba dati prednost jer ne podliježu matematičkim restrikcijama (uvjet ortogonalnosti) pa omogućavaju, za razliku od ortogonalnih, da se dobije jednostavnija struktura faktora, a onda i realnija rješenja.

3.2.1.4. Procjena rezultata entiteta u faktorima

Pomoću matrice paralelnih projekcija manifestnih varijabli na faktore A moguće je izračunati matricu standardiziranih regresijskih koeficijenata manifestnih varijabli za procjenu rezultata entiteta u faktorima. Matrica standardiziranih rezultata entiteta u skupu manifestnih varijabli Z može se napisati kao produkt rezultata entiteta u skupu faktora koji su odgovorni za kovariranje rezultata u manifestnim varijablama ϕ i matrice koeficijenata utjecaja svakog pojedinog faktora na pojedinu manifestnu varijablu A

$$Z = \phi A^T$$

pa je po modelu najmanjih kvadrata moguće izračunati standardizirane regresijske koeficijente manifestnih varijabli za procjenu rezultata entiteta u faktorima

$$\begin{aligned} Z &= \phi A^T & /A \\ Z A &= \phi A^T A & /(A^T A)^{-1} \\ Z A (A^T A)^{-1} &= \phi A^T A (A^T A)^{-1} \end{aligned}$$

S obzirom na to da je $A^T A (A^T A)^{-1} = I$, gdje je I matrica identiteta, onda je

$$Z A (A^T A)^{-1} = \phi$$

Dakle, standardizirani regresijski koeficijenti manifestnih varijabli za procjenu rezultata entiteta u faktorima dobiju se operacijom

$$\beta = A (A^T A)^{-1}$$

a rezultati entiteta u faktorima (*engl. factor scores*) operacijom

$$Z \beta = \phi$$

3.3

Kanonička analiza

Harold Hotelling je u članku *Relations Between Two Sets of Variates*, koji je objavio u znamenitom časopisu *Biometrika* 1936. godine, predložio metodu za utvrđivanje relacija između dvaju skupova varijabli - *kanoničku analizu*¹.

Kanoničkom analizom utvrđuju se relacije između dvaju skupova varijabli mjerenih na istom skupu entiteta ili pak istih varijabli mjerenih na istim entitetima u dvije vremenske točke (prije i poslije nekog tretmana), primjerice, ako se žele utvrditi odnosi između skupa varijabli koje opisuju

Znanstveni članak H. Hotellinga: *Relations Between Two Sets of Variates* objavljen je u časopisu *Biometrika* 1936. godine.

RELATIONS BETWEEN TWO SETS OF VARIATES*.		
By HAROLD HOTELLING, Columbia University.		
CONTENTS.		
SHEET.		PAGE
1.	The Correlation of Vectors. The Most Predictable Criterion and the Tetrad Difference	331
2.	Theorems on Determinants and Matrices	335
3.	Canonical Variates and Canonical Correlations. Applications to Algebra and Geometry	336
4.	Vector Correlation and Alienation Coefficients	338
5.	Standard Errors	339
6.	Examples, and an Iterative Method of Solution	341
7.	The Vector Correlation as a Product of Correlations or of Cosines	349
8.	An Exact Sampling Distribution of g	354
9.	Moments of g . The Distribution for Large Samples	354
10.	The Distribution for Small Samples. Form of the Frequency Curve	359
11.	Tests for Complete Independence	363
12.	Alternants of a Plane and of a Sample	365
13.	The Bivariate Distributions for Complete Independence ($r=1$, $n=4$)	369
14.	Theorem on Circularly Distributed Variates	371
15.	Generalization of Section 13 for Samples of Any Size	373
16.	Further Problems	375

1. *The Correlation of Vectors. The Most Predictable Criterion and the Tetrad Difference.* Concepts of correlation and regression may be applied not only to ordinary one-dimensional variates but also to variates of two or more dimensions. Marksmen side by side firing simultaneous shots at targets, so that the deviations are in part due to independent individual errors and in part to common causes such as wind, provide a familiar introduction to the theory of correlation; but only the correlation of the horizontal components is ordinarily discussed, whereas the complex consisting of horizontal and vertical deviations may be even more interesting. The wind at two places may be compared, using both components of the velocity in each place. A fluctuating vector is thus matched at each moment with another fluctuating vector. The study of individual differences in mental and physical traits calls for a detailed study of the relations between sets of correlated variates. For example the scores on a number of mental tests may be compared with physical measurements on the same persons. The questions then arise of determining the number and nature of the independent relations of mind and body shown by these data to exist, and of extracting from the multiplicity of correlations in the system suitable characterizations of these independent relations. As another

* Presented before the American Mathematical Society and the Institute of Mathematical Statisticians at Ann Arbor, September 15, 1935.

Biometrika xxviii

¹ Prije objavljivanja u časopisu *Biometrika*, članak je predstavljen *American Mathematical Society the Institute of Mathematical Statisticians* 12. listopada 1935. godine.

motorički status i skupa varijabli koje opisuju morfološki status čovjeka ili pak skupa varijabli koje opisuju inicijalno i finalno stanje treniranosti neke skupine entiteta itd. Dakle, kanonička analiza koristi se u proučavanju odnosa između dvaju skupova varijabli.

Relacije između dvaju skupova varijabli utvrđuju se preko tzv. *parova kanoničkih faktora* koji predstavljaju linearne kombinacije (kompozite) varijabli jednoga i drugog skupa. Svaki par kanoničkih faktora sastoji se od jednoga kanoničkog faktora iz prvoga i jednoga kanoničkog faktora iz drugog skupa manifestnih varijabli. Pri tome je prvi par kanoničkih faktora dobiven pod uvjetom da bude u najvećoj mogućoj korelaciji. Za svaki sljedeći par kanoničkih faktora vrijedi isto što i za prvi, ali pod uvjetom da ne smije biti u korelaciji ni s jednim prethodno izvedenim parom kanoničkih faktora. Broj parova kanoničkih faktora jednak je broju varijabli u manjem skupu varijabli. Dakle, osnovni problem svodi se na pronalaženje odgovarajućih koeficijenata (pondera) koji će osigurati najveću moguću korelaciju između linearnih kompozita (kanoničkih faktora) koji pripadaju dvama različitim skupovima varijabli.

Neka su $\mathbf{B}_1$ matrica podataka n entiteta opisanih s k , a $\mathbf{B}_2$ matrica podataka n entiteta opisanih pomoću m kvantitativnih normalno distribuiranih varijabli. Pri tome je $k > m$. Standardizacija podataka iz matrice $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ dobije se kao

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{B}_{c1} \mathbf{V}_1^{-1} \quad \mathbf{Z}_2 = \mathbf{B}_{c2} \mathbf{V}_2^{-1}$$

gdje su $\mathbf{B}_{c1}$ i $\mathbf{B}_{c2}$ matrice centrirani podataka, a $\mathbf{V}_1$ i $\mathbf{V}_2$ matrice varijanci varijabli prvoga i drugog skupa.

Korelacijske matrice varijabli prvoga i drugog skupa su

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{Z}_1^T \mathbf{Z}_1 n^{-1} \quad \mathbf{R}_{22} = \mathbf{Z}_2^T \mathbf{Z}_2 n^{-1},$$

a matrice kroskorelacija

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{Z}_1^T \mathbf{Z}_2 n^{-1} \quad \mathbf{R}_{21} = \mathbf{Z}_2^T \mathbf{Z}_1 n^{-1},$$

pri čemu je $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{21}^T$, a $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_{12}^T$.

Potrebno je početne (manifestne) varijable transformirati u linearne kompozite

$$\phi_1 = Z_1 X_1 \quad \phi_2 = Z_2 X_2$$

za koje vrijede uvjeti

$$\begin{aligned} \phi_1^T \phi_2 n^{-1} &= R_c \\ \text{i} \\ \phi_1^T \phi_1 n^{-1} &= I \quad \phi_2^T \phi_2 n^{-1} = I, \end{aligned}$$

gdje je R_c dijagonalna matrica maksimalno mogućih korelacija između faktora koji čine par (za koje vrijedi $r_{c1} \geq r_{c2}, \dots, r_{cm}$; m - broj varijabli u manjem skupu) koje se zovu *kanoničke korelacije*, a istovremeno su faktori izvan para međusobno ortogonalni, a I matrica identiteta, što znači da su faktori unutar svakog skupa varijabli međusobno ortogonalni.

Rješenje ovako postavljenog problema Hotelling (1936) svodi na rješavanje skupa karakterističnih jednadžbi

$$(R_{22}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} R_{12} - \lambda I) X_2 = 0,$$

uz uvjet da je $X_2^T R_{22} X_2 = I$, gdje je λ dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti matrice, a X_2 matrica desnih svojstvenih vektora matrice $(R_{22}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} R_{12})$.

Matrica svojstvenih vrijednosti λ predstavlja kvadrate kanoničkih korelacija (koeficijente determinacije kanoničkih korelacija, odnosno proporcije zajedničke varijance dvaju kanoničkih faktora koji pripadaju istom paru) pa je dijagonalna matrica kanoničkih korelacija R_c (za koje vrijedi $r_{c1} \geq r_{c2} \dots$) jednaka

$$R_c = \lambda^{1/2},$$

odnosno

$$R_c = \phi_1^T \phi_2 n^{-1}.$$

Dakle, svojstvene vrijednosti λ predstavljaju proporciju zajedničke varijance dvaju pripadajućih kanoničkih faktora. One ne govore o količini varijance koju je objasnio neki kanonički faktor u bilo kojem

skupu varijabli, već o tome koliko je zajedničke varijance u svakom paru kanoničkih faktora.

Matrica svojstvenih vektora X_2 predstavlja koeficijente kojima je moguće transformirati početne varijable drugog skupa u linearne kompozite (kanoničke faktore) drugog skupa

$$\phi_2 = Z_2 X_2,$$

a matrica X_1 , sadrži koeficijente kojima je moguće transformirati početne varijable prvog skupa u kanoničke faktore prvog skupa

$$\phi_1 = Z_1 X_1,$$

izračuna se operacijom

$$X_1 = (R_{11}^{-1} R_{12} X_2) \lambda^{-1/2}.$$

Dakle, matrice X_1 i X_2 sadrže kanoničke koeficijente (pondere) kojima se transformiraju analizirane varijable u kanoničke faktore, te ih je moguće koristiti u interpretaciji kanoničkih faktora jer predstavljaju jedinstveni utjecaj svake varijable u na formiranje kanoničkih faktora.

Osim toga, za interpretaciju sadržaja kanoničkih faktora korisno je izračunati i matrice korelacija (struktura) između početnih (manifestnih) varijabli i dobivenih kanoničkih faktora (F_1 i F_2). Izračunaju se operacijama

$$\begin{aligned} F_1 &= Z_1^T \phi_1 n^{-1} & F_2 &= Z_2^T \phi_2 n^{-1} \\ &= Z_1^T Z_1 X_1 n^{-1} & &= Z_2^T Z_2 X_2 n^{-1} \\ &= R_{11} X_1 & &= R_{21} X_2 \end{aligned}$$

Ako se suma kvadriranih korelacija u matricama F_1 i F_2 za svaki kanonički faktor podijeli brojem manifestnih varijabli prvog m_1 i drugog m_2 skupa, dobije se proporcija zajedničke varijance svakog faktora prvog skupa s varijablama prvog skupa i svakog faktora drugog skupa s varijablama drugog skupa (*engl. variance extracted*). Dakle, taj podatak daje indikaciju o količini varijance koju je moguće objasniti svakim kanoničkim faktorom u pripadajućem skupu varijabli. Sumiranjem pojedinih varijanci (od svakog kanoničkog faktora) dobije se ukupna količina objašnjene varijance pomoću svih kanoničkih faktora pripadajućeg skupa varijabli.

Isto tako, moguće je izračunati i matrice kroskorelacija između početnih varijabli jednog skupa s kanoničkim faktorima drugog skupa

$$\begin{aligned} F_{12} &= \mathbf{Z}_1^T \boldsymbol{\phi}_2 n^{-1} & F_{21} &= \mathbf{Z}_2^T \boldsymbol{\phi}_1 n^{-1} \\ &= \mathbf{Z}_1^T \mathbf{Z}_2 \mathbf{X}_2 n^{-1} & &= \mathbf{Z}_2^T \mathbf{Z}_1 \mathbf{X}_1 n^{-1} \\ &= \mathbf{R}_{12} \mathbf{X}_2 & &= \mathbf{R}_{21} \mathbf{X}_1 \end{aligned}$$

Ako se suma kvadriranih korelacija u matricama F_{12} i F_{21} za svaki kanonički faktor podijeli brojem manifestnih varijabli prvog m_1 , odnosno drugog m_2 skupa, dobije se proporcija varijance svakog faktora iz prvog skupa s varijablama iz drugog skupa, odnosno svakog faktora iz drugog skupa s varijablama iz prvog skupa, a naziva se *redundancija* (engl. *redundancy*). Dakle, redundancija se interpretira kao proporcija varijance prvog skupa varijabli koja se može objasniti kanoničkim faktorima drugog skupa varijabli i obrnuto. Suma redundantnih varijanci (od svakog kanoničkog faktora) daje podatak o ukupnoj redundantnoj varijanci, odnosno o veličini varijance prvog skupa varijabli koju je moguće procijeniti drugim skupom varijabli i obrnuto. Zato se može koristiti kao pokazatelj moguće procjene (rekonstrukcije) jednog skupa varijabli na temelju drugog skupa varijabli.

Kanoničku analizu moguće je izvesti i pomoću glavnih komponenata dobivenih faktorizacijom varijabli iz matrica $\mathbf{Z}_1$ i $\mathbf{Z}_2$ (Fulgosi, 1984; Momirović, 1984).

Ako se spektralnom dekompozicijom korelacijskih matrica (v. poglavlje 3.2, str. 219-223) prvoga i drugog skupa varijabli

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\lambda}_1 \mathbf{X}_1^T \qquad \mathbf{R}_{22} = \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\lambda}_2 \mathbf{X}_2^T$$

dobiju matrice svojstvenih vektora $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$, za koje vrijedi da je $\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1 = \mathbf{I}$ i $\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2 = \mathbf{I}$ s pripadajućim matricama svojstvenih vrijednosti $\boldsymbol{\lambda}_1$ i $\boldsymbol{\lambda}_2$, onda je standardizirane glavne komponente prvog i drugog skupa varijabli moguće dobiti operacijom

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\lambda}_1^{-1/2} \qquad \boldsymbol{\psi}_2 = \mathbf{Z}_2 \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\lambda}_2^{-1/2}.$$

Operacijom

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\psi}_2^T \boldsymbol{\psi}_1 n^{-1}$$

izračuna se matrica kroskorelacija glavnih komponentata prvoga i drugog skupa. Problem određivanja kanoničkih korelacija svodi se na spektralnu dekompoziciju matrice $Q^T Q$

$$Q^T Q = Y_2 \theta Y_2^T,$$

gdje je

- Y_2 matrica svojstvenih vektora za koju vrijedi da je $Y_2^T Y_2 = I$
- θ dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti koje predstavljaju kvadrate kanoničkih korelacija između ortogonalno transformiranih glavnih komponentata prvoga i drugog skupa.

Dijagonalna matrica kanoničkih korelacija R_c (za koje vrijedi $r_{c1} \geq r_{c2}, \dots, r_{cm}$) jednaka je

$$R_c = \theta^{1/2}.$$

Koeficijenti za transformaciju standardiziranih glavnih komponentata prvog skupa u kanoničke faktore dobiju se operacijom

$$Y_1 = Q Y_2 \theta^{1/2}.$$

Matrice Y_1 i Y_2 sadrže koeficijente kojima je moguće transformirati standardizirane glavne komponente prvog i drugog skupa u kanoničke faktore operacijom

$$\phi_1 = \psi_1 Y_1 \quad \phi_2 = \psi_2 Y_2.$$

Matrice korelacija između početnih varijabli i dobivenih kanoničkih faktora (F_1 i F_2) izračunaju se operacijama

$$F_1 = Z_1^T \phi_1 n^{-1} \quad F_2 = Z_2^T \phi_2 n^{-1},$$

a operacijom

$$F_{12} = Z_1^T \phi_2 n^{-1} \quad F_{21} = Z_2^T \phi_1 n^{-1}$$

izračunju se matrice kroskorelacija između manifestnih varijabli jednog skupa i kanoničkih faktora drugog skupa.

3.3.1 Testiranje značajnosti kanoničkog modela

Statistička značajnost kanoničkih korelacija testira se tzv. *Bartlettovim* χ^2 -testom (Bartlett, 1941). Prvo se testira nulta hipoteza,

$$H_0 : R_{c1} = 0$$

odnosno, provjerava se statistička značajnost za prvu kanoničku korelaciju R_{c1}

$$\chi^2 = - \left[(n-1) - \left(\frac{k+m+1}{2} \right) \right] \cdot \log_e \prod_{j=1}^m (1 - \lambda_j).$$

Izračunate χ^2 -vrijednosti raspodjeljuje se prema χ^2 -distribuciji s brojem stupnjeva slobode

$$df = k m$$

Ako se prva kanonička korelacija pokaže statistički značajnom (odbaci se nulta hipoteza), onda se testira značajnost druge kanoničke korelacije tako da se produkti računaju iz preostalih $m-1$ kanoničkih korelacija

$$\chi^2 = - \left[(n-1) - \left(\frac{k+m+1}{2} \right) \right] \cdot \log_e \prod_{j=2}^m (1 - \lambda_j),$$

gdje izračunate χ^2 -vrijednosti imaju χ^2 -distribuciju (tablica, D str. 322) s brojem stupnjeva slobode $df = (k - 1)(m - 1)$. Testiranje se nastavlja računanjem produkata od $g+1$ do m kanoničke korelacije (gdje je g broj kanoničkih korelacija koje su već testirane) s brojem stupnjeva slobode $df = (k - g)(m - g)$. Dakle, općenito se može napisati formula za testiranje statističke značajnosti kanoničkih korelacija nakon što je testirano g kanoničkih korelacija

$$\chi^2 = - \left[(n-1) - \left(\frac{k+m+1}{2} \right) \right] \cdot \log_e \prod_{j=g+1}^m (1 - \lambda_j)$$

Statistička značajnost kanoničkih korelacija testira se redom od prve do posljednje. Utvrdi li se da neka kanonička korelacija nije statistički značajna, tada niti jedna sljedeća kanonička korelacija ne može biti statistički značajna. Interpretiraju se samo oni parovi kanoničkih faktora čija je kanonička korelacija statistički značajna.

3.4

Diskriminacijska analiza

Statistička značajnost razlika između dviju ili više grupa u jednoj ili više varijabli vrlo se često utvrđuje u antropološkim istraživanjima. Analize koje se koriste u tu svrhu moguće je razlikovati prema broju grupa entiteta i broju varijabli:

- *t - test* se koristi za utvrđivanje statističke značajnosti razlika između aritmetičkih sredina dviju nezavisnih grupa (različitih) ispitanika i dviju zavisnih grupa (ista grupa ispitanika izmjerena istim testom u dva mjerenja) te razlika aritmetičke sredine grupe i neke poznate aritmetičke sredine ili populacijske aritmetičke sredine;
- *univarijatna analiza varijance (ANOVA)* koristi se za utvrđivanje statističke značajnosti razlike dviju ili više grupa entiteta u jednoj varijabli;
- *multivarijatna analiza varijance (MANOVA)* koristi se za utvrđivanje statističke značajnosti razlika dviju ili više grupa entiteta mjerenih u dvije ili više varijabli;

- *diskriminacijska analiza* koristi se za utvrđivanje statističke značajnosti razlika više grupa entiteta mjerenih u više varijabli, pri čemu se utvrđuje koliko se grupe međusobno razlikuju i koliko pojedine varijable pridonose toj razlici, a moguće je i prognozirati pripadnost pojedinog entiteta grupi.

Prve dvije metode ubrajaju se u grupu *univarijatnih*, a druge dvije u grupu *multivarijatnih metoda*¹.

3.4.1. Multivarijatna analiza varijance

Multivarijatna analiza varijance koristi se za utvrđivanje statističke značajnosti razlika dviju ili više grupa entiteta opisanih pomoću dvije ili više varijabli. Univarijatna i multivarijatna analiza varijance počivaju na istim logičkim načelima. Kako je već istaknuto (v. poglavlje 2. 10, str. 150-159), položaj bilo kojeg entiteta može se izraziti u obliku jednadžbe

$$(x_{gi} - \bar{x}) = (x_{gi} - \bar{x}_g) + (\bar{x}_g - \bar{x}),$$

gdje je

- x_{gi} rezultat entiteta i iz grupe g ($g=1, \dots, k$; k -broj grupa)
- $\bar{x}$ zajednička aritmetička sredina
- $\bar{x}_g$ aritmetička sredina grupe kojoj entitet pripada.

Isto vrijedi i za multivarijatnu analizu varijance, s tom razlikom što je svaki entitet opisan pomoću više varijabli

$$(x_{gi} - m) = (x_{gi} - m_g) + (m_g - m),$$

gdje je

- x_{gi} vektor rezultata entiteta i iz grupe g ($g=1, \dots, k$; k -broj grupa) u analiziranim varijablama
- m vektor aritmetičkih sredina u analiziranim varijablama za sve grupe
- m_g vektor aritmetičkih sredina u analiziranim varijablama za grupu kojoj entitet pripada.

¹ Univarijatne metode analiziraju jednu varijablu, a multivarijatne više varijabli istovremeno.

Neka je skup od n entiteta svrstanih u k grupa i opisan pomoću m kvantitativnih normalno distribuiranih varijabli. Za svaku grupu formira se matrica podataka

$$\mathbf{B}_g = (b_{fj}),$$

gdje je

- $g = 1, \dots, k$, k broj grupa
- $f = 1, \dots, n_g$, n_g broj entiteta u grupi g
- $j = 1, \dots, m$, m broj varijabli,

a od svih matrica $\mathbf{B}_g$ formira se matrica $\mathbf{B}$ tako da se matrice $\mathbf{B}_g$ slože jedna ispod druge

$$\mathbf{B} = (b_{ij}),$$

gdje je

- $i = 1, \dots, n$ n broj svih entiteta ($n = \sum_{g=1}^k n_g$)
- $j = 1, \dots, m$ m broj varijabli.

Vektor aritmetičkih sredina $\mathbf{m}$ izračuna se operacijom

$$\mathbf{m} = \mathbf{B}^T \mathbf{1} n^{-1},$$

gdje je $\mathbf{1}$ vektor stupca sa n jedinica.

Vektor $\mathbf{m}$ predstavlja *zajednički centroid*², odnosno vektor aritmetičkih sredina varijabli koji u obzir uzima sve entiteta.

Matrica odstupanja rezultata entiteta od zajedničkog centroida dobije se operacijom

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} - \mathbf{1} \mathbf{m}^T,$$

a operacijom

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$$

ili

$$\mathbf{T} = \sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (\mathbf{b}_{g_i} - \mathbf{m})(\mathbf{b}_{g_i} - \mathbf{m})^T$$

gdje je

- k broj grupa
- n_g broj entiteta u grupi g

² Centroid je vektor aritmetičkih sredina varijabli.

- $\mathbf{b}_{gi}$ vektor rezultata entiteta i iz grupe g u analiziranom skupu varijabli
- $\mathbf{m}$ vektor aritmetičkih sredina za sve entitete,

dobije se *matrica suma kvadrata i kros produkata za total*.

Ako se matrica $\mathbf{T}$ podijeli brojem entiteta, dobije se *matrica kovarijanci za total*.

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^T \mathbf{D} n^{-1}$$

Isto se tako operacijom

$$\mathbf{m}_g = \mathbf{B}_g^T \mathbf{1}_g n_g^{-1},$$

gdje je $g = 1, \dots, k$, a $\mathbf{1}_g$ vektor stupca sa n_g jedinica, izračuna k vektora aritmetičkih sredina varijabli gdje se u obzir uzimaju samo entiteti iz pojedine grupe (n_g).

Matrice odstupanja rezultata entiteta od centroida svake grupe $\mathbf{D}_g$ (odstupanja unutar grupa) dobiju se operacijom

$$\mathbf{D}_g = \mathbf{B}_g - \mathbf{1}_g \mathbf{m}_g^T,$$

a operacijom

$$\mathbf{W}_g = \mathbf{D}_g^T \mathbf{D}_g$$

matrice suma kvadrata i krosprodukata za svaku grupu.

Sumacijom svih dobivenih matrica dobije se *matrica suma kvadrata i krosprodukata unutar grupa*

$$\mathbf{W} = \sum_{g=1}^k \mathbf{W}_g$$

ili

$$\mathbf{W} = \sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (\mathbf{b}_{gi} - \mathbf{m}_g)(\mathbf{b}_{gi} - \mathbf{m}_g)^T,$$

gdje je

- k broj grupa
- n_g broj entiteta u grupi g
- $\mathbf{b}_{gi}$ vektor rezultata entiteta i iz grupe g u analiziranom skupu varijabli
- $\mathbf{m}_g$ vektor aritmetičkih sredina za grupu g (kojoj entitet pripada).

S obzirom na to da je

$$\mathbf{T} = \mathbf{W} + \mathbf{A},$$

matrica suma kvadrata i krosprodukata između grupa izračuna se oduzimanjem matrica $\mathbf{T}$ i $\mathbf{W}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} - \mathbf{W}$$

ili

$$\mathbf{A} = \sum_{g=1}^k \sum_{i=1}^{n_g} (\mathbf{m}_g - \mathbf{m})(\mathbf{m}_g - \mathbf{m})^T = \sum_{g=1}^k n_g (\mathbf{m}_g - \mathbf{m})(\mathbf{m}_g - \mathbf{m})^T,$$

gdje je

- k broj grupa
- n_g broj entiteta u grupi g
- $\mathbf{m}_g$ vektor aritmetičkih sredina za grupu g (kojoj entitet pripada)
- $\mathbf{m}$ vektor aritmetičkih sredina za sve entitete.

Statistička značajnost razlike između centroida grupa testira se Willksovim testom, odnosno tzv. *Willksovom lambdom*

$$\lambda_w = \frac{\det(\mathbf{W})}{\det(\mathbf{T})}.$$

Formula pokazuje da smanjenje odnosa između determinanti matrice $\mathbf{W}$ i $\mathbf{T}$ (ako se determinanta matrice $\mathbf{T}$ povećava u odnosu na determinantu matrice $\mathbf{W}$) prati povećanje vjerojatnosti s kojom se odbacuje nulta hipoteza. Drugim riječima, ako se kovariranje unutar grupa povećava u odnosu na totalno kovariranje, smanjuje se vjerojatnost za statistički značajne razlike. Zbog vrlo složene distribucije Wilksove lambde (λ_w), izračunava se tzv. *aproksimativna F-vrijednost* koja ima *F-distribuciju* (Rao, 1951,1952, prema Momirović, Gredelj i Sirovicza,1977):

$$F = \frac{1 - \lambda_w^{1/S}}{\lambda_w^{1/S}} \cdot \frac{df_2}{df_1}$$

gdje je

$$s = \sqrt{\frac{m^2(k-1)^2 - 4}{m^2 + (k-1)^2 - 5}},$$

a df_1 i df_2 su stupnjevi slobode

$$df_1 = m(k-1)$$

$$df_2 = s \left((n-1) - \frac{m+k}{2} \right) - \left(\frac{m \cdot (k-1) - 2}{2} \right)$$

Bitno je istaknuti da multivarijatna analiza varijance pretpostavlja normalnu distribuciju varijabli te jednakost varijanci u pojedinim grupama. Dakle, multivarijatnoj analizi varijance u pravilu prethode testovi kojima se provjerava normalnost distribucija (npr. *KS - test*) i jednakost varijanci pojedinih grupa (npr. *Boxov - test*). Ako se utvrdi da varijable ne odstupaju statistički značajno od normalne distribucije te da im varijance nisu statistički značajno različite, onda je Willksovim testom moguće utvrditi statističku značajnost razlike između centroida grupa. Ako Willksov test pokaže da se centroidi grupa statistički značajno razlikuju, onda je moguće utvrđivati statističku značajnost razlike u svakoj varijabli serijom *univarijatnih analiza varijance* (ANOVA).

U slučaju da je $k=2$, dakle ako se utvrđuje razlika između dviju grupa, onda je značajnosti razlika između centroida grupa moguće testirati preko tzv. *Mahalanobisove distance* između centroida prve i druge grupe

$$d^2 = (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2),$$

gdje je

- d^2 Mahalanobisova udaljenost
- $\mathbf{m}_1$ i $\mathbf{m}_2$ centroidi prve i druge grupe
- $\mathbf{C}$ zajednička matrica kovarijanci.

Na temelju Mahalanobisove udaljenosti (d^2) moguće je izračunati tzv. *Hotellingovu* T^2 vrijednost (Hotelling, 1931)

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} d^2.$$

T^2 -vrijednost ima vrlo složenu distribuciju pa ju je moguće transformirati formulom (Rao, 1951, 1952, prema Momirović, Gredelj i Sirovicza, 1977)

$$F = \frac{n_1 + n_2 - m - 1}{m(n_1 + n_2 - 2)} T^2,$$

koja ima F-distribuciju sa stupnjevima slobode

$$df_1 = m \quad \text{i} \quad df_2 = (n_1 + n_2 - m - 1),$$

pomoću koje je moguće testirati statističku značajnost razlika tih dviju grupa.

3.4.2. Diskriminacijska analiza

Diskriminacijska analiza je superiorna u odnosu na multivarijatnu analizu varijance jer se njome dobiju informacije o tome koliko se grupe međusobno razlikuju (položaji centroida grupa u prostoru diskriminacijskih funkcija) i koliko pojedine varijable pridonose toj razlici (matrica korelacija varijabli s diskriminacijskim funkcijama), a moguće je i prognozirati pripadnost pojedinog entiteta grupi. Osnovni zahtjevi od kojih se polazi u diskriminacijskoj analizi jesu konstruiranje manjeg broja latentnih varijabli (koje se dobiju kao linearne kombinacije originalnih varijabli, a zovu se diskriminacijske funkcije) na temelju kojih je moguće najbolje opisati razlike među analiziranim grupama. To je moguće ostvariti maksimiziranjem izraza

$$\lambda_j = \frac{\mathbf{x}_j^T \mathbf{A} \mathbf{x}_j}{\mathbf{x}_j^T \mathbf{W} \mathbf{x}_j},$$

odnosno, problem se može svesti na rješavanje *karakteristične jednadžbe*

$$(\mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{x}_j = 0,$$

uz uvjet

$$\lambda_j = \max \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j = 1,$$

gdje je $\mathbf{W}$ matrica suma kvadrata i krosprodukata unutar grupa, $\mathbf{A}$ suma kvadrata i krosprodukata između grupa (v. prethodno poglavlje), a $j=1, \dots, k-1$ (k - broj grupa) označava svojstvene vrijednosti (λ_j) i njima pripadajuće svojstvene vektore ($\mathbf{x}_j$) matrice $\mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}$.

Potrebno napomenuti da se svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora dobije onoliko koliko je grupa manje jedan ili ako je broj varijabli manji od broja grupa, onda onoliko koliko je varijabli.

Neka je skup od n entiteta, svrstanih u k grupa, opisan pomoću m kvantitativnih normalno distribuiranih varijabli. Za svaku grupu formira se matrica podataka

$$\mathbf{B}_g = (b_{fg}),$$

gdje je $g = 1, \dots, k$ (k broj grupa), $f = 1, \dots, n_g$ (n_g broj entiteta u grupi g), $j = 1, \dots, m$ (m broj varijabli), a od svih matrica $\mathbf{B}_g$ formira se matrica $\mathbf{B}$ tako da se matrice $\mathbf{B}_g$ slože jedna ispod druge

$$\mathbf{B} = (b_{ij}).$$

Matrica centriranih rezultata, odnosno odstupanja rezultata entiteta od zajedničkog centroida dobije se operacijom

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} - \mathbf{1}\mathbf{m}^T,$$

gdje je $\mathbf{m} = \mathbf{B}^T \mathbf{1} n^{-1}$ vektor aritmetičkih sredina, a $\mathbf{1}$ vektor stupca sa n jedinica. Operacijom

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{11} & \cdot & \cdot & \psi_{1k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{n1} & \cdot & \cdot & \psi_{nk-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\psi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdot & \cdot & d_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & \cdot & \cdot & d_{nm} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & \cdot & \cdot & x_{mk-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}$$

centrirani se rezultati entiteta iz matrice $\mathbf{D}$ transformiraju u tzv. *diskriminacijske funkcije*. Dijagonalna matrica varijanci diskriminacijskih funkcija dobije se operacijom

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta} &= \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} n^{-1} \\ &= (\mathbf{D}\mathbf{X})^T \mathbf{D} \mathbf{X} n^{-1} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{X} n^{-1} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Normiranjem diskriminacijskih funkcija $\boldsymbol{\psi}$ vrijednostima iz matrice $\boldsymbol{\Delta}$ dobije se matrica standardiziranih diskriminacijskih funkcija

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\Delta}^{-1/2} \\ &= \mathbf{D} \mathbf{X} \boldsymbol{\Delta}^{-1/2} \end{aligned}$$

s varijancama jedan.

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\phi^T \phi n^{-1} &= (\psi \Delta^{-1/2})^T (\psi \Delta^{-1/2}) n^{-1} \\
&= \psi^T \psi \Delta^{-1/2} \Delta^{-1/2} n^{-1} \\
&= \Delta \Delta^{-1/2} \Delta^{-1/2} \\
&= \Delta \Delta^{-1} \\
&= I
\end{aligned}$$

jer je $\psi^T \psi n^{-1} = \Delta$, a $\Delta^{-1/2} \Delta^{-1/2} = \Delta^{-1}$. Dakle, vektori matrice standardiziranih diskriminacijskih varijabli su ortonormirani.

Interpretacija sadržaja diskriminacijskih funkcija, odnosno relativnog utjecaja pojedine varijable na diskriminiranje grupa nije moguća pomoću vrijednosti iz matrice X jer su one ovisne o mjernim jedinicama. Stoga ih je potrebno standardizirati. Matrica standardiziranih varijabli iz B izračuna se operacijom

$$Z = D V^{-1/2},$$

gdje je $V = \text{diag} C$ dijagonalna matrica varijanci varijabli iz B , jer je $C = (B^T B - B^T P B) n^{-1}$ matrica kovarijanci, gdje je $P = 1(1^T 1)^{-1} 1^T$ lijevi centroidni projektor matrice B , a 1 vektor stupca sa n jedinica.

Standardizirani diskriminacijski koeficijenti izračunaju se operacijom

$$\beta = V^{1/2} X \Delta^{-1/2}$$

pa se standardizirane diskriminacijske funkcije dobiju operacijom

$$\phi = Z \beta.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\phi &= Z \beta \\
DX \Delta^{-1/2} &= DV^{-1/2} \beta \\
(DV^{-1/2})^{-1} DX \Delta^{-1/2} &= (DV^{-1/2})^{-1} DV^{-1/2} \beta \quad / (DV^{-1/2})^{-1} \\
V^{1/2} D^{-1} DX \Delta^{-1/2} &= \beta \\
V^{1/2} X \Delta^{-1/2} &= \beta
\end{aligned}$$

jer je $(DV^{-1/2})^{-1} = V^{1/2} D^{-1}$, $(DV^{-1/2})^{-1} DV^{-1/2} = I$, $D^{-1} D = I$.

Sada je moguće izračunati matricu strukture, odnosno korelacija originalnih i diskriminacijskih varijabli, operacijom

$$\begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & \cdot & \cdot & f_{1k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{m1} & \cdot & \cdot & f_{mk-1} \end{bmatrix}}^{\mathbf{F}} & = & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & r_{21} & \cdot & r_{1m} \\ r_{12} & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ r_{m1} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{R}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdot & \cdot & \beta_{1k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{m1} & \cdot & \cdot & \beta_{mk-1} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{\beta}} \end{matrix}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\phi} n^{-1} \\ &= \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta} n^{-1} \\ &= \mathbf{R} \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

jer je $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} n^{-1} = \mathbf{R}$ matrica korelacija između početnih varijabli.

Korelacije između početnih (originalnih) i diskriminacijskih funkcija određuju strukturu, odnosno njihov sadržaj. Diskriminacijske funkcije dobivene su kao linearne kombinacije analiziranih varijabli i to tako da maksimalno razlikuju centroide grupa. Stoga se logično nameće pitanje o prirodi njihovih relacija s onim iz čega su nastale. Analizirane varijable nemaju jednak doprinos formiranju diskriminacijskih funkcija. Stoga korelacije analiziranih varijabli i diskriminacijskih funkcija predstavljaju relativan doprinos, odnosno proporcionalne su važnosti svake varijable u formiranju diskriminacijskih funkcija, a time i razlikovanju analiziranih grupa.

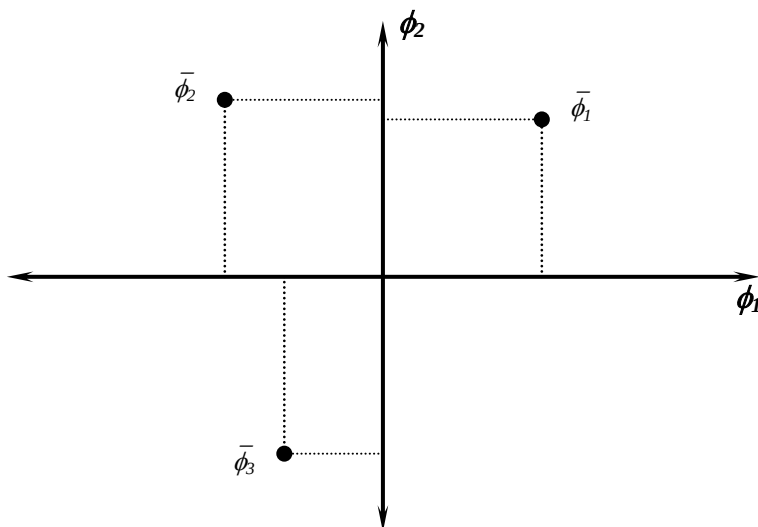
Ako se od vektora aritmetičkih sredina svake pojedine grupe (centroida grupa)

$$\mathbf{m}_g = \mathbf{Z}_g^T \mathbf{1}_g n_g^{-1}$$

formira matrica centorida grupa (centroide grupa poredamo jedan do drugoga tako da su u recima varijable, a u stupcima grupe), dobije se matrica $\mathbf{M}$, pomoću koje se operacijom

$$\begin{array}{c} \overline{\phi} \\ \left[\begin{array}{ccc} \overline{\phi}_{11} & \cdot & \overline{\phi}_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{\phi}_{k-1} & \cdot & \overline{\phi}_{k-1k} \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \beta^T \\ \left[\begin{array}{ccc} \beta_{11} & \cdot & \beta_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{k-11} & \cdot & \beta_{k-1m} \end{array} \right] \end{array} \cdot \begin{array}{c} M \\ \left[\begin{array}{ccc} m_{11} & \cdot & m_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{m1} & \cdot & m_{mk} \end{array} \right] \end{array}$$

dobije matrica centroida grupa u prostoru standardiziranih diskriminacijskih funkcija (slika 3.4-1).



Slika 3.4-1. Koordinate centroida triju grupa u koordinatnom sustavu dviju diskriminacijskih funkcija

Centroidi su aritmetičke sredine analiziranih grupa ispitanika u koordinatnom sustavu diskriminacijskih funkcija te imaju važnu ulogu pri interpretaciji rezultata diskriminacijske analize. Oni pokazuju koliko se grupe međusobno razlikuju po svakoj diskriminacijskoj funkciji. Tako, primjerice, na temelju slike 3.4-1, koja prikazuje centroe triju grupa u koordinatnom sustavu dviju diskriminacijskih funkcija, moguće je uočiti da se prva grupa znatno razlikuje od druge i treće po prvoj diskriminacijskoj funkciji, dok druga diskriminacijska funkcija u velikoj mjeri razlikuje treću grupu u odnosu na prvu i drugu, koje su po drugoj diskriminacijskoj funkciji vrlo slične.

Koeficijenti kanoničke diskriminacije za svaku diskriminacijsku varijablu izračunaju se operacijom

$$R_{cj} = \sqrt{\frac{\lambda_j}{1 + \lambda_j}}.$$

Koeficijenti kanoničke diskriminacije predstavljaju korelacije između diskriminacijskih funkcija i binarne varijable kojom je određena pripadnost pojedinog entiteta grupi. Veći koeficijent kanoničke diskriminacije znači veće mogućnosti razlikovanja grupa na temelju pripadajuće diskriminacijske funkcije.

Pomoću diskriminacijskih funkcija moguće je prognozirati pripadnost pojedinog entiteta nekoj od analiziranih grupa, odnosno izvršiti klasifikaciju entiteta. Udaljenost nekog entiteta i od centroida neke grupe g odredi se operacijom

$$d_{ig}^2 = (\phi_i - \bar{\phi}_g)^T (\phi_i - \bar{\phi}_g) \quad g = 1, \dots, k,$$

gdje je ϕ_i vektor rezultata entiteta i u diskriminacijskim funkcijama, a $\bar{\phi}_g$ vektor aritmetičkih sredina grupe g na diskriminacijskim funkcijama. Stoga, ako je

$$d_{ig}^2 < d_{ih}^2 \quad h = 1, \dots, k; \quad g \neq h$$

tada entitet i pripada grupi g .

3.4.2.1. Testiranje značajnosti diskriminacijskog modela

Statistička značajnost diskriminacijskih funkcija, slično kao i kod testiranja statističke značajnosti kanoničkih korelacija, testira se redom od prve do posljednje. Nakon što se redom utvrdi da neka diskriminacijska funkcija nije statistički značajna, niti jedna sljedeća neće biti statistički značajna. Interpretiraju se samo one diskriminacijske funkcije koje se pokažu statistički značajnima.

Statistička značajnost diskriminacijskih funkcija testira se pomoću formule

$$\chi^2 = -\left(n - \frac{m+k}{2} - 1\right) \log_e \left(\prod_{j=p+1}^q \frac{1}{1 + \lambda_j} \right),$$

gdje je

- n broj entiteta
- m broj varijabli

- k broj grupa
- q broj diskriminacijskih funkcija kojih je m ili $k-1$, ovisno o tome čega je manje
- p broj prethodno testiranih diskriminacijskih funkcija
- λ_j svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}$.

Izračunate χ^2 -vrijednosti imaju približno χ^2 -distribuciju (tablica D str. 322) s brojem stupnjeva slobode

$$df = (m-p)(k-p-1).$$

4

Osnove kineziometrije

4.1

Osnovni kineziometrijski pojmovi

Kineziometrija (grč. *kinezis* - kretanje, *metron* - mjera) je znanstvena disciplina koja se bavi problemima mjerenja u kineziologiji. Kineziologija je znanost čiji je cilj utvrditi zakonitosti upravljanog procesa vježbanja i posljedice tih procesa na čovjekov organizam, a predmet istraživanja, sažeto rečeno, utvrđivanje ciljeva nekog procesa vježbanja, utvrđivanje stanja subjekta u relaciji s postavljenim ciljevima te planiranje, programiranje, provođenje i kontrola procesa vježbanja (Mraković, 1992). Za znanstveno istraživanje navedenih problema, a to znači za utvrđivanje zakonitosti po kojima se odvija neki trenažni proces, potrebno je imati odgovarajuće postupke koji omogućavaju prikupljanje relevantnih podataka o stanju subjekta. Upravo se tim problemima bavi kineziometrija; dakle, problemima mjerenja, odnosno, konstrukcije i validacije mjernih instrumenata za procjenu kinezioloških fenomena.

4.1.1. Mjerenje

Postoji puno različitih definicija mjerenja. Tako, primjerice, Guilford (1968) mjerenjem smatra pridodavanje brojeva predmetima i događajima u skladu s pravilima koja su logički ispravna. Nunnally (1967) mjerenje definira kao skup pravila za pridruživanje brojeva objektima da bi se predstavili kvantiteti atributa. Momirović (1988, prema Momirović i sur., 1999) smatra mjerenje operacijom kojom se, u skladu s nekim potpunim i točnim skupom pravila, omogućava pridruživanje oznake ili broja koji se odnosi na neko određeno svojstvo tako da se bilo koja dva objekta koja se po mjerenom svojstvu razlikuju mogu razlikovati i bilo koja dva objekta koja su po tom svojstvu identična, mogu smatrati identičnima. Viskiće-Štalec (1997) mjerenje definira kao operaciju kojom se nekom objektu pridružuje oznaka ili numerička vrijednost koja odgovara razvijenosti mjerene karakteristike, odnosno to je određivanje pozicije subjekta ili objekta na nekoj od mjernih ljestvica. Prema navedenim definicijama vidljivo je da je mjerenje postupak kojim se objektima (entitetima, ispitanicima) pridružuju brojevi ili oznake prema određenim pravilima u skladu s razvijenosti mjenog svojstva (atributa, karakteristike, obilježja) čime se postiže njegova kvantifikacija ili klasifikacija.

Moguće je razlikovati dvije vrste mjerenja. To su *direktno* (izravno, neposredno) i *indirektno* (neizravno, posredno). U direktnom mjerenju predmet mjerenja i mjerna jedinica imaju ista svojstva. Primjerice, mjerenje prostornih obilježja (širina, dužina, visina) i mase nekog objekta. Mjeri se uspoređivanjem mjenog svojstva s određenom veličinom tog istog svojstva koja se dogovorom odredi kao jedinica mjere (npr. metar, milja, kilogram i sl.). Dakle, ako se masa nekog tijela odredi kao mjerna jedinica, onda se njome može odrediti masa bilo kojeg objekta. Za razliku od direktnog, u indirektnom mjerenju predmet mjerenja i mjerna jedinica nemaju ista svojstva. Primjerice, pri mjerenju električnog napona, temperature nekog objekta itd. Veličina električnog napona mjeri se veličinom odklona kazaljke na voltmetru, a temperatura nekog objekta mjeri se visinom stupca žive u termometru. Dakle, veličina predmeta mjerenja određuje se pomoću njegova utjecaja na druge objekte koji mijenja njihova svojstva, pa je na temelju izazvanih promjenama moguće odrediti veličinu mjenog svojstva ako između predmeta mjerenja i izazvanih promjena postoji neka stalna veza (relacija, odnos). Upravo takva mjerenja, dakle, indirektna, susreću se u kineziologiji, ali i u ostalim antropološkim

znanostima. Primjerice, ako se želi utvrditi razina eksplozivne snage (što može biti predmet mjerenja) nekog sportaša, onda je to moguće na temelju sportaševe uspješnosti (reakcije) u nekoj zadanoj motoričkoj aktivnosti (npr. u skoku udalj s mjesta). Na temelju izmjerene duljine koju sportaš može preskočiti (posljedica), zaključuje se o razini njegove eksplozivne snage (uzrok). Općenito se kineziološkim mjerenjima na temelju nekog standardiziranog postupka izaziva određena motorička reakcija ispitanika koje se veličina registrira, odnosno koje se efekt, izazvan nekim standardnim podražajem, mjeri.

4.1.2. Elementi mjerenja

U mjerenju je moguće uočiti nekoliko neizbježnih elemenata. To su: objekt mjerenja, predmet mjerenja, mjerilac, mjerna skala i mjerni instrument.

4.1.2.1. Objekt mjerenja

U kineziološkim istraživanjima objekti mjerenja najčešće su ljudi, ali mogu biti i sportske ekipe, tehnički elementi itd. Općenito, objekti mjerenja ili entiteti nosioci su informacija koje je moguće prikupiti nekim postupkom mjerenja, a kojima se može opisati stanje nekog entiteta.

4.1.2.2. Predmet mjerenja

Predmet mjerenja je određeno svojstvo koje se mjeri na objektima mjerenja, primjerice, antropometrijska obilježja (tjelesna visina, tjelesna težina, raspon ruku, opseg podlaktice itd.), motoričke sposobnosti (rezultati postignuti u rješavanju raznih motoričkih zadataka pomoću kojih se procjenjuje eksplozivna snaga, brzina, koordinacija, preciznost, fleksibilnost itd.), situacijska učinkovitost igrača ili ekipe (broj skokova u obrani, broj asistencija, broj uspješnih šutova za dva poena itd.) i sl. Valja naglasiti da su predmeti mjerenja u kineziološkim istraživanjima najčešće latentni, odnosno da nisu izravno mjerljivi, već se procjenjuju na temelju većeg broja mjerljivih manifestacija.

4.1.2.3. Mjerilac

Mjerilac je osoba koja provodi mjerenje. S obzirom na to da je u sva mjerenja u manjoj ili većoj mjeri uključen čovjek, pitanje je koliko su dobiveni rezultati mjerenja pod njegovim utjecajem, odnosno da li su oni od njega nezavisni. Naime, svakim se mjerenjem teži objektivnosti i nastoji se isključiti utjecaj mjerioca na rezultate mjerenja. Neki mjerni instrument smatra se objektivnim ako različiti mjerioci, mjereći iste ispitanike, dolaze do jednakih rezultata, a to se postiže standardiziranim postupkom mjerenja. Problem objektivnosti mjerenja posebno će se razmatrati u poglavlju 4.3. Metrijske karakteristike (str. 272-312).

4.1.2.4. Mjerne skale

Uspješnost mjerenja ovisi o stupnju podudarnosti između brojeva i mjerenih svojstava. Prema Mejovšku (2003), tri su bitna svojstva brojeva koja to omogućavaju:

- *identitet* – svaki broj, kao i svako svojstvo objekta, ima svoj identitet, tj. jedinstveni su i različiti od drugih objekata;
- *rang* – brojevi su uređeni po veličini pa se i objekti prema mjerenom svojstvu mogu rangirati, odnosno poredati prema veličini mjerenog svojstva;
- *aditivnost* – brojevi se mogu zbrajati. Zbroj dvaju brojeva uvijek je neki jedinstveni broj. Svojstvo aditivnosti imaju ona obilježja objekata koja se mogu podijeliti na potpuno jednake dijelove (među kojima postoji jednak razmak). Primjerice, tjelesna visina i tjelesna masa jer ih mjerimo mjernim jedinicama (npr. centimetri, grami) koje imaju isti razmak.

Pri mjerenju bilo kojeg fenomena (pa tako i kineziološkog) koristimo se nekom od sljedećih mjernih skala: nominalnom, ordinalnom, intervalnom i omjernom skalom.

Nominalna skala

Ako neko obilježje objekta ima samo svojstvo *identiteta*, onda se mjerenje provodi na *nominalnoj mjernoj skali*. Nominalna mjerna skala nema kvantitativna svojstva niti kontinuitet, već se entiteti razvrstavaju u određene kategorije ili klase, pri čemu se vodi računa da su klase definirane jednoznačno, odnosno da svaki entitet može

pripadati samo jednoj klasi. Rezultat mjerenja je frekvencija objekata koji pripadaju određenoj klasi (npr. muško-žensko, položili-pali itd.). Za nominalnu skalu vrijede sljedeća pravila:

- određuje se da li je $A=B$ ili $A \neq B$
- ako je $A=B$, onda je i $B=A$
- ako je $A=B$, a $B=C$, tada je $A=C$.

Pri tome je poredak kategorija koje izražavaju odgovarajući oblik mjerenog svojstva proizvoljan, odnosno oznake koje se pridružuju objektima (koje mogu biti i brojevi) nemaju kvantitativno značenje (ne izražavaju količinu mjerenog svojstva) i mogu se zamijeniti bilo kojim drugim skupom oznaka. S obzirom na to da se radi o nenumeričkoj (kvalitativnoj) skali, nikakve računske operacije nisu dopuštene. To znači da ne postoji mogućnost invarijantne transformacije¹ podataka dobivenih nominalnom skalom, osim da se korištene oznake zamijene drugima, pri čemu se ne mijenja pripadnost entiteta pojedinoj kategoriji.

Ordinalna skala

Ako mjereno obilježje objekta ima svojstvo *ranga*, onda se mjerenje provodi na *ordinalnoj mjernoj skali* koja, za razliku od nominalne mjerne skale, određuje rang, odnosno redoslijed vrijednosti. Ova mjerna skala, pored toga što određuje pripadnost pojedinih objekata nekoj klasi, određuje i njihov redoslijed, ali razlike između pojedinih klasa (vrijednosti) nisu jednake. Dakle, njome je moguće utvrditi je li neki objekt bolji od drugoga, ali ne i koliko je bolji (npr. redoslijed trkača na cilju neke utrke, školske ocjene itd). Za ordinalnu skalu, uz pravila koja su navedena za nominalnu skalu, vrijede i sljedeća pravila:

- ako je $A \neq B$, onda je $A > B$ ili $A < B$
- ako je $A > B$, onda $B \neq A$
- ako je $A > B$, a $B > C$, tada je $A > C$.

Za invarijantne transformacije dobivenih podataka moguće je koristiti one računske postupke koji ne mijenjaju rang, a to su sve monotone transformacije²:

- dodavanje i oduzimanje konstante
- množenje i dijeljenje konstantom
- eksponenciranje i logaritmiranje konstantnom bazom.

¹ Invarijantne transformacije ne mijenjaju bitna svojstva skale.

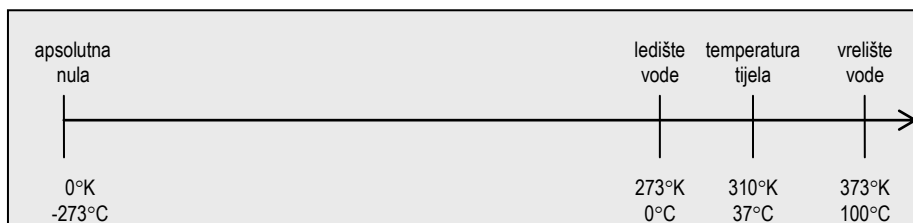
² Monotone transformacije imaju svojstvo stalnog porasta ili pada, odnosno ne mijenjaju smjer.

Intervalna skala

Ako obilježje ima svojstvo *aditivnosti*, mjerenje se provodi na intervalnoj ili omjernoj mjernoj skali. *Intervalna mjerna skala* ima kvantitativna svojstva i kontinuitet. Osim što utvrđuju redosljed, intervali uzduž skale su jednaki (ekvidistantni), a nulta vrijednost je određena dogovorom (primjerice, kod mjerenja temperature u °C, nulta vrijednost je određena kao temperatura pri kojoj se smrzava voda, kod z-vrijednosti nulta vrijednost predstavlja aritmetičku sredinu). Ova mjerna skala, osim što utvrđuje redosljed, tj. je li neki objekt bolji od drugoga, utvrđuje i za koliko je bolji. Za intervalnu skalu, uz pravila koja su navedena za nominalnu i ordinalnu skalu, vrijedi i pravilo:

$$(A-B) + (B-C) = (A-C)$$

Ako je, primjerice, ispitanik A postigao na nekom testu rezultat 100, ispitanik B rezultat 50, a ispitanik C rezultat 25 onda je: $(100-50) + (50-25) = (100-25)$. Dakle, za uspoređivanje entiteta mjerenih na ovoj skali možemo koristiti razlike, ali ne i omjere jer intervalna skala nema *apsolutnu nulu*. Apsolutna nula predstavlja vrijednost koja označava potpunu odsutnost mjerenog svojstva. Nije opravdano tvrditi da je temperatura objekta $A=100\text{ °C}$ (Celsiusa) 2,7 puta veća od temperature objekta $B=37\text{ °C}$ ($100/37 \approx 2,7$) jer temperatura od 0 °C ne predstavlja apsolutnu nulu (potpuna odsutnost mjerenog svojstva), već je arbitrarno utvrđena (ledište vode). Naime, poznato je da fenomen temperature počinje sa -273 °C ili 0 K (Kelvina), što jest apsolutna nula (slika 4.1.1). Prema tome, temperatura objekta A nije 2,7 puta veća od temperature objekta B, već 1,2 puta ($373/310 \approx 1,2$).



Slika 4.1.1. Odnos između Kelvinove i Celsiusove skale za mjerenje temperature

S obzirom na to da je vrijednost nulte točke arbitrarno određena, intervalna skala je invarijantna na sve linearne transformacije:

- dodavanje i oduzimanje konstante
- množenje i dijeljenje konstantom.

Omjerna skala

Osim svih svojstava intervalne mjerne skale, *omjerna skala* ima još i apsolutnu nulu (potpuna odsutnost mjenenog svojstva), odnosno, rezultati su izraženi od nulte vrijednosti pa jednaki brojevi odnosi (omjeri) znače i jednake odnose u mjerenoj pojavi (npr. mjerenje duljine, sile, vremena potrebnog za izvođenje neke aktivnosti). Za omjernu skalu, uz pravila koja su navedena za prethodne skale, vrijedi i pravilo:

$$\frac{A}{B} = \frac{nA}{nB}$$

Tako, primjerice, ako je ispitanik A u skoku udalj s mjesta postigao rezultat 300 cm, možemo reći da je 1,5 puta bolji od ispitanika B čiji je rezultat 200 cm ($300/200=1,5$). Pomnože li se rezultati ispitanika A i B bilo kojom konstantom, omjer njihovih rezultata ostaje nepromijenjen ($2 \cdot 300 / 2 \cdot 200 = 1,5$). Dakle, ova skala je invarijantna na množenje bilo kojom pozitivnom konstantom, dok dodavanje ili oduzimanje konstante nije dopušteno jer mijenja lokaciju nulte točke.

Tablica 4.1-1 sažeto prikazuje osnovna obilježja nominalne, ordinalne, intervalne i omjerne skale.

Tablica 4.1-1. Usporedba obilježja nominalne, ordinalne, intervalne i omjerne skale

	NOMINALNA	ORDINALNA	INTERVALNA	OMJERNA
Klasifikacija	DA	DA	DA	DA
Rangiranje	NE	DA	DA	DA
Udaljenost među entitetima	NE	NE	DA	DA
Apsolutna veličina mjenenog svojstva	NE	NE	NE	DA
Empirijska svojstva	identitet	redosljed	jednakosti razlika	jednakosti omjera
Invarijantne transformacije	zamjena oznaka	sve monotone transformacije	sve linearne transformacije	množenje pozitivnom konstantom

Usporedbom navedenih obilježja moguće je uočiti da svaka sljedeća skala (počevši od nominalne) ima sve kvalitetnija metrijska svojstva, odnosno veću informacijsku vrijednost. Tako, primjerice, nominalna skala omogućuje klasificiranje, ordinalna uz klasifikaciju omogućuje i utvrđivanje redosljeda, intervalna uz to i utvrđivanje razlika među entitetima, dok omjerna, uz za sve navedeno, omogućuje utvrđivanje apsolutne vrijednosti mjenenog svojstva entiteta.

Za mjerenje kinezioloških fenomena najčešće se koriste intervalna i omjerna skala.

4.2

Konstrukcija mjernog instrumenta

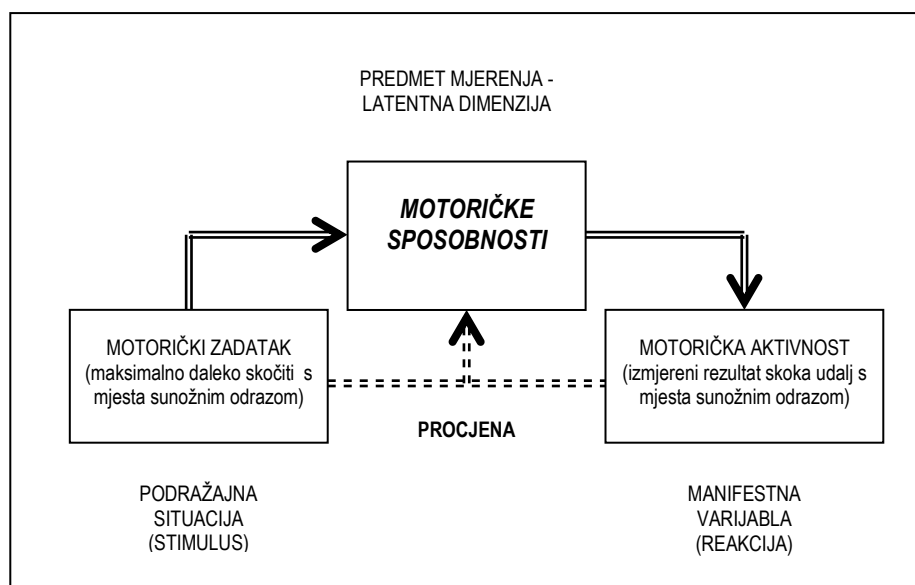
Mjerni instrument (test) je odgovarajući operator pomoću kojega se određuje pozicija objekta mjerenja na nekoj mjernoj skali kojom se procjenjuje predmet mjerenja. Konačni rezultat mjernog instrumenta ukazuje na stupanj razvijenosti predmeta mjerenja. Konstrukcija mjernog instrumenta vrlo je složen proces koji se odvija u pet koraka:

1. definiranje predmeta mjerenja
2. odabir odgovarajućeg tipa mjernog instrumenta
3. izbor podražajnih situacija
4. standardizacija mjernog postupka
5. utvrđivanje metrijskih karakteristika.

4.2.1. Definiranje predmeta mjerenja

Svaki mjerni instrument koristi se za mjerenje nekog predmeta mjerenja. U kineziologiji predmet mjerenja predstavljaju relevantni kineziološki fenomeni. Primjerice, motoričke i funkcionalne sposobnosti, morfološka obilježja, situacijska i natjecateljska uspješnost u pojedinoj kineziološkoj aktivnosti, kvaliteta izvedbe nekog tehničkog elementa itd. Zato konstrukcija mjernog instrumenta započinje preciznim definiranjem predmeta mjerenja. Predmet mjerenja najčešće je neki hipotetski konstrukt koji nije izravno

mjerljiv. Primjerice, motoričke sposobnosti su teorijski konstrukti koje ne možemo izravno mjeriti, a za koje pretpostavljamo da imaju realnu egzistenciju jer determiniraju uspješnost motoričkog ponašanja. Promatranjem motoričkog ponašanja ljudi, moguće je uočiti da neki od njih u većem broju motoričkih aktivnosti postižu slične rezultate (primjerice, skokovima, bacanjima, sprintovima...), pa je opravdano pretpostaviti da postoje neki zajednički faktori koji determiniraju uspješnost u realizaciji tih motoričkih aktivnosti. Zajednički faktori koji određuju uspješnost motoričkog ponašanja predstavljaju motoričke sposobnosti. Dakle, motoričke sposobnosti su teorijski konstrukti jer ih je nemoguće izravno opažati, a time i mjeriti. Moguće ih je samo indirektno procjenjivati, stoga ih zovemo *latentne dimenzije*.



Slika 4.2-1. Teorijski model indirektnog mjerenja (procjene) motoričkih sposobnosti

Općenito se može reći da je svaka motorička aktivnost proizvod motoričkih sposobnosti i podražajne situacije (slika 4.2-1). Stoga, mjereći uspješnost u određenoj motoričkoj aktivnosti (manifestna varijabla) koja je izazvana nekom podražajnom situacijom (motorički zadatak) možemo zaključivati o stupnju razvijenosti motoričkih sposobnosti (latentna dimenzija). Ako je, primjerice, predmet mjerenja neka motorička sposobnost (npr. eksplozivna snaga koja se definira kao sposobnost generiranja maksimalne sile u jedinici vremena) koju ne možemo direktno mjeriti, moguće je konstruirati mjerni instrument

kojim ćemo je indirektno procijeniti pomoću njenih *manifestacija* (npr. motoričkih aktivnosti: skokovi, bacanja, udarci..).

Takav pristup nužno nameće problem utvrđivanja pravog predmeta mjerenja (valjanost mjernog instrumenta). Naime, uspješnost u nekoj motoričkoj manifestaciji koju mjerimo nikad nije pod utjecajem samo jednog faktora, nego većeg broja faktora pa se postavlja pitanje: Što je pravi predmet mjerenja, tj. koju latentnu dimenziju procjenjujemo nekim motoričkim testom? Problem valjanosti mjerenja bit će posebno razmatran u poglavlju 4.3. Metrijske karakteristike (str. 306-312).

Ovisno o predmetu mjerenja, valja odabrati prikladan tip mjernog instrumenta, odnosno način za operacionalizaciju odgovarajućeg predmeta mjerenja.

4.2.2. Odabir odgovarajućeg tipa mjernog instrumenta

Za procjenu relevantnih kinezioloških fenomena moguće je koristiti nekoliko tipova mjernih instrumenata:

- *testovi tipa “papir-olovka”* – ubrajaju se u potpuno objektivne mjerne instrumente jer postignuti rezultati ne ovise od pogrešci mjerioca (ako je osposobljen za provođenje mjerenja), već isključivo o ispitaniku. Takav tip mjernih instrumenata koristi se za utvrđivanje kognitivnih sposobnosti, konativnih obilježja, stavova, socijalnog statusa, prehrambenih navika itd.
- *aparatura za mjerenje* – u ovu skupinu mjernih instrumenata ubrajaju se razna tehnička pomagala koja u postupku mjerenja koristi mjerilac. To su, primjerice, instrumenti za mjerenje morfoloških obilježja (antropometar, kaliper itd.), funkcionalnih sposobnosti (spirometar, aparatura za mjerenje aerobnoga i anaerobnoga kapaciteta itd.) te motoričkih sposobnosti (dinamometar za procjenu mišićne sile). Takav tip mjerenja je manje objektivan od testova tipa “papir-olovka” jer dobiveni rezultati u većoj mjeri zavise od obučenosti mjerilaca.
- *primjena vježbe (motoričkih zadataka)* – u ovu skupinu mjernih instrumenata ubrajaju se različiti motorički zadaci kojima se u nekoj poznatoj mjeri aktivira određena motorička sposobnost. Takav tip

mjernih instrumenata najčešće se koristi za procjenu motoričkih sposobnosti (primjerice, skok udalj s mjesta za procjenu eksplozivne snage, okretnost na tlu za procjenu koordinacije itd). Za takav tip mjernih instrumenata valja precizno definirati upute za izvođenje zadatka, uvjete u kojima se zadatak izvodi, pomagala i način njihova korištenja kako bi se minimizirale pogreške mjerenja.

- *subjektivna procjena mjerioca* – često se za procjenu nekih složenih sposobnosti, znanja i vještina, odnosno kvalitete izvedbe koristi subjektivna procjena kompetentnih mjerilaca (primjerice, u sportskoj gimnastici, klizanju na ledu, skokovima u vodu itd.).

Većina mjerenja u antropološkim znanostima obavlja se pomoću *kompozitnih mjernih instrumenata*. Kompozitni mjerni instrument se sastoji od većeg *čestica* (*engl. item*), a koje mogu biti: pitanja/zadaci (papir-olovka), ponavljana mjerenja (aparatura, motorički zadaci) i suci (subjektivna procjena). Tako dobiveni rezultati različitim se statističkim postupcima kondenziraju, a daljnje obrade provode se na kondenziranim rezultatima.

4.2.3. Izbor podražajnih situacija

Nakon preciznog definiranja predmeta mjerenja i odabira odgovarajućeg tipa mjernog instrumenta valja proučiti u kojim situacijama se manifestira predmet mjerenja, odnosno koje su to aktivnosti u kojima se najbolje očituje predmet mjerenja. Stoga je potrebno izvršiti klasifikaciju i selekciju podražajnih situacija koje su simptomatske za odgovarajući predmet mjerenja. Tako, primjerice, ako je predmet mjerenja neka kognitivna sposobnost, konativno obilježje, stavovi, razina znanja iz nekog područja ili sl., moguće je koristiti test tipa „papir-olovka“ koji će biti sastavljen od većeg broja čestica. Kvaliteta mjernog instrumenta bit će determinirana izborom čestica kojima se aktivira predmet mjerenja. Zato pri izboru čestica treba voditi brigu o sljedećem:

- čestice moraju biti kratko i jasno definirane
- svaka čestica mora biti povezana s predmetom mjerenja
- čestice moraju biti prilagođene ciljanoj populaciji ispitanika
- čestice moraju varirati po težini i složenosti kako bi uspješno razlikovale ispitanike po predmetu mjerenja.

Za procjenu nekih složenih sposobnosti, znanja i vještina (primjerice, uspješnost u sportskoj gimnastici, klizanju na ledu, skokovima u vodu,

uspješnost košarkaša itd.) nije uvijek moguće konstruirati objektivni mjerni instrument, već smo prisiljeni koristiti subjektivnu procjenu stručnjaka (sudaca). Kvaliteta ovakvog tipa mjernog instrumenta ovisit će o jasnoći i odabiru kriterija (mjerila), skali procjene te razini sudačke kompetentnosti i iskustva. Primjerice, ako je predmet mjerenja kvaliteta košarkaša, onda je potrebno precizno definirati kriterijski sustav koji će obuhvatiti sve relevantne aspekte predmeta mjerenja (npr. razina pritiska u obrani, pomaganje u obrani, skakačka uspješnost u obrani...), definirati mjernu skalu (npr. ocjene od 1 do 5) te kriterije koje moraju ispuniti ocjenjivači (npr. košarkaški treneri 1. lige).

Ako je predmet mjerenja neka motorička sposobnost (npr. eksplozivna snaga), potrebno je odabrati one motoričke zadatke koji će u najvećoj mjeri izazivati aktivaciju maksimalne sile u što kraćoj jedinici vremena (npr. sunožni skok udalj s mjesta, bacanje medicine s prsa, sprint 20 metara itd.). Nakon izbora i kasifikacije podražajnih situacija, svaku od njih je potrebno precizno opisati, odnosno standardizirati.

4.2.4. Standardizacija postupka mjerenja

Standardizacija mjernog postupka podrazumijeva precizan opis svih postupaka i uvjeta u kojima se provodi mjerenje nekim mjernim instrumentom te načina bodovanja i vrednovanja dobivenih rezultata. Naime, svako mjerenje nastoji isključiti mjeriočev utjecaj na rezultate mjerenja, odnosno težu objektivnosti. Stoga je standardizacija mjernog postupka bitan preduvjet objektivnosti mjerenja. Ona omogućava izjednačavanje svih uvjeta mjerenja za sve ispitanike. Problem objektivnosti mjerenja razmatrat će se posebno u poglavlju 4.3. Metrijske karakteristike (str. 299). Standardizacija mjernog postupka obuhvaća:

- naziv i šifru mjernog instrumenta
- tehnički opis, odnosno konstrukcijske karakteristike
- opis postupka mjerenja
- uputu ispitaniku
- način određivanja rezultata ispitanika.

Svi važni podaci o mjernom postupku moraju biti navedeni kako bi mjerni instrument bio upotrebljiv u praksi.

Primjer:

Naziv:	Skok udalj s mjesta
Šifra:	MFESDM
Tehnički opis:	Zatvorena prostorija najmanjih dimenzija 6x2 metra. Od zida se postave tanke strunjače tako da ukupna duljina strunjača ne bude manja od 4,5 m. Strunjače su fiksirane s jedne strane zidom, a s druge strane stopalima dvojice pomagača. Na strunjači se označi početna (odskočna) linija 80 cm od zida. Od početne linije na udaljenosti od 2 metra pa sve do 3,3 metra označe se svakih 5 cm paralelne linije duge 30 cm.
Opis mjernog postupka:	Ispitanik stane bosim stopalima do samog ruba početne linije ležima prema zidu. Zadatak je ispitanika sunožnim odrazom skočiti prema naprijed što je moguće dalje. Zadatak je završen nakon što ispitanik izvede 4 uspješna skoka. Neuspješnim skokom smatra se: • skok nakon dvostrukog odraza (poskoka) u mjestu prije skoka • skok nakon prestupa početne linije • skok koji nije izveden sunožnim odrazom • skok kojem prethodi dokorak • skok nakon kojeg ispitanik dodirne strunjaču iza peta • skok nakon kojeg ispitanik pri doskoku sjedne
Uputa ispitaniku:	Zadatak se demonstrira i objašnjava: „Vaš je zadatak da stanete iza početne linije i sunožnim odrazom skočite što više možete prema naprijed. Doskok mora biti na dvije noge. U slučaju neispravnog skoka, zadatak se ponavlja. Ako je zadatak jasan, pripremite se za početak.“
Određivanje rezultata:	Rezultat u testu izražava se u centimetrima, a određuje se kao aritmetička sredina 4 uspješna skoka.

4.2.5. Utvrđivanje metrijskih karakteristika

Nakon konstrukcije preliminarne forme mjernog instrumenta valja ga empirijski provjeriti te tako doći do konačne verzije mjernog instrumenta sa zadovoljavajućim metrijskim karakteristikama. Prvu formu testa treba provjeriti na pilot-uzorku koji će po karakteristikama biti sličan populaciji za koju se test konstruira. Time se dobije empirijska osnova za tzv. analizu čestica (*engl. item analysis*). Pod analizom čestica podrazumijeva se niz postupaka pomoću kojih procjenjujemo težinu i valjanost čestica.

Ako se radi o mjernom instrumentu tipa „papir-olovka“, težina čestica se provjerava tzv. *indeksom lakoće (težine)* koji je pokazatelj diskriminativnosti svake čestice. Indeks lakoće svake čestice predstavlja proporciju ispitanika koji su taj zadatak uspješno riješili ($p = u/n$, gdje je u broj ispitanika koji su uspješno riješili zadatak, a n ukupan broj ispitanika). Odgovarajućim izborom zadataka s obzirom na njihovu težinu, moguće je utjecati na osjetljivost mjernog instrumenta. Zadaci ne bi smjeli biti ni preteški ni prelagani jer bi u tim slučajevima slabo razlikovali ispitanike. Stoga većina čestica treba

imati indeks lakoće koji se kreće oko $p=0,5$ te podjednak i manji broj čestica čiji je indeks lakoće manji i veći od 0,5. Valjanost čestica moguće je procijeniti kao prosječnu korelaciju između čestica. Što se čestice međusobno više slažu, to im je veća količina zajedničke varijance, odnosno čestice imaju više istog predmeta mjerenja.

Pomoću analize težine i valjanosti čestica biraju se čestice za konačni oblik testa. Pravilnim izborom čestica utječemo na metrijske karakteristike cijelog mjernog instrumenta. Primjerice, odgovarajućim izborom i raspodjelom čestica s obzirom na indeks lakoće utječemo na osjetljivost, dok korelacijom između čestica utječemo na pouzdanost i dijagnostičku valjanost.

Nakon izrade konačnog oblika mjernog instrumenta na reprezentativnim se uzorcima ispitanika utvrđuju metrijske karakteristike. Metrijske karakteristike su: pouzdanost, objektivnost, homogenost, valjanost i osjetljivost. Pri tome valja naglasiti da se utvrđene metrijske karakteristike uvijek odnose na određenu populaciju na čijim su reprezentativnim uzorcima utvrđene, a nikako ne na sve ispitanike.

4.3

Metrijske karakteristike

Svaki mjerni instrument nužno mora biti dobrih metrijskih karakteristika kako bi njime dobiveni podaci bili upotrebljivi. To su:

- pouzdanost
- objektivnost
- homogenost
- osjetljivost
- valjanost.

4.3.1. Pouzdanost

Pouzdanost je metrijska karakteristika koja se odnosi na točnost mjerenja, tj. na nezavisnost mjerenja od nesistematskih pogrešaka. Problem pouzdanosti veže se uz problem konzistentnosti (dosljednosti) rezultata u ponovljenim mjerenjima. U svakom mjernom postupku na rezultate djeluju, osim veličine predmeta mjerenja, i neki *sistematski* i *nesistematski* faktori. Sistematski faktori mogu izazivati stalni porast ili pad rezultata (primjerice, učenje, umor, razvoj itd.) te ih je moguće kontrolirati i ukloniti. Njihov se utjecaj može tumačiti kao stvarna promjena u veličini predmeta mjerenja te nisu zanimljivi teoriji pouzdanosti. Nesistematski faktori uzrokuju slučajne varijacije rezultata mjerenja te utječu na nepouzdanost

mjerjenja jer promjene koje ti faktori izazivaju nisu posljedica promjene predmeta mjerenja. Upravo njihovim uzrocima i posljedicama bavi se teorija pouzdanosti. U kineziološkim mjerenjima pogreške mjerenja najčešće nastaju kao rezultat:

- mjerenja različitih mjerilaca
- različitih mjerenja istog mjerioca
- variranja mjerene karakteristike u tijeku dana (primjerice, tjelesna visina varira oko 1 cm u tijeku dana)
- mjerenja različitom mjernom aparaturom (primjerice, nejednako baždarena mjerna aparatura)
- slučajnih pogrešaka pri primjeni bilo kojeg mjernog instrumenta.

Prema tome, na smanjenje pogreške mjerenja moguće je utjecati dobrom uvježbanošću mjerilaca, pridržavanjem standardiziranog postupka mjerenja, kvalitetnom mjernom opremom koja se redovito baždari te provođenjem mjerenja u isto vrijeme ili u vrlo kratkom vremenskom razmaku.

Da bi neki mjerni instrument bio iskoristiv u praksi, mora zadovoljavati zahtjev za visokom pouzdanošću. Pouzdanost bilo kojeg mjernog postupka moguće je odrediti na temelju *klasične teorije mjerenja* (koje su utemeljitelji Spearman, Yule, Thurstone, Guilford i dr.) i *Gutmanovog modela mjerenja* koji je izveden iz *Guttmanove image teorije* (Guttman, 1953).

4.3.1.1. Klasični model mjerenja

Klasični model mjerenja izveden je na pretpostavci o postojanju tzv. *paralelnih testova*. Paralelnim testovima smatraju se mjerni postupci koji u jednakom stupnju izazivaju i mjere isti predmet mjerenja, a to znači da imaju jednake aritmetičke sredine, standardne devijacije i interkorelacije (Guliksen, 1950, prema Mejovšek, 2003). To znači da, kada bismo imali m paralelnih testova kojima bismo izmjerili n ispitanika i ako bi pouzdanost mjerenja bila maksimalna, odnosno kada ne bi bilo nesistematskog varijabiliteta, tada bi rezultati ispitanika u m paralelni testova bili jednaki. Nasuprot tome, ako mjerenje nije potpuno pouzdano, rezultati ispitanika u m paralelnih testova bit će manje ili više različiti, odnosno nesistematski će varirati oko pravog rezultata. Dakle, ako n ispitanika izmjerimo skupom od m paralelnih testova, dobije se tablica 4.3-1.

Tablica 4.3-1. Bruto rezultati n ispitanika, izmjerenih pomoću m paralelnih testova, dekomponirani prema klasičnoj teoriji mjerenja na komponentu pravih rezultata i komponentu pogreške mjerenja

Paralelni testovi

lsp	1	2	.	.	j	.	.	m	$\bar{X}$	s
a	$X_{a1} = t_{a1} + \theta_{a1}$	$X_{a2} = t_{a2} + \theta_{a2}$	.	.	$X_{aj} = t_{aj} + \theta_{aj}$	.	.	$X_{am} = t_{am} + \theta_{am}$	$\bar{X}_a$	S_a
b	$X_{b1} = t_{b1} + \theta_{b1}$	$X_{b2} = t_{b2} + \theta_{b2}$	.	.	$X_{bj} = t_{bj} + \theta_{bj}$	.	.	$X_{bm} = t_{bm} + \theta_{bm}$	$\bar{X}_b$	S_b
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
i	$X_{i1} = t_{i1} + \theta_{i1}$	$X_{i2} = t_{i2} + \theta_{i2}$	.	.	$X_{ij} = t_{ij} + \theta_{ij}$	.	.	$X_{im} = t_{im} + \theta_{im}$	$\bar{X}_i$	S_i
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	$X_{n1} = t_{n1} + \theta_{n1}$	$X_{n2} = t_{n2} + \theta_{n2}$	.	.	$X_{nj} = t_{nj} + \theta_{nj}$	.	.	$X_{nm} = t_{nm} + \theta_{nm}$	$\bar{X}_n$	S_n
$\bar{x}$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	.	.	$\bar{X}_j$	.	.	$\bar{X}_m$		
σ	σ_1	σ_2	.	.	σ_j	.	.	σ_m		

Osim toga, klasični model mjerenja temelji se na sljedećim pretpostavkama:

- rezultat svakog mjerenja, tzv. *bruto rezultat* (x), ovisi o veličini predmeta mjerenja, budući da u sebi sadrži veličinu predmeta mjerenja, tj. *pravi rezultat* (t), i o *komponenti pogreške* (e) koja ga nesistematski mijenja.

$$x = t + e$$

Pravi je rezultat (t) točni rezultat veličine predmeta mjerenja, a bilo bi ga moguće dobiti kada na mjerenje osim predmeta mjerenja ne bi utjecali drugi faktori, odnosno kada bi mjerenje bilo potpuno pouzdano. Osim efekata pravog rezultata, bruto rezultat sadrži i *efekte pogreške*. Pogreška mjerenja (e) ovisi o djelovanju nesistematskih, varijabilnih faktora.

- predmet mjerenja je *stabilan* u vremenu; iz toga slijedi da će pravi rezultat jednog ispitanika u paralelnim mjerenjima biti jednak.

$$t_{a1} = t_{a2} = \dots = t_{aj} = \dots = t_{am}$$

$$t_{b1} = t_{b2} = \dots = t_{bj} = \dots = t_{bm}$$

.....

$$t_{i1} = t_{i2} = \dots = t_{ij} = \dots = t_{im}$$

.....

$$t_{n1} = t_{n2} = \dots = t_{nj} = \dots = t_{nm}$$

- komponente pogreške potpuno su *slučajne varijable* koje se javljaju kao posljedica djelovanja nesistematskih faktora, što znači da im je prosječna vrijednost u svakom paralelnom testu jednaka nuli, a distribucija normalna.

S obzirom na navedene pretpostavke, logično je zaključiti da će:

- aritmetičke sredine i standardne devijacije paralelnih testova izračunatih na nekoj populaciji ispitanika biti jednake.

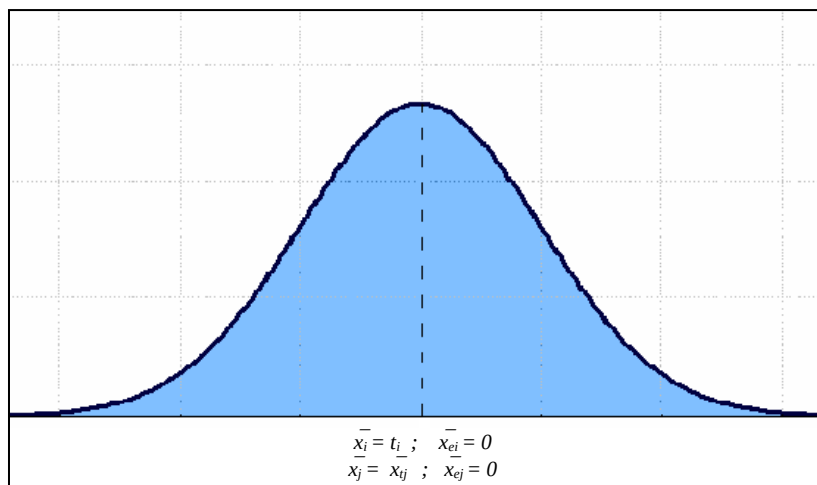
$$\begin{aligned}\bar{X}_1 &= \bar{X}_2 = \dots = \bar{X}_j = \dots = \bar{X}_m \\ \bar{\sigma}_1 &= \bar{\sigma}_2 = \dots = \bar{\sigma}_j = \dots = \bar{\sigma}_m\end{aligned}$$

- aritmetičke sredine i standardne devijacije pravih rezultata paralelnih testova izračunatih na nekoj populaciji također će biti jednake.

$$\begin{aligned}\bar{X}_{t1} &= \bar{X}_{t2} = \dots = \bar{X}_{tj} = \dots = \bar{X}_{tm} \\ \bar{\sigma}_{t1} &= \bar{\sigma}_{t2} = \dots = \bar{\sigma}_{tj} = \dots = \bar{\sigma}_{tm}\end{aligned}$$

- aritmetičke sredine komponenata pogrešaka nekog ispitanika i , izračunate iz beskonačnog broja paralelnih testova bit će jednake nuli, kao i aritmetička sredina komponenata pogrešaka nekog paralelnog testa j , izračunata na svim ispitanicima neke populacije (slika 4.3-1.).

$$\bar{x}_{ei} = \bar{x}_{ej} = 0$$



Slika 4.3-1. Normalna distribucija bruto rezultata jednog ispitanika, dobivenih primjenom beskonačnog broja paralelnih testova i jednog testa primijenjenog na nekoj populaciji ispitanika

Dakle, osnovna pretpostavka klasičnog modela mjerenja je da se komponente pogrešaka mjerenja međusobno poništavaju, odnosno da je aritmetička sredina rezultata nekog paralelnog testa, primijenjenog na svim ispitanicima neke populacije jednaka aritmetičkoj sredini pravih rezultata tog testa. Ta pretpostavka vrijedi i za aritmetičku sredinu rezultata bilo kojeg ispitanika koji je izmjeren beskonačno velikim brojem paralelnih testova. Iz toga slijedi važan zaključak za praksu, a to je da se aritmetičkom sredinom većeg broja paralelnih testova postiže bolja procjena pravog rezultata nego li primjenom bilo kojeg pojedinačnog testa.

U skladu s time lako je uočiti da će aritmetičke sredine bruto rezultata, koje su jednake u svim paralelnim testovima, biti jednake aritmetičkim sredinama pravih rezultata svih paralelnih testova.

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_j = \dots = \bar{x}_m = \bar{x}_{t1} = \bar{x}_{t2} = \dots = \bar{x}_{tj} = \dots = \bar{x}_{tm}$$

To je zato jer je aritmetička sredina nekog paralelnog testa $\bar{x}_j$ jednaka jednostavnoj linearnoj kombinaciji aritmetičke sredine pravih rezultata $\bar{x}_{tj}$ i aritmetičke sredine pogrešaka mjerenja $\bar{x}_{ej}$ tog testa.

$$\bar{x}_j = \bar{x}_{tj} + \bar{x}_{ej}$$

Kako je $\bar{x}_{ej}=0$, dakle aritmetička sredina komponenata pogrešaka nekog paralelnog testa j izračunata na svim ispitanicima neke populacije jednaka nuli, slijedi da je

$$\bar{x}_j = \bar{x}_{tj} .$$

Osim toga, a s obzirom na pretpostavku da komponente pogreške mjerenja variraju posve slučajno, odnosno potpuno nesustavno, moguće je zaključiti:

- kovarijanca između varijabli pogrešaka bilo kojih dvaju paralelnih testova bit će jednaka nuli

$$\text{cov}(e_j, e_k) = 0 \quad (j \neq k)$$

- kovarijanca između varijabli pogrešaka i varijabli pravih rezultata istog paralelnog testa bit će jednaka nuli

$$\begin{aligned} \text{cov}(t_j, e_j) &= 0 \\ \text{cov}(t_k, e_k) &= 0 \end{aligned}$$

- kovarijanca između varijabli pogrešaka jednog testa i varijabli pravih rezultata nekog drugog paralelnog testa bit će jednaka nuli

$$\text{cov}(t_j, e_k) = 0$$

$$\text{cov}(t_k, e_j) = 0.$$

Dakle, klasični model mjerenja pretpostavlja da su pogreške mjerenja međusobno nezavisne, da su pravi rezultati i pogreške mjerenja istog testa međusobno nezavisni te da su pravi rezultati jednog testa nezavisni od pogrešaka mjerenja u drugom testu.

Isto kao i kod aritmetičkih sredina, i varijanca nekog paralelnog testa, σ_j^2 jednaka je jednostavnoj linarnoj kombinaciji varijance pravih rezultata σ_{ij}^2 i varijance pogrešaka mjerenja σ_{ej}^2 tog testa.

$$\sigma_j^2 = \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ej}^2$$

Dokaz:

Ako su $x_{ij} = t_{ij} + e_{ij}$ centrirani rezultati n ispitanika dobiveni primjenom m paralelnih testova, tada se njihovim kvadriranjem dobije

$$x_{ij}^2 = (t_{ij} + e_{ij})^2 = t_{ij}^2 + e_{ij}^2 + 2t_{ij}e_{ij}.$$

Zbrojem rezultata svih ispitanika i dijeljenjem brojem ispitanika n dobije se

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n t_{ij}^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n e_{ij}^2}{n} + \frac{2\sum_{i=1}^n t_{ij}e_{ij}}{n}.$$

Stoga proizlazi da je

$$\sigma_j^2 = \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ej}^2$$

jer je:

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}^2}{n} - \text{varijanca bruto rezultata paralelnog testa } j,$$

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n t_{ij}^2}{n} - \text{varijanca pravih rezultata paralelnog testa } j,$$

$$\sigma_{ej}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_{ij}^2}{n} - \text{varijanca pogrešaka mjerenja paralelnog testa } j,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_{ij}e_{ij}}{n} = 0 - \text{kovarijanca između pogrešaka mjerenja i pravih rezultata paralelnog testa jednaka nuli.}$$

Osim toga, u klasičnom modelu mjerenja, korelacije između varijabli dobivenih paralelnim testovima ovise isključivo o njihovim pravim rezultatima.

Dokaz:

Ako je Z matrica standardiziranih podataka n entiteta dobivenih pomoću m paralelnih testova, za nju vrijedi da je

$$Z^T \mathbf{1} = 0, \text{ a } \text{diag}(Z^T Z n^{-1}) = I$$

te je $Z = T + E$, gdje je T matrica pravih rezultata n entiteta u m paralelnih testova, a E matrica pogrešaka mjerenja. Moguće je pokazati da je

$$\begin{aligned} R &= Z^T Z n^{-1} \\ &= (T + E)^T (T + E) n^{-1} \\ &= (T^T + E^T) (T + E) n^{-1} \\ &= (T^T T + T^T E + E^T T + E^T E) n^{-1} \\ &= T^T T n^{-1} + E^T E n^{-1} \\ &= W + S^2 \end{aligned}$$

Budući da su pravi rezultati i pogreške mjerenja istog testa međusobno nezavisni, tada je $T^T E = 0$ i $E^T T = 0$, a $T^T T n^{-1} = W$ je matrica kovarijanci između varijabli pravih rezultata te $E^T E n^{-1} = S^2$ dijagonalna matrica varijanci varijabli pogrešaka jer su pogreške mjerenja međusobno nezavisne. Moguće je uočiti da korelacije između varijabli dobivenih pomoću m paralelnih testova ovise samo o pravim rezultatima u tim varijablama.

Stoga se pouzdanost između dvaju paralelnih testova može definirati korelacijom između njih. Naime, korelacija između dvaju paralelnih testova može se općenito napisati formulom

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik}}{n \sigma_j \sigma_k},$$

gdje su x_{ij} , x_{ik} centrirani rezultati ispitanika i u testovima j i k . Onda je

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n [(t_{ij} + e_{ij})(t_{ik} + e_{ik})]}{n \sigma_j \sigma_k}.$$

Ako su pravi rezultati i standardne devijacije paralelnih testova jednaki ($t_{ij} = t_{ik}$ i $\sigma_{ij} = \sigma_{ik}$), onda je

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i^2 + t_i e_{ij} + t_i e_{ik} + e_{ij} e_{ik})}{n \sigma^2} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i e_{ij}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i e_{ik}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n e_{ij} e_{ik}}{n}}{\sigma^2}$$

S obzirom na to da je

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{n} = \sigma_t^2 \quad \frac{\sum_{i=1}^n e_{ij} e_{ik}}{n} = 0 \quad \frac{\sum_{i=1}^n t_i e_{ik}}{n} = 0 \quad \frac{\sum_{i=1}^n t_i e_{ij}}{n} = 0 ,$$

tada proizlazi da je

$$r_{jk} = \frac{\sigma_t^2}{\sigma^2} = r_{tt} ,$$

gdje σ_t^2 varijanca pravih rezultata, a σ^2 varijanca bruto rezultata. Dakle, korelacija dvaju paralelnih testova jednaka je omjeru varijance pravih rezultata i varijance bruto rezultata, što predstavlja i formalnu definiciju *koeficijenta pouzdanosti* (r_{tt}).

Kako je varijanca bruto rezultata u bilo kojem paralelnom testu jednaka

$$\sigma^2 = \sigma_t^2 + \sigma_e^2 ,$$

onda je

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 - \sigma_e^2 ,$$

pa je

$$r_{tt} = \frac{\sigma_t^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2 - \sigma_e^2}{\sigma^2} = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma^2} .$$

Iz toga slijedi da je

$$\frac{\sigma_e^2}{\sigma^2} = 1 - r_{tt} ,$$

pa je

$$\sigma_e^2 = \sigma^2 (1 - r_{tt}) ,$$

odnosno

$$\sigma_e = \sigma \sqrt{(1 - r_{tt})} ,$$

a ako se radi o standardiziranim rezultatima, onda je

$$\sigma_e = \sqrt{(1 - r_{tt})},$$

gdje σ_e predstavlja *standardnu pogrešku mjerenja*, odnosno standardnu devijaciju distribucije pogrešaka.

Upotreba standardne pogreške mjerenja u praktične svrhe temelji se na njenoj interpretaciji pod *modelom normalne distribucije* (budući da su komponente pogreške slučajne varijable, normalno se distribuiraju). Tako se standardna pogreška mjerenja koristi za utvrđivanje granica intervala u kojem se s određenom vjerojatnošću nalazi pravi rezultat (prava veličina predmeta mjerenja). O načinu na koji će se vrijednost standardne pogreške mjerenja pribrojiti pravom rezultatu ovisit će sigurnost tog zaključka, tj.

- $x_{ij} + \sigma_e$ - omeđuje interval u kojemu se pravi rezultat nalazi s 68,27% vjerojatnosti
- $x_{ij} + 2\sigma_e$ - omeđuje interval u kojemu se pravi rezultat nalazi s 95,45% vjerojatnosti
- $x_{ij} + 3\sigma_e$ - omeđuje interval u kojemu se pravi rezultat nalazi s 99,73% vjerojatnosti.

Lako je uočiti da postoji obrnuto proporcionalna veza između veličine standardne pogreške mjerenja i koeficijenta pouzdanosti. Vrijednost standardne pogreške mjerenja kreće se između 0 i 1. Minimalna vrijednost standardne pogreške mjerenja je 0, što znači da je takav test maksimalno pouzdan (koeficijent pouzdanosti iznosi 1).

$$\sigma_e = 0 \rightarrow r_{tt} = 1$$

Maksimalna vrijednost standardne pogreške mjerenja je 1, što znači da je test nepouzdan i da mu je veličina koeficijenta pouzdanosti jednaka nuli.

$$\sigma_e = 1 \rightarrow r_{tt} = 0$$

Međutim, valja istaknuti da se tako definiran koeficijent ne može izračunati jer su varijance pravih rezultata i varijance pogreške nepoznate. Stoga je koeficijent pouzdanosti moguće aproksimativno odrediti na nekoliko načina, od kojih se u kineziološkim istraživanjima najčešće koriste:

- metoda test-retest
- metoda tau-ekvivalentnih testova i
- metoda interne konzistencije.

Metoda test - retest

Utvrdjivanje pouzdanosti ovom metodom temelji se na primjeni istog testa na istoj skupini ispitanika u dva navrata, a kao koeficijent pouzdanosti uzima se korelacija između rezultata testa i ponovljenog testa (retesta). Osnovna logika na kojoj metoda počiva jest u pretpostavci da primjenom istog testa mjerimo isti predmet mjerenja te test i ponovljeni test možemo smatrati paralelnim testovima, pa prema tome korelacija između njih odgovara koeficijentu pouzdanosti, a najčešće se interpretira kao mjera *stabilnosti* testa.

Osim prednosti (ekonomičnost, minimalna mogućnost promjene predmeta mjerenja u ponovljenoj primjeni), ova metoda ima i nedostatke zbog kojih nije moguće precizno odrediti koeficijent pouzdanosti (transfer učenjem ili vježbanjem). Taj se problem može djelomično riješiti dobrim rasporedom intervala retesta.

Metoda tau - ekvivalentnih testova

Tau-ekvivalentni testovi slični su po sadržaju, broju i obliku zadataka. Pretpostavlja se da imaju isti predmet mjerenja, ali nema statističkih dokaza da zadovoljavaju uvjete paralelnih testova. Koeficijent pouzdanosti određuje se kao korelacija između rezultata dvaju ekvivalentnih testova. Vrijednost dobivenog koeficijenta nešto je niža u odnosu na pravi koeficijent pouzdanosti jer korištenjem ekvivalentnih testova aktiviramo različite predmete mjerenja budući da su im zadaci ponešto različitog sadržaja. Taj se problem može riješiti konstrukcijom testa s vrlo velikim brojem zadataka. Ova metoda nema značajniju primjenu pri utvrđivanju pouzdanosti kinezioloških mjernih instrumenata jer je gotovo nemoguće konstruirati dva ekvivalentna testa koji bi imali potpuno isti predmet mjerenja.

Metoda interne konzistencije

Ova se metoda koristi za utvrđivanje pouzdanosti *kompozitnih mjernih instrumenata*, a temelji se na pretpostavci o paralelnosti čestica. Dvije su moguće mjere pouzdanosti testa pod klasičnim modelom mjerenja:

- mjera pouzdanosti pod pretpostavkom da sve čestice jednako određuju predmet mjerenja
- optimalna mjera pouzdanosti.

Najjednostavniji način za izračunavanje ukupnog rezultata u nekom kompozitnom testu jest Burtova metoda *jednostavne sumacije* (Burt, 1941, prema Momirović i suradnici, 1999). Ova metoda pretpostavlja da sve čestice jednako sudjeluju u određivanju pravog predmeta mjerenja te se ukupan rezultat u testu dobije jednostavnom linearnom kombinacijom, odnosno zbrojem rezultata entiteta u česticama. Tako dobivene rezultate moguće je podijeliti brojem čestica te ukupan rezultat izraziti kao prosječan rezultat ispitanika u česticama.

Ako su rezultati n entiteta dobiveni primjenom nekog kompozitnog mjernog instrumenta s m čestica, smješteni u matricu $\mathbf{B}$ tako da su rezultati entiteta u redcima, tada je

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{1} ; \mathbf{b}' = \mathbf{B}\mathbf{1} m^{-1}$$

gdje je $\mathbf{b}$ vektor sumiranih rezultata entiteta u česticama, $\mathbf{b}'$ vektor prosječnih rezultata entiteta u česticama, a $\mathbf{1}$ sumacijski vektor s m jedinica. Operacijom

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{B} - \mathbf{PB})\mathbf{V}^{-1},$$

gdje je $\mathbf{P} = \mathbf{1}(\mathbf{1}^T\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}^T$, a $\mathbf{V}^2 = \text{diag}\mathbf{C}$ dijagonalna matrica varijanci čestica, jer je $\mathbf{C} = (\mathbf{B}^T\mathbf{B} - \mathbf{B}^T\mathbf{PB})n^{-1}$ matrica kovarijanci čestica s varijancama u dijagonali, dobije se transformacija varijabli iz *intaktne realne metrike* u *standardiziranu realnu metriku* s očekivanim vrijednostima $E(\mathbf{Z}) = 0$, i $E(\mathbf{Z}^2) = 1$.

Prema klasičnom modelu mjerenja, koji smo već opisali, matricu $\mathbf{Z}$ možemo dekomponirati na matricu pravih rezultata $\mathbf{T}$ i matricu pogrešaka mjerenja $\mathbf{E}$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{T} + \mathbf{E}$$

za koju vrijedi da je

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{Z}^T\mathbf{Z} n^{-1} \\ &= \mathbf{W} + \mathbf{S}^2,\end{aligned}$$

gdje je $\mathbf{W}$ matrica kovarijanci između varijabli pravih rezultata, a $\mathbf{S}^2$ dijagonalna matrica varijanci varijabli pogrešaka. Moguće je uočiti da korelacije između varijabli dobivenih pomoću m paralelnih testova ovise samo o pravim rezultatima u tim varijablama.

Rezultati entiteta u česticama kondenziraju se operacijom

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z}\mathbf{1}, \mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{1}, \mathbf{e} = \mathbf{E}\mathbf{1}$$

Uz prethodno navedene pretpostavke klasičnog modela mjerenja te uz pretpostavku da su čestice testa strogo paralelne, a to znači da su aritmetičke sredine, standardne devijacije čestica i korelacije između čestica jednake, može se zaključiti da je varijanca kondenzirane varijable jednaka

$$\sigma^2 = m + (m^2 - m)r,$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbf{z}^T \mathbf{z} n^{-1} \\ &= (\mathbf{Z}\mathbf{1})^T \mathbf{Z}\mathbf{1} n^{-1} \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}\mathbf{1} n^{-1} \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{R}\mathbf{1} \\ &= m + (m^2 - m)r\end{aligned}$$

varijanca pravih rezultata $\sigma_t^2 = m^2 r$,

Dokaz:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \mathbf{t}^T \mathbf{t} n^{-1} \\ &= (\mathbf{T}\mathbf{1})^T \mathbf{T}\mathbf{1} n^{-1} \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T}\mathbf{1} n^{-1} \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{C}\mathbf{1} \\ &= \mathbf{1}^T (\mathbf{R} - \mathbf{S}^2) \mathbf{1} \\ &= m^2 r\end{aligned}$$

a varijanca pogrešaka mjerenja $\sigma_e^2 = m(1 - r)$.

Dokaz:

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \mathbf{e}^T \mathbf{e} n^{-1} \\ &= (\mathbf{E}\mathbf{1})^T \mathbf{E}\mathbf{1} n^{-1} \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E}\mathbf{1} n^{-1} \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{1} \\ &= m(1 - r)\end{aligned}$$

Stoga, ako se u formulu koja definira pouzdanost pod klasičnim modelom

$$r_{tt} = \frac{\sigma_t^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2 - \sigma_e^2}{\sigma^2} = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma^2}$$

uvrste dobivene vrijednosti, tada se dobije formula kojom je moguće, uza sve navedene pretpostavke, izračunati koeficijent pouzdanosti

$$r_{tt} = \frac{\sigma_t^2}{\sigma^2} = \frac{m^2 r}{m + (m^2 - m)r}.$$

Daljnijim sređivanjem ovog izraza dobije se *Spearman-Brownov koeficijent pouzdanosti*

$$r_{tt} = \frac{mr}{1 + (m - 1)r}$$

Izvod: Ako pođemo od formalne definicije *koeficijenta pouzdanosti* (r_{tt})

$$r_{tt} = \frac{\sigma_t^2}{\sigma^2}$$

za neki test s jednom česticom te mu dodamo određeni broj čestica, onda dobijemo kompozitni test s ukupno m čestica u kojem se ukupan rezultat izračunava *metodom jednostavne sumacije*. Varijanca tog kompozitnog testa bit će jednaka

$$\sigma'^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2 + 2 \sum_{j,k=1}^m c_{jk} = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2 + 2 \sum_{j,k=1}^m r_{jk} \sigma_j \sigma_k \quad (j \neq k)$$

Uz navedenu pretpostavku da su čestice testa strogo paralelne, a to znači da su varijance i kovarijance (kojih je $m(m-1)/2$ čestica jednake, tada se može napisati da je varijanca tog testa jednaka zbroju varijanci i dvostrukog zbroja kovarijanci između čestica

$$\begin{aligned} \sigma'^2 &= \sum_{j=1}^m \sigma_j^2 + 2 \sum_{j,k=1}^m r_{jk} \sigma_j \sigma_k = m\sigma^2 + 2 \frac{m(m-1)}{2} r\sigma\sigma = m\sigma^2 + m(m-1)r\sigma^2 = \\ &= m\sigma^2 (1 + (m-1)r) \end{aligned}$$

Analogno tome i varijanca pravih rezultata bit će jednaka

$$\sigma_t'^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_{t,j}^2 + 2 \sum_{j,k=1}^m r_{t,jk} \sigma_{t,j} \sigma_{t,k} = m\sigma_t^2 + 2 \frac{m(m-1)}{2} r_t \sigma_t \sigma_t$$

S obzirom na to da je $r_t = 1$, varijanca pravih rezultata je jednaka

$$\sigma_t'^2 = m\sigma_t^2 + m(m-1)\sigma_t^2 = m\sigma_t^2 + (m^2 - m)\sigma_t^2 = m\sigma_t^2 + m^2\sigma_t^2 - m\sigma_t^2 = m^2\sigma_t^2$$

pa je *SB-koeficijent pouzdanosti* jednak

$$\begin{aligned} r'_{tt} &= \frac{\sigma_t'^2}{\sigma'^2} = \frac{m^2\sigma_t^2}{m\sigma^2(1+(m-1)r)} = \frac{m\sigma_t^2}{\sigma^2(1+(m-1)r)} = \left(\frac{m\sigma_t^2}{\sigma^2} \right) \left(\frac{1}{1+(m-1)r} \right) = \\ &= mr_{tt} \left(\frac{1}{1+(m-1)r} \right), \text{ s obzirom na to da je } r_{tt}=r \text{ pa je } r'_{tt} = \frac{mr}{1+(m-1)r} \end{aligned}$$

S obzirom na to da je pretpostavka o jednakosti svih korelacija između čestica potpuno nerealna, obično se u račun uzima prosječna korelacija između čestica $\bar{r}$.

$$r_u = \frac{m\bar{r}}{1 + (m-1)r}$$

Ako se u gornju formulu umjesto koeficijenta korelacije r uvrsti izraz za njegovu procjenu putem varijance testa

$$r = \frac{\sigma^2 - m}{m(m-1)},$$

Izvod:

$\sigma^2 = m + (m^2 - m)r = m + mmr - mr = m(1 + mr - r) = m(1 + (m-1)r)$ dijeljenjem cijelog izraza sa m , dobije se $\frac{\sigma^2}{m} = 1 + (m-1)r$, odnosno $\frac{\sigma^2}{m} - 1 = (m-1)r$. Ako ovaj izraz

podijelimo sa $(m-1)$, dobije se $r = \frac{\frac{\sigma^2}{m} - 1}{m-1} = \frac{\frac{\sigma^2}{m} - \frac{m}{m}}{m-1} = \frac{\frac{\sigma^2 - m}{m}}{m-1} = \frac{\sigma^2 - m}{m(m-1)}$.

moguće je doći do formule

$$r_u = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{m}{\mathbf{1}^T \mathbf{R} \mathbf{1}} \right)$$

koja se često koristi u praksi, a koja je ekvivalentna prethodnoj.

Izvod:

$$\begin{aligned} r_u &= \frac{mr}{1 + (m-1)r} = \frac{m \frac{\sigma^2 - m}{m(m-1)}}{1 + (m-1) \frac{\sigma^2 - m}{m(m-1)}} = \frac{\frac{\sigma^2 - m}{m-1}}{1 + \frac{\sigma^2 - m}{m}} = \frac{\frac{\sigma^2 - m}{m-1}}{\frac{m}{m} + \frac{\sigma^2 - m}{m}} = \\ &= \frac{\frac{\sigma^2 - m}{m-1}}{\frac{m + \sigma^2 - m}{m}} = \frac{\frac{\sigma^2 - m}{m-1}}{\frac{\sigma^2}{m}} = \frac{m(\sigma^2 - m)}{\sigma^2(m-1)} = \frac{m}{m-1} \frac{\sigma^2 - m}{\sigma^2} = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{m}{\sigma^2} \right) = \\ &= \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{m}{\mathbf{1}^T \mathbf{R} \mathbf{1}} \right) \text{ jer je } \sigma^2 = \mathbf{1}^T \mathbf{R} \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Osim navedenih formula često se koristi i *Cronbachova formula* (Cronbach, 1951)

$$r_{tt} = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2}{\sigma^2} \right)$$

koja, za razliku od prethodne formule, izračunava pouzdanost na temelju originalnih rezultata.

Ako se destandardiziraju rezultati entiteta u česticama operacijom

$$\mathbf{X} = \mathbf{ZS},$$

gdje je $\mathbf{X}$ matrica centriranih rezultata entiteta u česticama, a $\mathbf{S}$ dijagonalna matrica standardnih devijacija čestica testa, vektor ukupnih rezultata u testu izračuna se običnom sumacijom operacijom

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{1}$$

s varijancom

$$\sigma^2 = \mathbf{1}^T \mathbf{C} \mathbf{1},$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} n^{-1} \\ &= (\mathbf{X}\mathbf{1})^T \mathbf{X}\mathbf{1} n^{-1} \\ &= (\mathbf{ZS}\mathbf{1})^T \mathbf{ZS}\mathbf{1} n^{-1} \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{S} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{S} \mathbf{1} n^{-1} \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{C} \mathbf{1} \end{aligned}$$

gdje je $\mathbf{C} = \mathbf{SRS}$ matrica kovarijanci rezultata u česticama testa, moguće je uvidjeti da je

$$r_{tt} = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2}{\sigma^2} \right) = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{C} \mathbf{1}} \right).$$

Prema tome, lako je zaključiti da se radi o ekvivalentnim formulama, s time da se kod Spearman-Brownove formule pouzdanost izračunava na standardiziranim, a kod Cronbachove na originalnim rezultatima u česticama.

U praksi se često kompozitni test dijeli na dva jednaka dijela, i to najčešće metodom longitudinalnog rascjepa kod koje sve neparne čestice čine prvi dio testa, a sve parne drugi dio. Na taj se način test svodi na dvije čestice ($m=2$), pa se pouzdanost izračunava Spearman-Brownovom formulom za dvije čestice

$$r_{tt} = \frac{mr}{1+(m-1)r} = \frac{2r}{1+(2-1)r} = \frac{2r}{1+r}$$

Takav način izračunavanja pouzdanosti naziva se u engleskom jeziku *split-half metoda*.

Iz navedenih formula lako se može uočiti da, osim korelacije između čestica, na veličinu koeficijenta pouzdanosti utječe i broj čestica. Naime, polazeći od teoretskih postavki klasičnog modela pouzdanosti, moguće je uočiti da s povećanjem broja čestica testa raste pouzdanost ukupnog rezultata (koji je izveden kao suma ili prosjek iz tih čestica), što jasno pokazuje i *Spearman-Brownova formula* (SB). Taj bi se odnos grafički mogao prikazati kao krivulja negativne akceleracije, odnosno pouzdanost u početku naglašenije raste pri povećanju čestica, dok se u testu s velikim brojem čestica koeficijent pouzdanosti neće znatnije povećavati daljnjim povećanjem broja čestica. Ovo naravno važi samo ako su dodane čestice u sličnim korelacijama kao i ostale (približno jednake prosječnoj korelaciji između čestica). Prognozirani koeficijent pouzdanosti u slučaju da se poveća broj čestica, naravno uz pretpostavku da nove čestice budu u istim korelacijama kao i postojeće, moguće je utvrditi *SB-formulom*

$$r_{tt} = \frac{kr_{xx}}{1+(k-1)r_{xx}},$$

gdje je

- r_{tt} prognozirani koeficijent pouzdanosti
- r_{xx} postojeći koeficijent pouzdanosti
- k koeficijent povećanja broja čestica koji određuje koliko puta treba povećati broj čestica.

Transformacijom navedene *SB-formule* moguće je izračunati koliko puta treba povećati broj čestica za dobivanje očekivane (željene) pouzdanosti, operacijom

$$k = \frac{r_{tt}(1 - r_{xx})}{r_{xx}(1 - r_{tt})},$$

gdje je

- r_{tt} očekivani (željeni) koeficijent pouzdanosti
- r_{xx} koeficijent pouzdanosti postojećeg testa
- k koeficijent povećanja broja čestica.

Ukupni rezultat na nekom kompozitnom testu moguće je izračunati prvom glavnom komponentom standardiziranih rezultata u česticama. Metoda glavnih komponenata detaljno je opisana u poglavlju 3.2. Faktorska analiza (str. 214-237). Osnovna ideja ove metode (kondenzacije rezultata u česticama nekog kompozitnog testa) jest da se linearnom kombinacijom rezultata entiteta u česticama dobije nova varijabla koja će imati maksimalnu varijancu, odnosno osjetljivost, operacijom

$$\mathbf{k} = \mathbf{Z}\mathbf{x},$$

gdje je

$$\mathbf{k}^T \mathbf{k} n^{-1} = \sigma^2 = \max, \text{ a } \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1.$$

Ovaj se problem rješava pomoću *karakteristične jednadžbe*

$$(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Varijable matrice standardiziranih rezultata u česticama moguće je transformirati na *prvu glavnu komponentu* operacijom

$$\mathbf{k} = \mathbf{Z} \mathbf{x}$$

koja ima maksimalnu varijancu

$$\lambda = \sigma^2 = \mathbf{k}^T \mathbf{k} n^{-1}$$

čija je mjera pouzdanosti jednaka

$$\alpha = \frac{m}{m - I} \left(I - \frac{I}{\lambda} \right).$$

Mjeru pouzdanosti za ovako izračunat ukupan rezultat u nekom kompozitnom testu predložili su Lord (1958) i, nezavisno od njega, Kaiser i Caffrey (1965) te su utvrdili da se tim načinom kondenzacije rezultata nekog kompozitnog testa postiže maksimalna pouzdanost pod klasičnim modelom mjerenja. Međutim, iako postupak za utvrđivanje ukupnog rezultata u testu prvom glavnom komponentom osigurava, u pravilu, jednaku ili veću pouzdanost od metode jednostavne sumacije, valja naglasiti da se tim postupkom neće postići bitno veća pouzdanost u odnosu na metodu jednostavne sumacije ako su čestice testa podjednakih aritmetičkih sredina, standardnih devijacija i međusobnih korelacija.

Primjer: 10 ispitanika izmjereno je jednim testom motorike sa tri čestice. U tablici se nalaze njihovi originalni (x_1 , x_2 , x_3) i standardizirani rezultati u svakoj čestici (z_1 , z_2 , z_3), kao i ukupni rezultati određeni metodom jednostavne sumacije originalnih (x) i standardiziranih (z) rezultata te ukupni rezultati određeni prvom glavnom komponentom (k_1). Za sve varijable izračunate su aritmetičke sredine i varijance na temelju kojih je moguće izračunati odgovarajuće koeficijente pouzdanosti.

ISP.	x_1	x_2	x_3	x	z_1	z_2	z_3	z	k_1
1	70	115	115	300	-1,249	0,454	0,398	-0,397	-0,046
2	150	145	142	437	1,894	1,874	1,870	5,638	2,078
3	100	120	122	342	-0,071	0,691	0,780	1,400	0,565
4	120	92	100	312	0,715	-0,634	-0,420	-0,339	-0,199
5	105	82	87	274	0,126	-1,107	-1,129	-2,110	-0,853
6	94	116	117	327	-0,306	0,502	0,507	0,702	0,308
7	120	100	105	325	0,715	-0,256	-0,147	0,312	0,061
8	60	70	76	206	-1,642	-1,675	-1,728	-5,046	-1,865
9	99	104	105	308	-0,110	-0,066	-0,147	-0,323	-0,119
10	100	110	108	318	-0,071	0,218	0,016	0,163	0,071
$\bar{x}$	101,80	105,40	107,70	314,90	0	0	0	0	0
σ^2	647,73	446,49	336,46	3301,21	1	1	1	7,180	2,420

Koeficijent pouzdanosti za ukupne rezultate dobivene metodom jednostavne sumacije originalnih rezultata ispitanika u česticama izračuna se prema *Cronbachovom koeficijentu pouzdanosti*

$$\alpha_{Cronbach} = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2}{\sigma^2} \right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{647,733 + 446,489 + 336,456}{3301,211} \right) = .$$

$$= 1,5(1 - 0,43) = 0,85$$

Koeficijent pouzdanosti za ukupne rezultate dobivene metodom jednostavne sumacije standardiziranih rezultata ispitanika u česticama izračuna se prema *SB koeficijentu pouzdanosti*

$$SB = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{m}{\mathbf{I}^T \mathbf{R} \mathbf{I}} \right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{3}{7,18} \right) = 1,5(1 - 0,42) = 0,87.$$

Koeficijent pouzdanosti za ukupne rezultate dobivene metodom prve glavne komponente standardiziranih rezultata ispitanika u česticama izračuna se prema *Kaiser-Caffreyevu koeficijentu pouzdanosti*

$$\alpha_{KaiserCaffrey} = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2,42} \right) = 1,5(1 - 0,41) = 0,88.$$

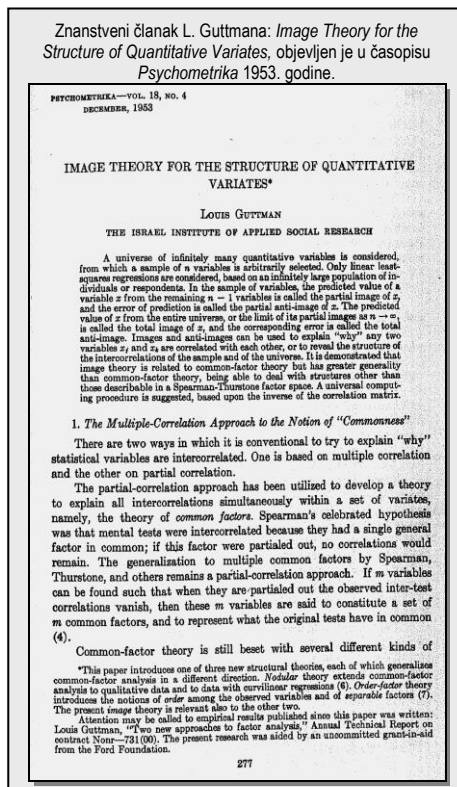
Dobiveni rezultati i na ovom primjeru pokazuju da postupak za utvrđivanje ukupnog rezultata u testu metodom prve glavne komponente osigurava, u pravilu, najveću pouzdanost, zatim slijede metoda jednostavne sumacije standardiziranih rezultata (jer se čestice izjednačavaju po aritmetičkoj sredini i varijanci) pa metode jednostavne sumacije nestandardiziranih rezultata.

Međutim, vidljivo je u ovom primjeru da se navedenim načinima kondenzacije rezultata u česticama ne postiže velika razlika u pouzdanosti ovog mjernog instrumenta. To vrijedi u većini slučajeva za testove kojima se procjenjuju antropometrijske i motoričke dimenzije sportaša jer se radi o kompozitnim testovima u kojima su čestice ponovljena mjerenja, što osigurava veliku sličnost aritmetičkih sredina, standardnih devijacija i korelacija između čestica. Stoga se čini opravdanom upotreba najjednostavnijeg načina kondenziranja rezultata u česticama (jednostavnim zbrojem rezultata u česticama, odnosno izračunavanjem aritmetičke sredine) jer tako dobiveni rezultati nemaju bitno manju pouzdanost u odnosu na znatno složeniju metodu prve glavne komponente.

Ovo, naravno, ne vrijedi za sve testove koji se koriste u kineziološkim istraživanjima i sportskoj praksi, a pogotovu ne za testove koji se koriste za procjenu kognitivnih, konativnih i socioloških dimenzija kod kojih se veća pouzdanost može postići nešto složenijim postupcima za utvrđivanje ukupnog rezultata u testu koji počivaju na Guttmanovu modelu mjerenja.

4.3.1.2. Guttmanov model mjerenja

Za razliku od klasičnog modela mjerenja kod kojeg nije moguće izračunati prave rezultate i pogreške mjerenja (jer je broj nepoznanica uvijek veći od broja jednadžbi), *Guttmanov model mjerenja* dopušta izračunavanje pravih rezultata i pogrešaka u česticama nekog kompozitnog mjernog instrumenta. Pored toga, izračunavanje ukupnog rezultata u nekom testu pod ovim modelom ima u najgorem slučaju jednaku ili veću pouzdanost od one koja se postiže pod klasičnim modelom mjerenja nekog kompozitnog mjernog instrumenta metodom interne konzistencije (Momirović i sur., 1999). Guttmanov model mjerenja izveden je iz njegove *image teorije* (Guttman, 1953).



Louis Guttman je u članku *Image Theory for the Structure of Quantitative Variates*, objavljenom u časopisu *Psychometrika* 1953. godine, predstavio image teoriju. Ova je teorija snažno utjecala ne samo na razvoj teorije mjerenja već i na razvoju faktorske analize¹ pa će u nastavku biti ukratko opisana.

¹Guttman je razvio jedan model faktorske analize koji je nazvao *image analiza*, koja je detaljnije opisana u knjigama: A. Fulgosi (1984). Faktorska analiza, Školska knjiga, Zagreb; N. Viskić-Štalec (1991). Elementi faktorske analize. Fakultet za fizičku kulturu. Zagreb.

Rezultat bilo kojeg entiteta u nekoj varijabli moguće je dekomponirati na zavisni i nezavisni dio od preostalih varijabli iz promatranog skupa. Stoga se može napisati da je

$$z_{ij} = t_{ij} + e_{ij}$$

gdje je

- z_{ij} standardizirni rezultat entiteta i u varijabli j
- t_{ij} rezultat entiteta i u varijabli j koji se može predvidjeti na temelju ostalih varijabli iz promatranog skupa
- e_{ij} rezultat entiteta i u varijabli j koji se ne može predvidjeti na temelju ostalih varijabli iz promatranog skupa.

Prema Gutmanovoj image teoriji t_j predstavlja *image*, a e_j *antiimage* komponentu varijable j . Image i antiimage rezultate entiteta u svakoj varijabli promatranog skupa moguće je izračunati serijom multiplih regresijskih analiza (v. poglavlje 3.1) u kojima se svaka varijabla tretira kao kriterijska, a preostale iz promatranog skupa kao prediktorske.

Neka je iz neke populacije entiteta $P=\{e_i; i=1,2,...,N\}$ slučajnim odabirom dobiven uzorak $E=\{e_i; i=1,2,...,n\}$ te opisan uzorkom varijabli (čestica) $V=\{v_j; j=1,2,...,m\}$, dobivenih primjenom nekog kompozitnog mjernog instrumenta (testa) T .

Neka je $\mathbf{Z}$ matrica standardiziranih rezultata entiteta iz skupa E , opisanih varijablama iz skupa V , a $\mathbf{z}_j$ vektor rezultata entiteta u varijabli j te $\mathbf{Z}_{m-j}$ matrica rezultata entiteta opisanih sa k ($k=1...m-1, k \neq j$) varijabli izuzevši varijablu j . Operacijom

$$\mathbf{R}_{m-j} = \mathbf{Z}_{m-j}^T \mathbf{Z}_{m-j} n^{-1}$$

dobije se korelacijska matrica reda $m-1$ iz koje je isključena varijabla j , a operacijom

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{Z}_{m-j}^T \mathbf{z}_j n^{-1}$$

vektor korelacija varijable j s ostalih k varijabli. Vektor standardiziranih regresijskih koeficijenata kojima se procjenjuje varijabla j temeljem preostalih k varijabli, dobije se operacijom

$$\boldsymbol{\beta}_j = \mathbf{R}_{m-j}^{-1} \mathbf{r}_j$$

pa se prognozirani rezultati u varijabli j pomoću preostalih k varijabli dobiju operacijom

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{Z}_{m-j} \boldsymbol{\beta}_j.$$

Tako dobiveni rezultati nazivaju se *image* varijable j , dok se rezidualni rezultati dobiveni operacijom

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{z}_j - \mathbf{t}_j$$

nazivaju *antiimage* varijable j . Prema Gutmanovom modelu mjerenja *image* varijable predstavljaju *pravi rezultati*, a *antiimage* varijable *pogreške mjerenja*.

Image i antiimage rezultate za neki skup varijabli moguće je jednostavnije izračunati postupkom koji je predložio Kaiser (1963). On je pronašao da se recipročnim vrijednostima dijagonalnih elemenata inverzne korelacijske matrice $\mathbf{R}^{-1}$ dobije dijagonalna matrica uniknih (rezidualnih ili nezavisnih) dijelova varijanci svake varijable s preostalim varijablama iz promatranog skupa.

$$\mathbf{U}^2 = (\text{diag} \mathbf{R}^{-1})^{-1}$$

Dijagonalna matrica Δ^2 (kvadrati multiplih korelacija), koja predstavlja zajednički dio varijance svake varijable s preostalim varijablama iz promatranog skupa, odnosno onaj dio ukupne varijance te varijable koji je procijenjen pomoću linearne multiple korelacije preostalih varijabli promatranog skupa, dobije se kao

$$\Delta^2 = \mathbf{I} - \mathbf{U}^2,$$

gdje je $\mathbf{I}$ matrica identiteta. Matrica pravih rezultata (*image*) dobije se operacijom

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{Z} \Delta^2 \mathbf{R}^{-1} \\ &= \mathbf{Z} (\mathbf{I} - \mathbf{U}^2 \mathbf{R}^{-1}), \end{aligned}$$

a kovarijance između njih operacijom

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{T}^T \mathbf{T} n^{-1} \\ &= \mathbf{R} + \mathbf{U}^2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}^2 - 2\mathbf{U}^2 \end{aligned}$$

Matrica pogrešaka mjerenja (*antiimage*) dobije operacijom

$$\begin{aligned}
 E &= Z - T \\
 &= Z - Z(I - U^2 R^{-1}) \\
 &= Z U^2 R^{-1},
 \end{aligned}$$

a kovarijance između njih operacijom

$$\begin{aligned}
 Q &= E^T E n^{-1} \\
 &= U^2 R^{-1} U^2.
 \end{aligned}$$

Za razliku od klasičnog modela mjerenja, kod kojega su kovarijance varijabli pogrešaka mjerenja jednake nuli, u Gutmanovu modelu mjerenja to nije slučaj.

Pored toga, u Gutmanovu modelu mjerenja važe sljedeći odnosi između izmjerenih i pravih rezultata te pogrešaka mjerenja:

- kovarijance između pravih rezultata i pogrešaka mjerenja različitih čestica nisu jednaki nuli

$$T^T E n^{-1} = U^2 - U^2 R^{-1} U^2,$$

dok su kovarijance pravih rezultata i pogrešaka mjerenja istih (korespondentnih) čestica jednake nuli

$$\text{diag}(T^T E n^{-1}) = 0$$

- kovarijance između izmjernih rezultata i pogrešaka mjerenja različitih čestica jednake su nuli, dok su kovarijance izmjerenih rezultata i pogrešaka mjerenja istih (korespondentnih) čestica jednake varijancama varijabli pogrešaka mjerenja

$$Z^T E n^{-1} = U^2$$

- kovarijance između izmjerenih rezultata i pravih rezultata različitih čestica jednake su njihovim korelacijama, dok su kovarijance između izmjerenih i pravih rezultata istih (korespondentnih) čestica jednake koeficijentima determinacije multiple korelacije te čestice s preostalim česticama, što predstavlja pravu varijancu svake čestice

$$Z^T T n^{-1} = R - U^2.$$

Tablica 4.3-2. Usporedba klasičnog i Guttmanova modela mjerenja

KLASIČNI MODEL MJERENJA	GUTTMANOV MODEL MJERENJA
nije moguće izračunati prave rezultata mjerenja	moguće je izračunati prave rezultate mjerenja
kovarijance pogrešaka mjerenja različitih čestica jednake su nuli $cov(e_j, e_k) = 0$	kovarijance pogrešaka mjerenja različitih čestica nisu jednake nuli $cov(e_j, e_k) \neq 0$
kovarijance pravih rezultata i pogrešaka mjerenja istih čestica jednake su nuli $cov(t_j, e_j) = 0$	kovarijance pravih rezultata i pogrešaka mjerenja iste čestice jednake su nuli $cov(t_j, e_j) = 0$
kovarijance pravih rezultata i pogrešaka mjerenja različitih čestica jednake su nuli $cov(t_j, e_k) = 0$	kovarijance pravih rezultata i pogrešaka mjerenja različitih čestica nisu jednake nuli $cov(t_j, e_k) \neq 0$
	kovarijance izmjerenih rezultata i pogrešaka mjerenja istih čestica jednake su varijancama pogrešaka mjerenja $cov(z_j, e_j) = u_j^2$
	kovarijance između izmjerenih rezultata i pogrešaka mjerenja različitih čestica jednake su nuli $cov(z_j, e_k) = 0$
	kovarijance izmjerenih i pravih rezultata i istih čestica jednake su koeficijentima determinacije, odnosno njihovim pravim varijancama $cov(z_j, t_j) = \delta_j^2$
	kovarijance između izmjerenih i pravih rezultata različitih čestica jednake su njihovim korelacijama $cov(z_j, t_k) = r_{jk}$

Usporedbom klasičnog i Guttmanova modela mjerenja (tablica 4.3-2) moguće je zaključiti:

- Guttmanov model omogućava izračunavanje pravih rezultata i pogrešaka mjerenja, dok klasični to ne omogućava
- klasični model mjerenja pretpostavlja nezavisnost pogrešaka mjerenja, dok Guttmanov ne
- u klasičnom, kao i Guttmanovu modelu pravi rezultati i pogreške mjerenja istih čestica međusobno su nezavisne
- klasični model mjerenja pretpostavlja nezavisnost pravih rezultata i pogrešaka mjerenja različitih čestica, dok Guttmanov ne.

Osim toga, u Guttmanovu modelu:

- kovarijance izmjerenih rezultata i pogrešaka mjerenja istih čestica jednake su varijancama pogrešaka mjerenja, odnosno uniknim (rezidualni ili nezavisni) dijelovima varijanci svake čestice s preostalim česticama testa
- kovarijance između izmjerenih rezultata i pogrešaka mjerenja različitih čestica jednake su nuli
- kovarijance izmjerenih i pravih rezultata istih čestica jednake su koeficijentima determinacije multiple korelacije svake čestice s preostalima iz promatranog skupa

- kovarijance između izmjerenih i pravih rezultata različitih čestica jednake su njihovim korelacijama.

Dakle, prema Guttmanovu modelu mjerenja pravi rezultati ispitanika u česticama nekog kompozitnog testa dobiju se transformacijom izmjerenih rezultata u image oblik, čija su svojstva (prema Momiroviću i sur, 1999):

- ukupan rezultat u testu određuje se na temelju pravih rezultata u česticama
- rezultati u česticama nakon transformacije u image oblik asimptotski su kvantitativne, kontinuirane i normalno distribuirane varijable, što ih čini pogodnima za statističku obradu
- ako se ukupan rezultat u kompozitnom testu odredi kao prva glavna komponenta čestica transformiranih u image oblik, dobije se maksimalna pouzdanost.

Maksimalnu pouzdanost pod Gutmanovim modelom mjerenja moguće je još jednostavnije dobiti pomoću transformacije izmjerenih rezultata ispitanika u česticama nekog kompozitnog mjernog instrumenta u *univazalnu ili Harrisovu metriku* (Harris, 1962).

Matricu standardiziranih rezultata entiteta u česticama nekog kompozitnog mjernog instrumenta transformiramo u *Harrisovu metriku* operacijom

$$H = Z U^1,$$

gdje je

$$U^2 = (\text{diag} R^{-1})^{-1}$$

matrica uniknih dijelove varijanci svake čestice s preostalim varijablama iz promatranog skupa.

Matrica kovarijanci tako transformiranih rezultata je

$$\begin{aligned} C_h &= H^T H n^{-1} \\ &= (Z U^1)^T Z U^1 n^{-1} \\ &= U^1 Z^T Z U^1 n^{-1} \\ &= U^1 R U^1 \end{aligned}$$

pa je dijagonalna matrica varijanci čestica transformiranih u *Harrisovu metriku* jednaka recipročnim vrijednostima njihovih uniknih varijanci, odnosno varijanci pogrešaka

$$\text{diag}C_h = U^2.$$

Univerzalna metrika je invarijantna na promjene u skaliranju varijabli te predstavlja najpovoljniji oblik transformacije rezultata u česticama nekog testa jer optimalno ponderira rezultate u česticama (proporcionalno faktorskoj valjanosti čestica), čime se ukupni rezultat u testu izračunava s maksimalnom pouzdanošću (Momirović i sur., 1999).

Ukupan rezultat u nekom kompozitnom testu koji ima maksimalnu pouzdanost odredi se kao prva glavna komponenta čestica transformiranih u Harrisovu metriku

$$h = ZU^1 y,$$

gdje je

$$h^T h n^{-1} = \delta = \max, \text{ a } y^T y = 1.$$

Ovaj se problem rješava pomoću *karakteristične jednadžbe*

$$(C_h - \delta I) y = 0,$$

gdje je y prvi svojstveni vektor, a δ prva svojstvena vrijednost matrice kovarijanci C_h .

Za ovaj način utvrđivanja ukupnog rezultata predloženo je nakoliko koeficijenata pouzdanosti:

- Guttman-Nicewanderov koeficijent pouzdanosti (Guttman, 1945; Nicewander, 1975)

$$\lambda_6 = 1 - \frac{1}{\delta}.$$

Ovaj koeficijent, iako izveden pod pretpostavkom da se test sastoji od beskonačnog broja čestica, može se smatrati stvarnom mjerom pouzdanosti ako test ima velik broj čestica, što je gotovo uvijek slučaj kod psihologijskih mjernih instrumenata. Međutim, mjerni instrumenti koji se koriste za mjerenje kinezioloških fenomena nemaju tako velik broj čestica pa se može dogoditi da se dobije pouzdanost niža od one koja se dobije pod klasičnim modelom mjerenja.

- Donja granica pouzdanosti (Momirović i Dobrić, 1977)

$$\rho_1 = \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^2$$

- Gornja granica pouzdanosti (Zakrajšek, Momirović i Dobrić, 1977)

$$\rho_2 = 1 - \frac{1}{\delta^2}$$

Prema Momiroviću i suradnicima (1999) ovaj koeficijent može poslužiti za otkrivanje loših testova. Ako su vrijednosti ovog koeficijenta niže od 0,90, tada se test s velikom sigurnošću može smatrati nepouzdanim.

- Momirovićeva donja granica pouzdanosti (Momirović, 1975), izračunata na temelju omjera prve svojstvene vrijednosti matrice kovarijanci varijabli transformiranih u image metriku (δ) i prve svojstvene vrijednosti matrice korelacija između čestica (λ)

$$\tau = \frac{\delta}{\lambda}.$$

Momirović i suradnici (1999) smatraju da se ovaj koeficijent može smatrati donjom granicom pouzdanosti i da stvarna pouzdanost testa može biti znatno viših vrijednosti, a nikako nižih. Stoga, ako su vrijednosti ovog koeficijenta visoke, test je sigurno pouzdan, ali ako su vrijednosti ovog koeficijenta niske, test ne mora biti slabo pouzdan.

Na kraju je moguće zaključiti da je za većinu kompozitnih mjernih instrumenata koji se koriste u procjeni kinezioloških fenomena (primjerice, antropometrijske i motoričke dimenzije), kod kojih su čestice ponovljena mjerenja (što osigurava veliku sličnost aritmetičkih sredina, standardnih devijacija i korelacija između čestica), opravdano određivanje ukupnog rezultata u testu na najjednostavniji načina - jednostavnim zbrajanjem rezultata u česticama, odnosno izračunavanjem aritmetičke sredine jer tako dobiveni rezultati nemaju bitno manju pouzdanost u odnosu na znatno složenije postupke (prvu

glavnu komponentu standardiziranih rezultata, prvu glavnu komponentu rezultata transformiranih u Harrisovu metriku).

Ovo, naravno, ne važi za sve testove koji se koriste u kineziološkim istraživanjima i sportskoj praksi, a pogotovo za testove koji se koriste za procjenu kognitivnih, konativnih i socioloških dimenzija. Za većinu takvih testova preporučuje se primjena prve glavne komponente na standardiziranim rezultatima entiteta u česticama (realna metrika) ili, još bolje, prva glavna komponenta na rezultatima entiteta u česticama koji su transformirani u Harrisovu metriku, čime bi se osigurala optimalna pouzdanost.

4.3.2. Objektivnost

Objektivnost je mjerna karakteristika kojom se određuje nezavisnost rezultata mjerenja od mjerioca. Postupak mjerenja smatra se objektivnim ako različiti mjerioci mjereći, iste ispitanike, dolaze do istih rezultata. Dakle, što je veći stupanj slaganja između rezultata ispitanika koje su dobili različiti mjerioci, to je objektivnost mjerenja veća. Postupak za utvrđivanje objektivnosti nekog mjerenja u kome sudjeluje veći broj mjerilaca identičan je metodi interne konzistencije za utvrđivanje pouzdanosti kompozitnih mjernih instrumenata, s tom razlikom da su pri subjektivnoj procjeni čestice mjerenja mjerioci, odnosno suci. Stoga se objektivnost mjerenja može povećati uključivanjem većeg broja sudaca čije se ocjene trebaju u što većoj mjeri međusobno slagati. To se postiže pridržavanjem standardiziranog postupka mjerenja. Na visoku razinu objektivnosti ove vrste mjerenja utječe kompetentnost i uvježbanost ocjenjivača (znanje i iskustvo), stabilnost osobina ličnosti mjerioca, kriteriji i pravila mjerenja, svojstva testa (primjerice, objektivniji su testovi koji imaju jednoznačan ključ za ocjenjivanje, oni koji od ispitanika traže jednostavnije reakcije, u kojima se koristi suvremena tehnologija i sl.), budući da se tako može izbjeći utjecaj ocjenjivača na konačnu ocjenu.

4.2.3. Homogenost

Homogenost je svojstvo kompozitnih testova koje pokazuje koliko rezultati ispitanika u svim česticama zavise od istog predmeta mjerenja ili identične kombinacije različitih predmeta mjerenja. Homogenost, kao metrijska karakteristika, ima važnu ulogu pri opisivanju mjernih instrumenata jer o njoj ovisi dijagnostička vrijednost testa. Naime, ako je neki test homogen to znači da se o predmetu mjerenja jednoznačno može zaključivati, odnosno, ako je test heterogen, usprkos mogućoj pragmatičnoj valjanosti, nije moguće utvrditi u kojem omjeru različite sposobnosti ili osobine ispitanika utječu na rezultat u testu. Stoga je, usprkos manjoj ekonomičnosti, u praksi bolje koristiti više homogenih testova za predikciju neke složene kriterijske varijable nego jedan heterogen test. To stoga jer je moguće precizno utvrditi strukturu čimbenika odgovornih za uspješnosti u kriterijskoj varijabli, odnosno moguće je doznati zašto netko postiže bolje, a netko lošije rezultate u kriterijskoj varijabli, što te testove čini upotrebljivima u dijagnostičke svrhe. Postoji više mjera homogenosti kompozitnih testova od kojih će u ovoj knjizi biti opisane sljedeće mjere:

- prosječna korelacija između čestica
- mjera homogenosti testa koja se temelji na broju glavnih komponenata s pozitivnim koeficijentima pouzdanosti (Momirović i Gredelj, 1980)
- mjera homogenosti određena kao relativna vrijednost varijance prve glavne komponente čestica transformiranih u image oblik (Momirović, 1977).

Koeficijent homogenosti izveden na temelju prosječne korelacije između čestica

Ova se mjera temelji na sasvim jasnoj pretpostavci da će korelacija između čestica biti veća što čestice više procjenjuju isti predmet mjerenja, odnosno korelacije između čestica bit će bliže nuli ako čestice mjere više međusobno nezavisnih predmeta mjerenja.

Neka je ***B*** matrica u kojoj su rezultati *n* entiteta izmjereni nekim kompozitnim testom sa *m* čestica

$$\mathbf{B} = (b_{ij})$$

Matrica standardiziranih rezultata ***Z*** dobije se operacijom

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{B} - \mathbf{PB})\mathbf{V}^1,$$

gdje je $\mathbf{P} = \mathbf{1}(\mathbf{1}^T \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^T$, a $\mathbf{V}^2 = \text{diag} \mathbf{C}$ dijagonalna matrica varijanci čestica dobivena iz matrice kovarijanci čestica $\mathbf{C} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{PB})\mathbf{n}^{-1}$. Matrica korelacije između čestica dobije se operacijom

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{n}^{-1}$$

pa se koeficijent homogenosti izračuna kao procječna korelacija između čestica operacijom

$$h_1 = \bar{r} = \frac{\mathbf{1}^T (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \mathbf{1}}{m^2 - m},$$

gdje je $\mathbf{1}$ sumacijski vektor sa m jedinica, a $\mathbf{I}$ matrica identiteta reda m .

Osnovni nedostatak ovako definiranog koeficijenta homogenosti jest u tome što on u stvari, kao i koeficijent pouzdanosti, zavisi od varijance greške te ga je teško razlikovati od koeficijenta pouzdanosti. Stoga je predloženo više drugih koeficijenata homogenosti. Jedna jednostavna i od pouzdanosti manje zavisna mjera utvrđuje se pomoću broja svojstvenih vrijednosti korelacijske matrice većih od 1.

Mjera homogenosti testa koja se temelji na broju glavnih komponentata s pozitivnim koeficijentima pouzdanosti

Ova mjera homogenosti nekog testa određuje se na temelju broja glavnih komponentata s pozitivnim koeficijentima pouzdanosti. Rješavanjem *karakteristične jednadžbe korelacijske matrice* $\mathbf{R}$

$$(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

dobije se matrica svojstvenih vektora $\mathbf{X}$, za koju vrijedi da je $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T = \mathbf{I}$, te dijagonalna matrica svojstvenih vrijednost λ koje predstavljaju varijance glavnih komponentata, za koje vrijedi da je

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_j \geq \dots \geq \lambda_m$$

i

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j + \dots + \lambda_m = m,$$

a čija se pouzdanost utvrđuje Kaiser-Caffreyevim koeficijentom

$$\alpha = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda_j} \right).$$

Jasno se vidi da samo one glavne komponente kojih je varijanca veća od ili jednaka 1 imaju pozitivne koeficijente pouzdanosti. Stoga su Momirović i Gredelj (1980) predložili da se kao mjera homogenosti uzme veličina

$$h_2 = 1 - \frac{k-1}{m-1},$$

gdje je k broj svojstvenih vrijedosti većih od ili jednakih 1, a m ukupan broj svojstvenih vrijednosti. Ovaj koeficijent homogenosti varira od 0 (ako je test potpuno heterogen, a to je slučaj kad svaka čestica predstavlja potpuno nezavisan predmet mjerenja), do 1 (ako je test potpuno homogen, odnosno ako sve čestice procjenjuju jedan predmet mjerenja jer će u tom slučaju biti samo jedan pozitivan koeficijent pouzdanosti). Prema Momiroviću i suradnici (1999), ova je mjera homogenosti više u skladu s formalnom definicijom homogenosti nego prosječna korelacija.

Mjera homogenosti testa određena kao relativna vrijednost varijance prve glavne komponente čestica transformiranih u image oblik

Ovu mjeru predložio je Momirović 1977. godine kako bi izbjegao poteškoće određivanja homogenosti nekog kompozitnog mjernog instrumenta zbog utjecaj pogrešaka mjerenja. Naime, kako je već istaknuto, osnovni nedostatak prethodnih mjera homogenosti jest u tome što ovise o pouzdanosti, odnosno o varijanci pogreške (prva više, a druga nešto manje) te ih je teško razlikovati od koeficijenta pouzdanosti. Stoga je Momirović (1977) predložio koeficijent homogenosti pod Gutmanovim modelom mjerenja (modelom koji dopušta nenulte kovarijance varijabli pogrešaka mjerenja) jer omogućava da se pri operacionalizaciji mjere homogenosti:

- varijanca pogreške eksplicitno ukloni te da se
- mjera homogenosti izrazi kao omjer varijance prvog predmeta mjerenja testa i ukupne varijance pravih rezultata.

Neka je $\mathbf{R}$ matrica korelacija između varijabli-čestica nekog kompozitnog mjernog instrumenta, onda je

$$\mathbf{U}^2 = (\text{diag} \mathbf{R}^{-1})^{-1}$$

matrica uniknih varijanci svake varijable-čestice. Tada je matrica pravih rezultata (image)

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z} (\mathbf{I} - \mathbf{U}^2 \mathbf{R}^{-1}),$$

a matrica kovarijance između njih

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}^T \mathbf{T} n^{-1}.$$

Ukupna varijanca pravih rezultata je

$$v = \text{trag} \mathbf{G} = \text{trag}(\mathbf{I} - \mathbf{U}^2) = m - \sum_{j=1}^m u_j^m,$$

gdje su u_j^2 ($j=1\dots m$) unikne varijance čestica.

Ako se glavni predmet mjerenja odredi kao prva glavna komponenta pravih rezultata (čestica transformiranih u image oblik), tada se homogenost testa može izraziti formulom

$$h_3 = \frac{\delta}{v},$$

gdje je

- δ prva svojstvena vrijednosti matrice $\mathbf{G}$ koja je ujedno i varijanca prve glavne komponente pravih rezultata, a
- v ukupna varijanca pravih rezultata.

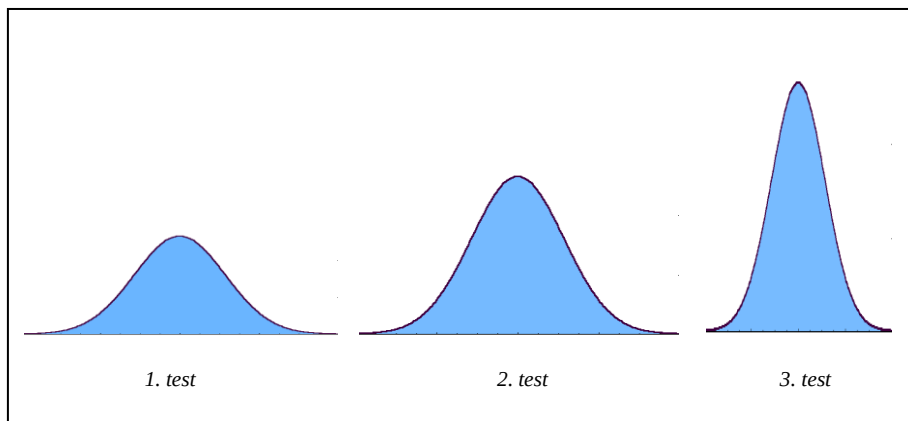
Ovako definirana mjera homogenosti nije zavisna od pouzdanosti (pogrešaka mjerenja) jer je dobivena na pravim rezultatima testa. Osim toga, ona pokazuje koliki dio ukupne varijance iscrpljuje glavni predmet mjerenja testa (određen prvom glavnim komponentom). Tako, primjerice, test je potpuno homogen ako prva glavna komponenta obuhvaća ukupnu varijancu testa ($h_3 = 1$ jer je $\delta = v$), a što je test heterogeniji, to će δ biti manja od v , a h_3 će težiti nuli.

4.3.4. Osjetljivost

Osjetljivost predstavlja svojstvo mjernog instrumenta da uspješno razlikuje ispitanike po predmetu mjerenja. Ako, primjerice, nekim mjernim instrumentom dobijemo identične rezultate dvaju ispitanika, to ne mora značiti i jednak stupanj razvijenosti predmeta mjerenja, već može biti i znak slabije osjetljivosti mjernog instrumenta. Isto tako, rezultat nula u broju zgibova ne mora značiti potpunu odsutnost predmeta mjerenja (repetitivne snage), već je uzrok tome vjerojatno slaba osjetljivost mjernog instrumenta, tj. njegova neprimjerenost određenoj populaciji. To se često događa kada se neki mjerni instrument konstruiran za selekcioniranu populaciju (vrhunski sportaši), a primjenjuje se na neselekcioniranoj populaciji kojoj instrument nije težinski primjeren.

Osjetljivost kinezioloških mjernih instrumenta procjenjuje se na temelju mjera disperzije (v. poglavlje 2.4.2, str. 74-86 i oblika distribucije rezultata (v. poglavlja 2.4.3, str. 86-88 i 2.4.4, str. 88-89).

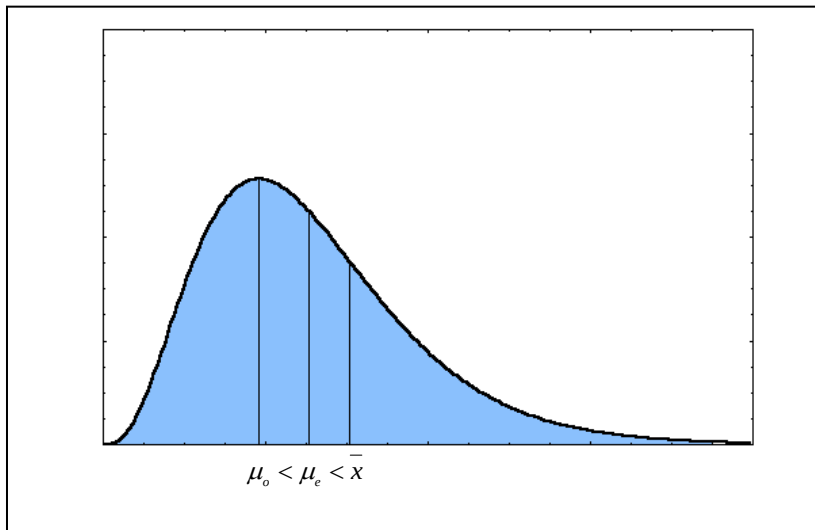
Slika 4.3-2 prikazuje distribucije rezultata ispitanika čiji je predmet mjerenja procijenjen trima različitim testovima. Lako je uvidjeti da je varijabilnost rezultata najveća u prvom testu, manja u drugom, a najmanja u trećem. Stoga nije teško zaključiti da je prvi test najosjetljiviji, drugi nešto manje, dok je treći test najmanje osjetljiv.



Slika 4.3-2. Tri distribucije s različitom varijabilnosti rezultata

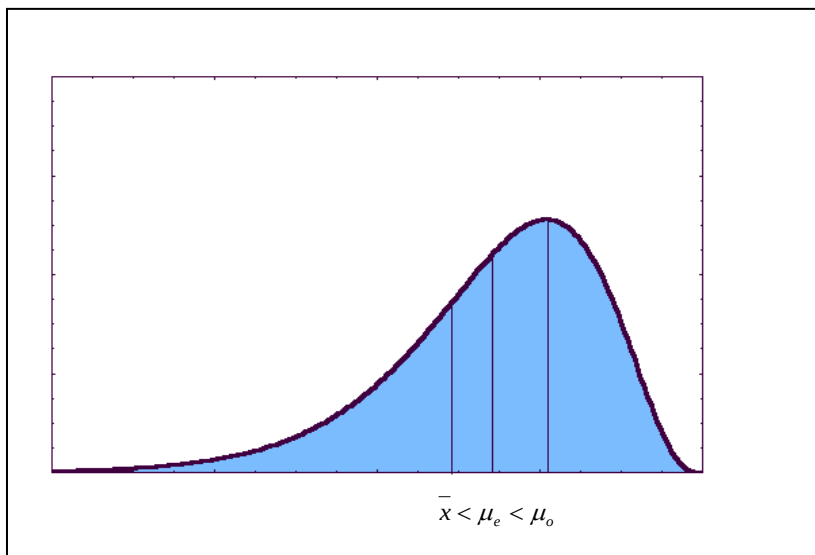
Ako se, primjerice, predmet mjerenja u populaciji normalno distribuira, a rezultati dobiveni primjenom nekog mjernog instrumenta

konstruiranog za procjenu tog predmeta mjerenja imaju pozitivno asimetričnu distribuciju (slika 4.3-3), onda se može zaključiti da mjerni instrument nije primjeren toj populaciji jer je grupiranje entiteta u zoni ispodprosječnih vrijednosti, što ukazuje da je test pretežak.



Slika 4.3-3. Pozitivno asimetrična distribucija rezultata

Nasuprot tome, ako većina entiteta postiže iznadprosječne rezultate, (slika 4.3-4), onda je test prelagan za tu populaciju.



Slika 4.3-4. Negativno asimetrična distribucija rezultata

4.3.5. Valjanost

S obzirom na to da se mjerni instrumenti konstruiraju zato da procjenjuju određeni predmet mjerenja koji može biti relativno jednostavan (npr. neko morfološko obilježje), ali i vrlo složen (npr. neka motorička sposobnost), postavlja se pitanje što u stvari određeni mjerni instrument mjeri, odnosno kakva mu je *valjanost*.

S obzirom na cilj mjerenja, valjanost mjernih instrumenata možemo promatrati sa dva osnovna stajališta:

- Ako je cilj mjerenja utvrđivanje stanja, odnosno razine pojedinih antropoloških obilježja nekog ispitanika, tada se radi o tzv. *dijagnostičkoj valjanosti*.
- Ako je cilj mjerenja prognozirati uspješnost u nekoj aktivnosti na temelju rezultata prikupljenih nekim mjernim instrumentom, tada se radi o tzv. *pragmatičnoj* ili *prognostičkoj valjanosti*.

4.3.5.1. Dijagnostička valjanost

Dijagnostičkoj valjanosti je osnovni cilj utvrditi što određeni test mjeri, odnosno koji mu je predmet mjerenja. Prema načinu utvrđivanja, moguće je razlikovati dva osnovna tipa dijagnostičke valjanosti. To su *apriorna* i *faktorska* valjanost.

Apriorna valjanost

Kod *apriorne valjanosti* zaključivanje o predmetu mjerenja temelji se na logičkoj analizi postupka mjerenja i testovnog sadržaja koji dovodi do odgovarajuće reakcije ispitanika, što može sugerirati aktiviranje neke hipotetske latentne dimenzije (predmeta mjerenja). Prema tome, apriorna valjanost nije proizvod eksperimentalne provjere, pa se ni ne izražava konkretnim koeficijentom valjanosti. Stoga se apriorna valjanost obično koristi za postavljanje hipoteze o predmetu mjerenja koja se potvrđuje ili opovrgava eksperimentalnom provjerom.

Faktorska valjanost

Faktorska valjanost nastoji utvrditi koji se predmet mjerenja ispituje određenim mjernim instrumentom, odnosno u kojoj mjeri svaki od njegovih faktora uvjetuje varijabilnost dobivenih rezultata. S obzirom na to da se u pravilu jednim mjernim instrumentom želi procijeniti jedan faktor, onda se faktorskom valjanošću utvrđuje koliko neki test dobro mjeri onaj faktor za čije je mjerenje konstruiran. Kod faktorske valjanosti zaključivanje o predmetu mjerenja temelji se na rezultatima faktorske analize, odnosno eksperimentalno se utvrđuje kolikom proporcijom neki faktor sudjeluje u varijanci rezultata testa.

Kako je već ranije rečeno, na rezultat dobiven mjerenjem nekog entiteta i utječe veći broj čimbenika (faktora). To znači da rezultati prikupljeni mjerenjem predstavljaju nesavršenu funkciju pravog predmeta mjerenja i pogreške mjerenja. Stoga se svaki *izmjereni rezultat* (x_i) može dekomponirati na tzv. *pravi rezultat* (t_i) i *pogrešku mjerenja* (e_i).

$$x_i = t_i + e_i.$$

Ova pretpostavka je osnova teorije pouzdanosti, dok se teorija faktorske valjanosti temelji na pretpostavci da pravi rezultat mjerenja t ne mora biti pod utjecajem samo jednog faktora, već može biti determiniran većim brojem faktora, budući da se vrlo rijetko nekim mjernim instrumentom mjeri učinak samo jednog izoliranog faktora. Zato se pravi rezultat nekog entiteta t_i može predstaviti kao zbroj ili jednostavna linearna kombinacija k faktora ($f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{ik}$), koji se javljaju i u drugim testovima, i jednog specifičnog faktora koji je karakterističan samo za određeni test (f_s)

$$t_i = f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{ik} + f_{is}.$$

Međutim, opravdana je pretpostavka da različiti faktori nejednako utječu na konačan rezultat. Stoga je u formulu moguće uvesti koeficijente utjecaja svakog faktora na konačan rezultat

$$t_i = a_1 f_{i1} + a_2 f_{i2} + \dots + a_k f_{ik} + a_s f_{is},$$

gdje su a_j ($j=1,\dots,k$) koeficijenti relativnog utjecaja nekog faktora j na na pravi rezultat. Prema tome, svaki izmjereni rezultat x_i može se

izraziti kao nejednako ponderirana linearna kombinacija faktora ($f_{i1}, \dots, f_{ik}$), specifičnog faktora (f_{is}) i faktora slučajne pogreške (e_i)

$$x_i = a_1 f_{i1} + a_2 f_{i2} + \dots + a_k f_{ik} + a_s f_{is} + a_e e_i.$$

Upravo ovaj matematički model (generalni linearni model) predstavlja tzv. *jednadžbu specifikacije* nekog testa jer pokazuje (specificira) udio svakog faktora u određivanju pravog rezultata nekog testa. Ako se pretpostavi da su faktori međusobno nezavisni (korelacije između faktora su jednake nuli), tada je ukupna varijanca jednostavne linearne kombinacije jednaka zbroju varijanci članova te linearne kombinacije, odnosno zbroju varijanci svih faktora.

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_k + v_s + v_e.$$

Dijeljenjem ovog izraza ukupnom varijancom v dobije se proporcija varijance svakog faktora u ukupnoj varijanci testa

$$I = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_k}{v} + \frac{v_s}{v} + \frac{v_e}{v},$$

odnosno

$$1 = h^2 + s^2 + e^2,$$

gdje je

- $h^2 = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_k}{v}$ proporcijom izražen dio varijance testa koji određuje k zajedničkih faktora, a obično se naziva *komunalitet*. Dakle, komunalitet se može definirati kao proporcijom izražen dio varijance nekog testa koji se može pripisati zajedničkom djelovanju (utjecaju) svih faktora koji determiniraju varijance i drugih testova
- $s^2 = \frac{v_s}{v}$ proporcijom izražen dio varijance testa koji je uvjetovan faktorom specifičnim samo za taj test, a naziva se *specifitet*
- $e^2 = \frac{v_e}{v}$ proporcijom izražen dio varijance testa koji je uvjetovan slučajnom pogreškom testa, a naziva se *varijanca slučajne pogreške*
- $u^2 = \frac{v_s}{v} + \frac{v_e}{v}$ proporcijom izražen jedinstveni dio varijance testa definiran kao zbroj *specifiteta* (s^2) i *varijance slučajne pogreške* (e^2) naziva se *unikvitet*.

Tako se pokazateljima faktorske valjanosti mogu smatrati veličine komponenata komunaliteta jer svaka komponenta komunaliteta predstavlja koeficijent determinacije (r^2), odnosno kvadrat koeficijenta korelacije pojedine varijable (testa) s pojedinim faktorom. To se utvrđuje različitim modelima *faktorske analize* (v. poglavlje 3.2. str. 214-237). Dakle, faktorska valjanost nekog novokonstruiranog testa utvrđuje se korelacijom nekog testa s faktorima koji su definirani kao linearne kombinacije rezultata većeg broja testova za koje se pretpostavlja da imaju isti predmet mjerenja kao taj konkretni test. Kvadrat dobivene korelacije, tj. koeficijent determinacije, govori o veličini varijance rezultata testa koja se može pripisati djelovanju zajedničkog faktora. Oduzimanjem komunaliteta od vrijednosti 1 dobije se unikvititet koji predstavlja proporciju dijela ukupne varijance koji otpada na varijancu pogreške i specifični faktor tog testa. Što je korelacija testa s faktorom za koji je test konstruiran veća, a manja sa svim drugim faktorima, test je valjaniji te je moguće zaključiti da dobro procjenjuje željeni predmet mjerenja.

4.3.5.2. Pragmatička valjanost

Pragmatička ili prognostička valjanost nekog testa pokazuje koliko uspješno, odnosno s kolikom sigurnošću možemo predvidjeti uspjeh u nekoj praktičnoj aktivnosti na temelju rezultata tog testa. Primjerice, kakva je mogućnost prognoziranja uspjeha u nekoj atletskoj disciplini (npr. trčanju na 100 m) na temelju rezultata dobivenih upotrebom nekog testa (npr. skoka udalj s mjesta). Dakle, problem pragmatičke valjanosti svodi se na utvrđivanje neke mjere povezanosti između varijable dobivene mjerenjem određene skupine entiteta nekim testom (prediktorska ili nezavisna varijabla) i varijable koja opisuje uspješnost tih entiteta u nekoj aktivnosti (kriterijska ili zavisna varijabla). U kineziološkim istraživanjima, kriterijske i prediktorske varijable mogu biti *jednodimenzionalne* i *višedimenzionalne*. Osim toga mogu biti procijenjene nekom *kvalitativnom* ili *kvantitativnom* mjernom skalom. Upravo o navedenim karakteristikama varijabli ovisi način utvrđivanja pragmatičke valjanosti. Stoga je moguće utvrđivati pragmatičku valjanost:

- jednog testa za jednodimenzionalni kvantitativni kriterij
- skupa testova za jednodimenzionalni kvantitativni kriterij
- skupa testova za višedimenzionalni kvantitativni kriterij
- jednog testa za jednodimenzionalni kvalitativni kriterij
- skupa testova za jednodimenzionalni kvalitativni kriterij.

Pramatička valjanost jednog testa za jednodimenzionalni kvantitativni kriterij

Ako uspješnost u nekoj aktivnosti izrazimo jednom kvantitativnom varijablom, onda je pragmatičku valjanost jednog testa (čiji su rezultati dobiveni na intervalnoj i omjernoj mjernoj ljestvici) moguće utvrditi pomoću *jednostavne regresijske analize* (v. poglavlje 3.1.1, str. 185-198), odnosno *Pearsonovim koeficijentom korelacije* (v. poglavlje 2.11, str. 160-180). Međutim, uspješnost u većini kinezioloških aktivnosti zavisi od većeg broja čimbenika, pa se vrlo rijetko događa da jedan test ima zadovoljavajuću pragmatičku valjanost. Stoga se češće utvrđuje pragmatička valjanost skupa testova za neku kriterijsku aktivnost.

Pragmatička valjanost skupa testova za jednodimenzionalni kvantitativni kriterij

Ako uspješnost ispitanika u nekoj aktivnosti izrazimo jednom kvantitativnom varijablom, onda je pragmatičku valjanost skupa testova (čiji su su rezultati dobiveni na intervalnoj i omjernoj mjernoj ljestvici) moguće utvrditi *višestrukom regresijskom analizom* (v. poglavlje 3.1.2, str. 199-204). Kao mjera pragmatičke valjanosti skupa testova koristi se *multipla korelacija*, dok *standardizirani regresijski koeficijenti* predstavljaju mjere pragmatičke valjanosti pojedinog testa. Valja istaknuti da je koeficijent multiple korelacije uvijek jednak ili veći od bilo kojega koeficijenta valjanosti pojedinog testa. Osim toga, multipla korelacija bit će veća što su korelacije između testova (prediktora) i kriterija veće, a interkorelacije između testova manje. To je logično jer testovi koji su u međusobno niskim korelacijama, imaju različitu faktorsku strukturu, odnosno faktori koji određuju uspjeh u tim testovima ne postoje u drugima pa time imaju veću mogućnost utjecaja na kriterijsku varijablu.

Pragmatičku valjanost skupa testova za višedimenzionalni kvantitativni kriterij

Za adekvatnu procjenu uspješnosti u nekim kompleksnim kineziološkim aktivnostima (primjerice, košarka, odbojka, rukomet itd.) potrebno je uključiti veći broj kriterijskih varijabli (primjerice, uspješnost košarkaša moguće je opisati pomoću većeg broja varijabli kao što su: šuterska uspješnost, skakačka uspješnost u obrani i napadu,

razina obrambenog pritiska itd.). Utvrđivanje pragmatičke valjanosti jednog testa u odnosu na neki višedimenzionalni kriterij svodi se na izračunavanje korelacije između tog testa i svake kriterijske varijable, što se u kineziološkoj praksi gotovo nikad ne događa jer nije realno očekivati da će jedan test imati značajniju pragmatičku valjanost na tako kompleksan kriterij. Stoga se najčešće utvrđuje pragmatička valjanost skupa testova za neki višedimenzionalni kriterij, i to pomoću *kanoničke analize*. Problem utvrđivanja pragmatičke valjanosti skupa testova u odnosu na neki višedimenzionalni kriterij pomoću kanoničke analize svodi se na pronalaženje pondera koji će osigurati najveću moguću korelaciju između linearnih kompozita (kanoničkih faktora) koji pripadaju skupu prediktorskih i kriterijskih varijabli (v. poglavlje 3.3, str. 238-244). Te korelacije nazivaju se *kanoničke korelacije* i predstavljaju mjere pragmatičke valjanosti skupa testova u odnosu na višedimenzionalni kriterij.

Pragmatička valjanost jednog testa za jednodimenzionalni kvalitativni kriterij

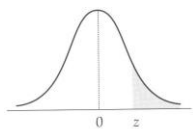
Ako se procijeni uspješnost u nekoj kineziološkoj aktivnosti pomoću nominalne mjerne ljestvice (primjerice, klasificirajući entitete u dvije kategorije *uspješni-neuspješni*), onda je pragmatičku valjanost jednog testa čiji su rezultati dobiveni na kvantitativnoj (intervalnoj ili omjernoj) mornoj ljestvici moguće utvrditi *t-testom*, odnosno *univarijatom analizom varijance* (v. poglavlja 2.9, str. 135-149 i 2.10, str. 150-159).

Pragmatička valjanost skupa testova za jednodimenzionalni kvalitativni kriterij

Već je rečeno da se vrlo rijetko događa da jedan test ima zadovoljavajuću pragmatičku valjanost pa se češće utvrđuje pragmatička valjanost većeg broja testova za neku kriterijsku aktivnost. Ako se uspješnost ispitanika u nekoj kriterijskoj aktivnosti ne može na zadovoljavajući način izraziti jednom kvantitativnom, već kvalitativnom varijablom, tada je pragmatičku valjanost skupa testova (čiji su rezultati dobiveni na intervalnoj i omjernoj mornoj ljestvici) moguće utvrditi *diskriminacijskom analizom* (v. poglavlje 3.4, str. 245-257). Pomoću nje se dobiju informacije o međusobnim razlikama grupa (položaji centroida grupa na diskriminacijskoj funkciji) i doprinosu pojedinih varijabli toj razlici (matrica korelacija varijabli s

diskriminacijskim funkcijama). Mjeru pragmatičke valjanosti svake diskriminacijske funkcije predstavlja koeficijent kanoničke diskriminacije, dok se pragmatička valjanost pojedinog testa procjenjuje putem njegove korelacije s diskriminacijskim funkcijama.

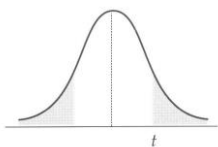
Tablice



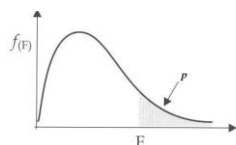
Normalna distribucija

Tablica A. Površina normalne distribucije od zadane z - vrijednosti do kraja distribucije,

z	p	z	p	z	p
0,00	0,5000	0,44	0,3300	0,88	0,1894
0,01	0,4960	0,45	0,3264	0,89	0,1867
0,02	0,4920	0,46	0,3228	0,90	0,1841
0,03	0,4880	0,47	0,3192	0,91	0,1814
0,04	0,4840	0,48	0,3156	0,92	0,1788
0,05	0,4801	0,49	0,3121	0,93	0,1762
0,06	0,4761	0,50	0,3085	0,94	0,1736
0,07	0,4721	0,51	0,3050	0,95	0,1711
0,08	0,4681	0,52	0,3015	0,96	0,1685
0,09	0,4641	0,53	0,2981	0,97	0,1660
0,10	0,4602	0,54	0,2946	0,98	0,1635
0,11	0,4562	0,55	0,2912	0,99	0,1611
0,12	0,4522	0,56	0,2877	1,00	0,1587
0,13	0,4483	0,57	0,2843	1,05	0,1469
0,14	0,4443	0,58	0,2810	1,10	0,1357
0,15	0,4404	0,59	0,2776	1,15	0,1251
0,16	0,4364	0,60	0,2743	1,20	0,1151
0,17	0,4325	0,61	0,2709	1,25	0,1056
0,18	0,4286	0,62	0,2676	1,30	0,0968
0,19	0,4247	0,63	0,2643	1,35	0,0885
0,20	0,4207	0,64	0,2611	1,40	0,0808
0,21	0,4168	0,65	0,2578	1,45	0,0735
0,22	0,4129	0,66	0,2546	1,50	0,0668
0,23	0,4090	0,67	0,2514	1,55	0,0606
0,24	0,4052	0,68	0,2483	1,60	0,0548
0,25	0,4013	0,69	0,2451	1,65	0,0495
0,26	0,3974	0,70	0,2420	1,70	0,0446
0,27	0,3936	0,71	0,2389	1,75	0,0401
0,28	0,3897	0,72	0,2358	1,80	0,0359
0,29	0,3859	0,73	0,2327	1,85	0,0322
0,30	0,3821	0,74	0,2296	1,90	0,0287
0,31	0,3783	0,75	0,2266	1,95	0,0256
0,32	0,3745	0,76	0,2236	2,00	0,0228
0,33	0,3707	0,77	0,2206	2,10	0,0179
0,34	0,3669	0,78	0,2177	2,20	0,0139
0,35	0,3632	0,79	0,2148	2,30	0,0107
0,36	0,3594	0,80	0,2119	2,40	0,00820
0,37	0,3557	0,81	0,2090	2,50	0,00621
0,38	0,3520	0,82	0,2061	2,60	0,00466
0,39	0,2483	0,83	0,2033	2,70	0,00347
0,40	0,3446	0,84	0,2005	2,80	0,00256
0,41	0,3409	0,85	0,1977	2,90	0,00187
0,42	0,3372	0,86	0,1949	3,00	0,00135
0,43	0,3336	0,87	0,1922	3,50	0,000233

***t – distribucija*****Tablica B.** Kritične vrijednosti *t*-distribucije

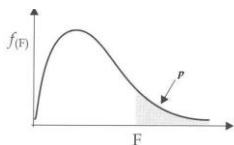
df	$t_{0,05}$	$t_{0,01}$
1	12,706	63,657
2	4,303	9,925
3	3,182	5,841
4	2,776	4,604
5	2,571	4,032
6	2,447	3,707
7	2,365	3,499
8	2,306	3,355
9	2,262	3,250
10	2,228	3,169
11	2,201	3,106
12	2,179	3,055
13	2,160	3,012
14	2,145	2,977
15	2,131	2,947
16	2,120	2,921
17	2,110	2,898
18	2,101	2,878
19	2,093	2,861
20	2,086	2,845
21	2,080	2,831
22	2,074	2,819
23	2,069	2,807
24	2,064	2,797
25	2,060	2,787
26	2,056	2,779
27	2,052	2,771
28	2,048	2,763
29	2,045	2,756
30	2,042	2,750
31	2,040	2,744
32	2,037	2,738
33	2,035	2,733
34	2,032	2,728
35	2,030	2,724
36	2,028	2,719
37	2,026	2,715
38	2,024	2,712
39	2,023	2,708
40	2,021	2,704
45	2,014	2,690
50	2,009	2,678
55	2,004	2,668
60	2,000	2,660
65	1,997	2,654
70	1,994	2,648
80	1,990	2,639
90	1,987	2,632
100	1,984	2,626
∞	1,960	2,576



F – distribucija

Tablica C. Kritične vrijednosti *F* - distribucije za razinu značajnosti 0,05
 df_1 - stupnjevi slobode u stupcima, df_2 – stupnjevi slobode u redcima

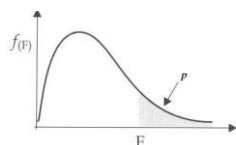
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,7	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83



F – distribucija

Tablica C. Kritične vrijednosti F - distribucije za razinu značajnosti 0,05 (nastavak 1)
 df_1 - stupnjevi slobode u stupcima df_2 – stupnjevi slobode u recima

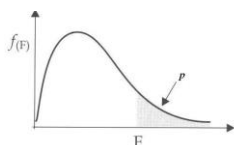
	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
2	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,20	2,23	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00



F – distribucija

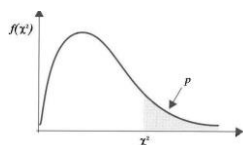
Tablica C. Kritične vrijednosti F - distribucije za razinu značajnosti 0,05 (nastavak 2)
 df_1 – stupnjevi slobode u stupcima df_2 – stupnjevi slobode u recima

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,5	3,40	3,31
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32

***F – distribucija***

Tablica C. Kritične vrijednosti *F* - distribucije za razinu značajnosti 0,05 (nastavak 3)
 df_1 - stupnjevi slobode u stupcima df_2 – stupnjevi slobode u recima

	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
2	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00



χ^2 – distribucija

Tablica D. Kritične vrijednosti χ^2 distribucije

df	$\chi^2_{0,1}$	$\chi^2_{0,05}$
1	2,70554	3,84146
2	4,60517	5,99147
3	6,25139	7,81473
4	7,77944	9,48773
5	9,23635	11,0705
6	10,6446	12,5916
7	12,0170	14,0671
8	13,3616	15,5073
9	14,6837	16,9190
10	15,9871	18,3070
11	17,2750	19,6751
12	18,5494	21,0261
13	19,8119	22,3621
14	21,0642	23,6848
15	22,3072	24,9958
16	23,5418	26,2962
17	24,7690	27,5871
18	25,9894	28,8693
19	27,2036	30,1435
20	28,4120	31,4104
21	29,6151	32,6705
22	30,8133	33,9244
23	32,0069	35,1725
24	33,1963	36,4151
25	34,5631	37,6525
26	35,5631	38,8852
27	36,7412	40,1133
28	37,9159	41,3372
29	39,0875	42,5569
30	40,2560	43,7729
40	51,8050	55,7585
50	63,1671	67,5048
60	74,3970	79,0819
70	85,5271	90,5312
80	96,5782	101,879
90	107,565	113,145
100	118,498	124,342

Tablica E. Kritične vrijednost u K-S testu

<i>n</i>	<i>p</i> =0,05	<i>p</i> =0,01
1	0,975	0,995
2	0,842	0,929
3	0,708	0,829
4	0,624	0,734
5	0,563	0,669
6	0,519	0,617
7	0,483	0,576
8	0,454	0,542
9	0,430	0,513
10	0,409	0,486
11	0,391	0,468
12	0,375	0,449
13	0,361	0,432
14	0,349	0,418
15	0,338	0,404
16	0,327	0,392
17	0,318	0,381
18	0,309	0,371
19	0,301	0,361
20	0,294	0,352
21	0,287	0,344
22	0,281	0,337
23	0,275	0,330
24	0,269	0,323
25	0,264	0,317
26	0,259	0,311
27	0,254	0,305
28	0,250	0,300
29	0,246	0,295
30	0,242	0,290
35	0,224	0,269
40	0,210	0,252
45	0,198	0,238
50	0,188	0,226
55	0,180	0,216
60	0,172	0,207
65	0,166	0,199
70	0,160	0,192
75	0,154	0,185
80	0,150	0,179
85	0,145	0,174
90	0,141	0,169
95	0,137	0,165
100	0,134	0,161

Tablica F. Kritične vrijednost koeficijenta korelacije r

$df = n-2$	$p=0,05$	$p=0,01$
3	0,878	0,959
4	0,811	0,917
5	0,754	0,874
6	0,707	0,834
7	0,666	0,798
8	0,632	0,765
9	0,602	0,735
10	0,576	0,708
11	0,553	0,684
12	0,532	0,661
13	0,514	0,641
14	0,497	0,623
15	0,482	0,606
16	0,468	0,590
17	0,456	0,575
18	0,444	0,561
19	0,433	0,549
20	0,423	0,537
21	0,413	0,526
22	0,404	0,515
23	0,396	0,505
24	0,388	0,496
25	0,381	0,487
26	0,374	0,478
27	0,367	0,470
28	0,361	0,463
29	0,355	0,456
30	0,349	0,449
35	0,325	0,418
40	0,304	0,393
45	0,288	0,372
50	0,273	0,354
60	0,250	0,325
70	0,232	0,302
80	0,217	0,283
90	0,205	0,267
100	0,195	0,254
125	0,174	0,228
150	0,159	0,208
200	0,138	0,181
300	0,113	0,148
400	0,098	0,128
500	0,088	0,115
1000	0,062	0,081

Literatura

1. Bala, G. (1986). Logičke osnove metoda za analizu podataka iz istraživanja u fizičkoj kulturi. Novi Sad: Vlastita naklada.
2. Bartlett, M.S. (1941). The statistical significance of canonical correlations. *Biometrika*, 32, 29-38.
3. Boneau, C. A. (1960). The effects of violations of assumptions underlying the t-test. *Psychological Bulletin*, 57, 49-64.
4. Cattell, R. B. (1966). The scree test for the number of factors. *Multivariate Behavioral Research*, 1, 245-276.
5. Crawford, C. B. & G. A. Ferguson (1970). A general rotation criterion and its use in ortogonal rotation. *Psychometrika*, 35 (3), 321-332.
6. Cronbach, L.J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of test. *Psychometrika*, 16, 297-334.
7. Dizdar, D. (1997). Vrednovanje jednog metodološkog postupka za prognozu rezultata u nekim sportovima. (Magistarski rad). Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
8. Dizdar, D. (1999). RTT.stb – Program za utvrđivanje metrijskih karakteristika kompozitnih mjernih instrumenata. U D. Milanović (ur.), *Zbornik radova 2. međunarodne znanstvene konferencije „Kineziologija za 21. stoljeće“*, Dubrovnik (str. 450-454). Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
9. Dizdar, D. (2002). Vrednovanje skupa metoda za procjenu stvarne kvalitete košarkaša. (Disertacija) Sveučilište u Zagrebu: Kineziološki fakultet.
10. Dizdar, D. & N. Viskić-Štalec (2002). Algorithm and program for decomposition of one set of variables from another set in Statistica. In D. Milanović & F. Prot (Eds.), *Proceedings 3rd International Scientific Conference “Kinesiology - new perspectives”*, Opatija (pp. 656-659). Zagreb: Faculty of Kinesiology.
11. Dizdar, D., N. Viskić-Štalec (2002). Algorithm and program for quantitative analysis of changes under the model of differences. 3th International scientific conference “Kinesiology new perspectives”, pp. 656-659. Opatija, Croatia, 25-29.09.2002.
12. Dizdar, D. i T. Maršić (2000). Priručnik za korištenje programskog sustava STATISTICA. Zagreb: Dizidor.

13. Durbin, J. & G.S. Watson (1951). Testing for Serial Correlation in Last Squares Regression. *Biometrika*, 37, 409 – 428; 38, 159 – 178.
14. Eckart, C. & G. Young (1936). The aproximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1(2), 211-218.
15. Fulgosi, A. (1984). Faktorska analiza. Zagreb: Školska knjiga.
16. Galton, F. (1888). Co-relations and their measurement, chiefly from anthropometric data. *Proceedings of the Royal Society* 45: 135-145.
17. Gjenereo, I. i V. Vojvodić-Rosenzweig (2000). *Linearna algebra*. Zagreb: Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika.
18. Guilford, J. P. (1968). *Osnove psihološke i pedagoške statistike*. Beograd: Savremena administracija.
19. Guliksen, H. (1950). *Theory of mental tests*. New York: Wiley.
20. Guttman, L. (1953). Image theory for the structure of quantitative variates. *Psychometrika*, 18, 277-296.
21. Harris, C. W. & H. F. Kaiser (1964). Oblique factor analytic solutions by orthogonal transformations. *Psychometrika*, 29 (4), 347-362.
22. Harman, H. H. (1960). *Modern factor analysis*. Chicago: University of Chicago Press.
23. Hotelling, H. (1931). The generalization of Student's ratio, *Annals of Mathematical Statistics*, 2, 360-378.
24. Hotelling, H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables into principal componentes. *Journal of Educational Psychology*, 24, 417-441; 498-520.
25. Hotelling, H. (1936). Relations between two sets variates. *Biometrika*, 28, 321-377.
26. Ivanković, D., J. Božikov, J. Kern, B. Kopjar, G. Luković, S. Vuletić (1989). *Osnove statističke analize za medicinare*. Zagreb: Medicinski fakultet.
27. Johnson, R. M. (1963). On a theorem stated by Eckart and Young. *Psychometrika*, 28 (1), 259-263.
28. Kaiser, H.F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, 25, 187-200.

29. Kaiser, H. F. & J. Caffrey (1965). Alpha factor analysis. *Psychometrika*, 30, 1-44.
30. Kendall, M. G. (1975). *Rank correlation methods* (4th ed.). London: Griffin.
31. Krković, A. (1978). *Elementi psihometrije 1*. Zagreb: Filozofski fakultet.
32. Krković, A., K. Momirović, B. Petz (1966). *Odabrana poglavlja iz psihometrije i neparametrijske statistike*. Zagreb: Društvo psihologa Hrvatske, Republički zavod za zapošljavanje.
33. Kolesarić, V. i B. Petz (1999). *Statistički rječnik*. Jastrebarsko: Naklada Slap.
34. Larsen, W. A., & S. J. McCleary (1972). The use of partial residual plots in regression analysis. *Technometrics*, 14, 781-790.
35. Lilliefors, H. W. (1967). On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown. *Journal of the American Statistical Association*, 64, 399-402.
36. Lord, F. M. (1958). Same relations between Guttman's principal components of scale analysis and other psychometric theory. *Psychometrika* 23,291-296.
37. Lužar, V. (1976). *Utjecaj raspona i razdiobe pogreške na određivanje broja značajnih glavnih komponenata*. (Magistarski rad). Zagreb: Elektrotehnički fakultet.
38. Marušić, M., M. Petrovečki, J. Petrak, A. Marušić (2000). *Uvod u znanstveni rad u medicini* (2. izd.). Zagreb: Medicinska naklada.
39. Mejovšek, M. (2003). *Uvod u metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima*. Jastrebarsko: Naklada Slap.
40. Milas, G. (2005). *Istraživačke metode u psihologiji i drugim društvenim znanostima*. Jastrebarsko: Naklada Slap.
41. Momirović, K. (1977). Dvije alternativne definicije homogenosti mjernog instrumenta. *Psihologija*, 1, 87-90.
42. Momirović, K. (1984). *Kvantitativne metode za programiranje i kontrolu treninga*. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
43. Momirović, K., J. Štalec, F. Prot, K. Bosnar, N. Viskić-Štalec, L. Pavičić, V. Dobrić (1984). *Kompjuterski programi za klasifikaciju, selekciju, programiranje i kontrolu treninga*. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.

44. Momirović, K., F. Prot, D. Dugić, Z. Knezović, K. Bosnar, N. Erjavec, M. Gredelj, J. Kern, V. Dobrić, J. Radaković (1987). Metode, algoritmi, i programi za analizu kvantitativnih i kvalitativnih promjena. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
45. Momirović, K., B. Wolf i D. Popović (1999). Uvod u teoriju mjerenja: Interne mjerne karakteristike kompozitnih testova. Priština: Fakultet za fizičku kulturu Univerziteta u Prištini.
46. Momirović, K., J. Štalec i E. Zakrajšek (1973). Primjena generaliziranih image transformacija u analizi relacija skupova varijabli. *Kineziologija*, 3(2), 45-56.
47. Momirović, K. i M. Gredelj (1980). Primjena elektroničkih računala u određivanju metrijskih karakteristika i izračunavanju testovnih rezultata. Zagreb: Društvo psihologa Hrvatske.
48. Momirović, K., M. Gredelj i L. Sirovicza (1977). Multivarijatna analiza. Zagreb: ZPN.
49. Mraković, M. (1992). Uvod u sistematsku kineziologiju. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
50. Nunnally, J. C. (1967). *Psychometric theory*. New York: McGraw-Hill.
51. Pauše, Ž. (1993). Uvod u matematičku statistiku. Zagreb: Školska knjiga.
52. Pavić, I. (1970). Statistička teorija i primjena. Zagreb: Tehnička knjiga.
53. Pearson, E.S. (1939). Student as a statistician, *Biometrika*, 30, 210-250.
54. Pearson, K. (1894). Contributions to the mathematical theory of evolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A*, 185, 71-110.
55. Petz, B. (1997). Osnovne statističke metode za nematematičare. Jastrebarsko: Naklada Slap.
56. Prot, F. (1996). Metode, modeli i algoritmi za analizu kvalitativnih promjena pod utjecajem kinezioloških transformacijskih operatora. (Disertacija) Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu Sveučilišta u Zagrebu.
57. Rao, C. R. (1951). An asymptotic expansion of the distribution of Wilks' criterion. *Bulletin of the International Statistical Institute*, 33, 177-181.
58. Rao, C. R. (1952). *Advanced statistical methods in biometric research*. New York: Wiley.

59. Rao, C. R. (1965). Linear statistical inference and its applications. New York: Wiley.
60. Simonić, A. (1999). Znanost - najveća avantura i izazov ljudskog roda. Rijeka: Vitagraf.
61. Spearman, C. (1904). General intelligence, objectively determined and measured. American Journal of Psychology, 15: 201-293
62. Student (1908). The Probable Error of Mean. Biometrika, 6, 1-25.
63. Šošić, I. (2004). Primijenjena statistika. Zagreb: Školska knjiga.
64. Šošić, I. i V. Sedar (1992). Uvod u statistiku. Zagreb: Školska knjiga.
65. Štalec, J. i K. Momirović (1971). Ukupna količina valjane varijance kao osnov kriterija za određivanje broja značajnih glavnih komponenata. Kineziologija, 1(1), 79-81.
66. Thurstone, L. L. (1931). Multiple factor analysis. Psychological Review, 38, 406-427.
67. Thurstone, L. L. (1938). Primary mental abilities. Chicago: University of Chicago.
68. Thurstone, L. L. (1947). Multiple factor analysis. Chicago: University of Chicago.
69. Vasilj, Đ. (2000). Biometrika i eksperimentiranje u bilnogojstvu. Zagreb: Hrvatsko agronomsko društvo.
70. Viskić - Štalec, N. (1991). Elementi faktorske analize. Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
71. Viskić-Štalec, N.(1987). Usporedba različitih komponentnih i faktorskih tehnika u određivanju latentnih motoričkih dimenzija. (Disertacija) Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu Sveučilišta u Zagrebu.
72. Viskić-Štalec, N. (1997). Osnove statistike i kineziometrije. U D. Milanović (ur.), Priručnik za sportske trenere (str. 349-432). Zagreb: Fakultet za fizičku kulturu.
73. Yule, G. U. (1897). On the theory of correlation. Journal of the Royal Statistical Society, 60, 812-854.

Kazalo pojmova

A

alternativna hipoteza, 136
analiza čestica, 272
analiza kovarijance, 213
analiza varijance (ANOVA), 150
antiimage varijabla, 294
apriorna valjanost, 308
apsolutna nula, 265
aritmetička sredina, 64
autokorelacija, 208

B

Bartlettov χ^2 -test, 244
binomna distribucija, 100
bruto rezultat, 276

C

centralni granični teorem, 127
centroid, 247, 254
Cochran-Coxova metoda, 42
Cronbachov koeficijent pouzdanosti, 288

D

deskriptivna statistika, 41
deskriptivni pokazatelji, 63
determinanta matrice, 24
dijagnostička valjanost, 308
dijagonalna matrica, 15
direktno mjerenje, 261
diskretna varijabla, 48
diskretne distribucije, 99
diskriminacijska analiza, 251
diskriminacijska funkcija, 252
distribucija frekvencija, 58
donja granica pouzdanosti, 300
Durbin-Watsonov test, 209

E

eksplorativna primjena, 218
elementarni događaj, 91
empirijske distribucije, 90
entitet, 45
euklidska udaljenost, 22

F

faktorska analiza, 214
faktorska valjanost, 309
faktorski model, 218
F-distribucija, 109

G

generalne image transformacije, 212
generalni linearni model, 217

GK-kriterij, 224

gornja granica pouzdanosti, 300
grafikon redaka, 55
grafikon stupaca, 55
grupiranje podataka, 52
Guttman-Nicewanderov koef. pouzd., 299
Guttmanov model mjerenja, 293

H

Hadamarovo množenje, 19
Harrisova metrika, 298
 χ^2 - distribucija, 110
hipoteze, 135
histogram frekvencija, 59
homogenost, 302
Hotellingova T^2 - vrijednost, 250

I

image torija, 293
image varijabla, 294
indeks korelacije, 169
indeks lakoće (težine), 272
indirektno mjerenje, 261
inferencijalna statistika, 42, 135
interkvartil, 76
interval razreda, 60
intervalna skala, 265
intervalni uzorak, 47
inverz matrice, 27

J

jednadžba pravca, 186
jednodimenzionalno grupiranje, 53
jednostavna linearna kombinacija, 24
jednostavna sumacija, 284
jednostavni slučajni uzorak, 46
jednostavna struktura, 228

K

Kaiser-Caffreyev koef. pouzdanosti, 291
kanonička analiza, 238
kanonička korelacija, 240
kanonički faktori, 239
karakteristična jednadžba, 221
kefijent determinacije, 168
kineziološka informatika, 9
kineziološka metodologija, 9
kineziološka statistika, 9
kineziometrija, 9, 260
klasični model mjerenja, 275
kodiranje podataka, 52
koeficijent kanoničke diskriminacije, 256

koeficijent kvartilne devijacije, 76
koeficijent pouzdanosti, 281
koeficijent varijabilnosti, 85
kofaktori, 25
Kolmogorov-Smirnovljevi test, 111
komparativne metode, 43
komponenta pogreške mjerenja, 276
komponentni model, 218, 219
kompozitni mjerni instrument, 270
komunaliteti, 227
konfirmativna primjena, 218
kontinuirana varijabla, 48
kontinuirane distribucije, 104
korelacija, 160
korelacijski dijagram, 168
kosokutni equamax, 234
kosokutni varimax, 234
kriterijska varijabla, 185
kritična t-vrijednost, 141
kumulativne frekvencije, 61
kvadratna matrica, 14
kvalitativna varijabla, 48
kvantitativna varijabla, 48
kvantitativne metode, 9

L

latentna varijabla, 48
latentne dimenzije, 215
leptokurtična distribucija, 89
linearna kombinacija, 23

M

Mahalanobisova distanca, 250
manifestne varijable, 48, 215
matrica, 12
matrica glavnih osovina, 223
matrica identiteta, 15
matrica podataka, 49
matrica sklopa, 233
matrica strukture, 233
matrična algebra, 12
medijan, 72
metoda glavnih komponenta, 218, 219
metoda interne konzistencije, 283
metoda tau-ekvivalentnih formi, 283
metoda test-retest, 283
metode za klasifikaciju, 43
metode za utvrđivanje razlika, 43
metode za utvrđivanje relacija, 43
metodologija, 9
metrijske karakteristike, 274
mezokurtična distribucija, 89
minori, 25
mjere asimetrije distribucije, 86
mjere centralne tendencije, 63

mjere izduženosti distribucije, 88
mjere varijabilnosti, 74
mjerenje, 261
mjerilac, 263
mjerne skale, 263
mjerni instrument, 267
množenje matrica, 17
množenje matrice skalarom, 19
mod, 70
model najmanjih kvadrata, 186
Momirovićeva donja granica pouzd., 300
multipla korelacija, 203
multivarijatna analiza varijance, 246
multivarijatne metode, 43

N

namjerni uzorak, 46
negativno asimetrična distribucija, 87
neortogonalna rotacija, 232
neparametrijske metode, 42
nepotpuna negativna korelacija, 168
nepotpuna pozitivna korelacija, 167
nesingularna matrica, 30
nesistematske pogreške, 274
nestandardizirani reg. koef., 190, 201
nezavisna varijabla, 48, 185
nominalna skala, 263
norma vektora, 20
normalna (Gaussova) distribucija, 104
normirani vektor, 21
normiranje, 21
nulta hipoteza, 136

O

objekt mjerenja, 262
objektivnost, 301
oblimin, 234
obliparsifakt, 234
obliparsimax, 234
oduzimanje matrica, 16
omjerna skala, 266
ordinalna skala, 264
ortogonalna matrica, 31
ortogonalna rotacija, 229
ortonormirana matrica, 31
osjetljivost, 306

P

paralelni testovi, 275
parametrijske metode, 42
parcijalna korelacija, 170
parcijalni koeficijent determinacije, 203
PB-kriterij, 224
Pearsonov koeficijent korelacije, 161
platikurtična distribucija, 89

podatak, 44
 pogreška tipa I (alfa), 136
 pogreška tipa II (beta), 136
 Poissonova distribucija, 102
 poligon frekvencija, 59
 populacija (univerzum) varijabli, 49
 populacija entiteta, 45
 potpuna negativna korelacija, 165
 potpuna pozitivna korelacija, 165
 pouzdanost, 274
 pozitivno asimetrična distribucija, 87
 pragmatička valjanost, 311
 pravi rezultat, 276
 pravilo kombinacija, 97
 pravilo množenja, 91
 pravilo permutacija, 92
 pravilo varijacija, 95
 prediktorska varijabla, 185
 predmet mjerenja, 262
 prigodni uzorak, 46
 princip parsimonije, 214
 produkt-moment koef. korelacije, 161
 prognozirana suma kvadrata, 193
 prostor elementarnih događaja, 91
 prvi (donji) kvartil, 76
 pseudoinverz matrice, 31

R

rang matrice, 32
 redundancija, 242
 regresijska analiza, 182
 regresijska funkcija, 183
 regularna matrica, 30
 relativna frekvencija, 54
 relativne rezidualne vrijednosti, 191
 rezidualna suma kvadrata, 193
 rezidualne vrijednosti, 191

S

sampling distribucija, 125
 scree plot, 226
 scree test, 226
 silazno sortiranje, 56
 simetrična matrica, 14
 singularna matrica, 30
 sistematske pogreške, 274
 skalarna matrica, 15
 slučajni uzorak, 46
 sortiranje podataka, 56
 Spearman-Brownov koef. pouzd., 286
 spektralna dekompozicija, 221
 split-half metoda, 289
 središnje mjere, 63
 standardna pogreška mjerenja, 282
 standardizacija podataka, 114

standardizirani diskrimin. koef., 253
 standardizirani regresijski koef., 202
 standardna devijacija, 77
 standardna pogreška aritm. sredine, 128
 standardna pogreška prognoze, 193
 standardna pogreška razlika, 139
 statistički značajna razlika, 137
 statistika, 40
 stratificirani uzorak, 47
 struktura kanoničkih faktora, 241
 strukturni krug, 56
 supresori, 203
 svojstvene vrijednosti, 35
 svojstveni vektori, 35

T

tablica podataka, 51
 t-distribucija, 107
 teoretske distribucije, 90
 teorija vjerojatnosti, 91
 totalni raspon rezultata, 57, 76
 trag matrice, 20
 transponirana matrica, 14
 treći (gornji) kvartil, 76
 t-test, 137
 t-test za nezavisne uzorke, 137
 t-test za zavisne uzorke, 145

U

ukupna suma kvadrata, 193
 uniformna distribucija, 99
 unikviteti, 227
 univarijatna analiza varijance, 150
 univarijatne metode, 42
 uzlazno sortiranje, 56
 uzorak entiteta, 46
 uzorak varijabli, 49

V

valjanost, 308
 varijabla, 47
 varijanca, 77
 varijanca rezidualnih rezultata, 193
 varimax, 230
 vektor, 13
 vektor retka, 13
 vektor stupca, 13
 višedimenzionalno grupiranje, 53
 vjerojatnost, 98

Z

zavisna (kriterijska) varijabla, 48, 185
 zbrajanje matrica, 16
 z-vrijednost, 114

Pojmovnik

A

1. **analiza kovarijance** (engl. *analysis of covariance*, ANCOVA) - analiza varijance ili diskriminacijska analiza izvedena tako da se iz analiziranog skupa varijabli parcijalizira utjecaj nekog drugog skupa varijabli koji ima logički status smetnji (Momirović, Gredelj i Sirovicza, 1977).
2. **analiza čestica** (engl. *item analysis*) - postupci kojima se procjenjuje težina (npr. indeksom lakoće) i valjanost (npr. prosječnom korelacijom između čestica) čestica kako bi se došlo do konačnog oblika testa.
3. **apriorna valjanost** (engl. *a priori validity*) - oblik dijagnostičke valjanosti kod koje se zaključivanje o predmetu mjerenja temelji na logičkoj analizi postupka mjerenja i testovnog sadržaja koji dovodi do odgovarajuće reakcije ispitanika, što može sugerirati aktiviranje neke hipotetske latentne dimenzije (predmeta mjerenja). Apriorna valjanost nije proizvod eksperimentalne provjere, pa se obično koristi za postavljanje hipoteze o predmetu mjerenja koja se potvrđuje ili opovrgava eksperimentalnom provjerom.
4. **apsolutna nula** (engl. *absolute zero point*) - potpuna odsutnost mjerenog svojstva.
5. **aritmetička sredina** ili prosječna vrijednost (engl. *mean*) - mjera centralne tendencije koja se izračunava kao omjer zbroja svih vrijednosti neke varijable i ukupnog broja entiteta.

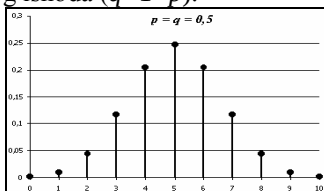
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ gdje je } i = 1, \dots, n, \text{ a } n \text{ predstavlja broj entiteta.}$$

B

6. **binomna distribucija** (engl. *binomial distribution*) - diskretna teoretska distribucija. Slučajna varijabla x ima binomnu distribuciju s parametrima n i p ako je

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x},$$

gdje je $f(x)$ vjerojatnost x za uspješne ishode od n svih mogućih ishoda koje može imati slučajna varijabla x , p vjerojatnost uspješnog ishoda, a q vjerojatnost neuspješnog ishoda ($q=1-p$).



Binomna distribucija za $n = 10$ i $p = q = 0,5$

7. **bruto rezultat** (engl. *raw score*) - ispitanikov rezultat izravno dobiven mjerenjem.
8. **Bartlettov χ^2 -test** (engl. *Bartlett chi-square test*) - test kojim se utvrđuje statistička značajnost koeficijenata kanoničke korelacije.

C

9. **centroid** (engl. *centroid*) - vektor aritmetičkih sredina.
10. **Cohan-Coxova metoda** (engl. *Cohan-Cox method*) - metoda kojom se utvrđuje statistička značajnost razlika aritmetičkih sredina kada se varijance uzoraka statistički značajno razlikuju te kada uzorci nisu podjednake veličine ni sličnih distribucija.
11. **Cronbachov koeficijent pouzdanosti** (engl. *Cronbach's alpha*) - koeficijent pouzdanosti koji se izračunava u okviru metode interne konzistencije pod klasičnim modelom mjerenja kada se kondenzacija (procjena pravih rezultata) izvodi metodom jednostavne sumacije (zbrojem ili aritmetičkom sredinom) originalnih rezultata ispitanika u česticama.

$$r_{tt} = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2}{\sigma^2} \right)$$

gdje je m broj čestica, σ_j^2 varijanca rezultata entiteta u čestici j , σ^2 varijanca rezultata entiteta testa koji su dobiveni zbrojem rezultata entiteta u svim česticama.

D

12. **deskriptivna statistika** (engl. *descriptive statistics*) - statistički postupci grupiranja i grafičkog prikazivanja podataka te izračunavanja različitih statističkih pokazatelja kojima se opisuje promatrana pojava (mjere centralne tendencije ili središnje mjere, mjere varijabilnosti ili disperzije, mjere asimetrije i zakrivljenosti distribucije...). Zaključci dobiveni u okviru deskriptivne statistike odnose se isključivo na promatranu grupu ispitanika (uzorak).
13. **deskriptivni pokazatelji** (engl. *descriptive parameters*) - statistički pokazatelji kojima se opisuju varijable. To su mjere: centralne tendencije, disperzije te oblika distribucije.
14. **dijagnostička valjanost** (engl. *diagnostic validity*) - metrijska karakteristika kojom se utvrđuje što određeni test mjeri, odnosno koji mu je predmet mjerenja. Prema načinu utvrđivanja, moguće je razlikovati dva osnovna tipa dijagnostičke valjanosti. To su *apriorna* i *faktorska* valjanost.
15. **direktno mjerenje** (engl. *direct measurement*) - mjerenje u kojemu predmet mjerenja i mjerna jedinica imaju ista svojstva. Mjeri se uspoređivanjem

mjerenog svojstva s određenom veličinom tog istog svojstva koja se dogovorom odredi kao jedinica mjere (npr. metar, milja, kilogram i sl.).

16. **diskretna varijabla** (engl. *discrete variable*) - kvantitativna varijabla kod koje su vrijednosti mjerenog svojstva određene cijelim brojem. Dobiva se postupkom prebrojavanja (npr. broj sklekova, broj skokova u obrani i napadu...).
17. **diskriminacijska analiza** (engl. *discriminant analysis*) - multivarijatna metoda kojom se utvrđuje statistička značajnost razlika među više grupa entiteta mjerenih u više varijabli, pri čemu se utvrđuje koliko se grupe međusobno razlikuju i koliko pojedine varijable pridonose toj razlici, a moguće je i prognozirati pripadnost pojedinog entiteta grupi.
18. **diskriminacijska funkcija** (engl. *discriminant function*) - latentna varijabla koja se dobije linearnom kombinacijom manifestnih varijabli u okviru diskriminacijske analize i to tako da maksimalno razlikuje analizirane grupe entiteta.
19. **distribucija frekvencija** (engl. *frequency distribution*) - uređeni niz kvantitativnih vrijednosti s pripadajućim frekvencijama.
20. **Durbin-Watsonov test** (engl. *Durbin-Watson test*) - test za testiranje (utvrđivanje statističke značajnosti) autokorelacija rezidualnih odstupanja prvog reda.

E

21. **elementarni događaj** - svaki od n mogućih ishoda nekog eksperimenta, odnosno *realizacije nekog slučajnog događaja* (primjerice, bacanje na koš s linije slobodnih bacanja, bacanje igraće kocke, bacanje novčića...).
22. **empirijska distribucija** (engl. *empirical distribution*) - distribucija eksperimentalno prikupljenih podataka.
23. **entitet** (engl. *entity*) - jedinka nekog skupa osoba, objekata, stvari, pojava, procesa itd., nositelj informacija koje je moguće prikupiti nekim postupkom mjerenja. U kineziološkim istraživanjima entiteti su najčešće ljudi, ali mogu biti i sportske ekipe, tehnički elementi, zadaci u igri itd.
24. **euklidska udaljenost** (engl. *euclidean distance*) - udaljenost između dva vektora ($\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$) istog reda koja se izračuna kao norma razlike dvaju vektora.

$$d = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \left[(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \right]^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$$

F

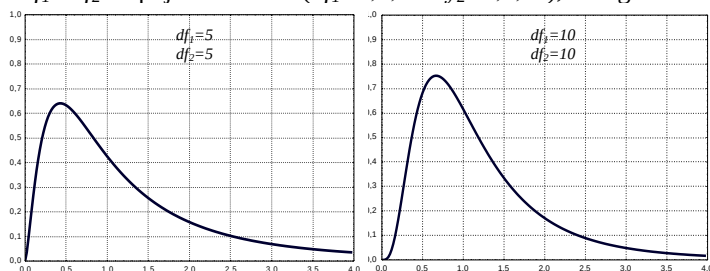
25. **faktorska analiza** (engl. *factor analysis*) - zajedničko ime za više metoda kojima je zajednički cilj kondenzacija većeg broja manifestnih varijabli, među kojima postoji povezanost (korelacija), na manji broj latentnih dimenzija ili faktora. **Manifestne varijable** dobivene su mjerenjem, dok **latentne dimenzije**

nisu izravno mjerljive postojećim mjernim instrumentima, već se dobivaju linearnom kombinacijom manifestnih varijabli.

26. **faktorska valjanost** (engl. *factor validity*) - oblik dijagnostičke valjanosti kod koje se eksperimentalno (faktorskom analizom) utvrđuje što je predmet mjerenja određenog mjernog instrumenta, odnosno, u kojoj mjeri svaki od njegovih faktora uvjetuje varijabilnost dobivenih rezultata.
27. **F-distribucija** (engl. *F-distribution*) - kontinuirana teoretska distribucija. Slučajna kontinuirana varijabla F ima F-distribuciju s parametrom df_1 i df_2 ako je

$$f(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{df_1 + df_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{df_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{df_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{df_1}{df_2}\right)^{\frac{df_1}{2}} \cdot \frac{F^{(df_1/2)-1}}{\left(1 + \frac{df_1}{df_2} F\right)^{(df_1+df_2)/2}}$$

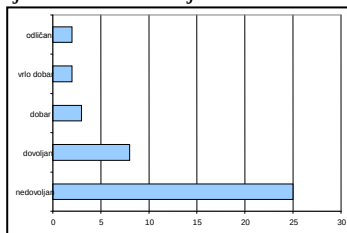
gdje su df_1 i df_2 stupnjevi slobode ($df_1=1,2,...$ i $df_2=1,2,...$), a Γ gama funkcija.



F-distribucija za $df_1 = 5$, $df_2 = 5$ i za $df_1 = 10$, $df_2 = 10$

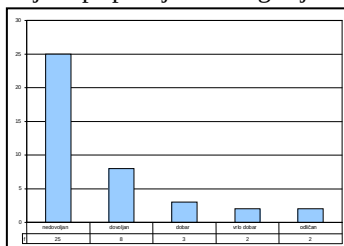
G

28. **GK-kriterij** (engl. *Guttman-Kaiser criterion*) - kriterij za odabir značajnog broja glavnih komponenta. Prema GK-kriteriju značajanima se smatraju samo one komponente čija je svojstvena vrijednost (varijanca) veća od ili je jednaka jedan.
29. **grafikon retka** (engl. *horizontal bar/column graph*) - površinski grafikon koji se crta u pravokutnom koordinatnom sustavu. Na osi y nalaze se kategorije, a na osi x nalaze se frekvencije. Pravokutnici su jednakih osnovica (visina), a duljina im je određena pripadajućom frekvencijom.



Grafikon retka

30. **grafikon stupca** (engl. *vertical bar/column graph*) - površinski grafikon koji se crta u pravokutnom koordinatnom sustavu. Na osi x nalaze se kategorije, a na osi y nalaze se frekvencije. Pravokutnici su jednakih osnova (širina), a visina im je određena frekvencijom pripadajuće kategorije.



Grafikon stupca

31. **grupiranje podataka** (engl. *clustering data*) - statistički postupak razvrstavanja entiteta s istim oblikom obilježja u određeni broj disjunktivnih podskupova (podskupovi koji nemaju zajedničkih članova).
32. **grupni uzorak** (engl. *cluster sample*) - formira se tako da se iz neke populacije slučajnim izborom biraju cijele grupe (npr. ako se istražuje srednjoškolska populacija u nekoj državi, slučajnim izborom bira se uzorak škola, a svi učenici škola koje su odabrane čine uzorak entiteta).
33. **Guttmanov model mjerenja** - izveden je iz *Guttmanove image teorije* (Guttman, 1953) te dopušta izračunavanje pravih rezultata i pogrešaka u česticama nekog kompozitnog mjernog instrumenta. Izračunavanje ukupnog rezultata u nekom testu pod ovim modelom ima u najgorem slučaju jednaku ili veću pouzdanost od one koja se postiže pod klasičnim modelom mjerenja nekog kompozitnog mjernog instrumenta metodom interne konzistencije (Momirović i sur., 1999).
34. **Guttman-Nicewanderov koeficijent pouzdanosti** (engl. *Guttman-Nicewander's reliability coefficient*) - koeficijent pouzdanosti koji se izračunava u okviru metode interne konzistencije pod Guttmanovim modelom mjerenja kada se ukupan rezultat u nekom kompozitnom testu odredi kao prva glavna komponenta čestica transformiranih u Harrisovu metriku.

$$\lambda_6 = 1 - \frac{1}{\delta}$$

gdje je δ prva svojstvena vrijednost matrice kovarijanci varijabli - čestica transformiranih u *Harrisovu metriku*.

H

35. **Harrisova metrika** (engl. *Harris metrics*) - matricu standardiziranih rezultata entiteta u česticama nekog kompozitnog mjernog instrumenta transformiramo u *Harrisovu metriku* operacijom

$$H = Z U^{-1},$$

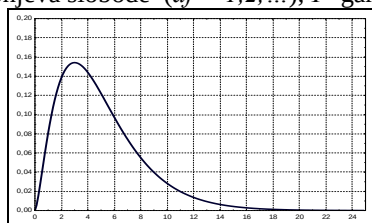
gdje je $\mathbf{U}^2 = (\text{diag} \mathbf{R}^{-1})^{-1}$ matrica uniknih dijelove varijanci svake čestice s preostalim varijablama iz promatranog skupa. Harrisova ili univerzalna metrika invarijantna je na promjene u skaliranju varijabli te predstavlja najpovoljniji oblik transformacije rezultata u česticama nekog testa jer optimalno ponderira rezultate u česticama (proporcionalno faktorskoj valjanosti čestica), čime se ukupni rezultat u testu izračunava s maksimalnom pouzdanošću (Momirović i sur., 1999).

36. **hipoteza** (engl. *hypothesis*) - pretpostavka koja se provjerava pomoću odgovarajućeg statističkog testa, pri čemu se odluka o prihvatanju ili neprihvatanju nulte/alternativne hipoteze donosi uz određenu pogrešku. Nulta hipoteza se postavlja niječno (primjerice, nije nađena statistički značajna razlika između aritmetičkih sredina grupe A i B), dok se alternativna hipoteza suprotstavlja (proturječi) nultoj hipotezi (primjerice, razlika između aritmetičkih sredina grupe A i B statistički je značajna).

37. **χ^2 -distribucija** (engl. *chi-square distribution*) - kontinuirana teoretska distribucija. Slučajna varijabla x ima χ^2 -distribuciju s parametrom df ako je

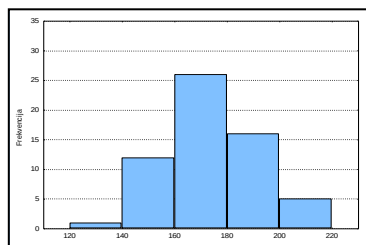
$$f(x) = \frac{1}{2^{df/2} \Gamma(df/2)} x^{df/2-1} e^{-x/2},$$

gdje je df broj stupnjeva slobode ($df = 1, 2, \dots$), Γ gama funkcija, $e = 2,71828$.



χ^2 - distribucija za broj stupnjeva slobode $df=5$

38. **histogram frekvencija** (engl. *frequency histogram*) - površinski grafički prikaz distribucije frekvencija crta se tako da osnovicu pravokutnika određuje interval razreda, a visinu frekvencija pojedinog razreda.



Histogram frekvencija s 5 razreda

39. **homogenost** (engl. *homogeneity*) - metrijska karakteristika koja pokazuje koliko rezultati ispitanika u svim česticama zavise od istog predmeta mjerenja ili identične kombinacije različitih predmeta mjerenja.

40. **Hotellingov T^2 test** (engl. *Hotelling's T^2 test*) - multivarijatni test kojim se utvrđuje statistička značajnost razlika između dviju grupa. Bazira se na multivarijatnom testiranju razlika između aritmetičkih sredina dviju grupa na osnovi matrice unutargrupnih kovarijanci.

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} d^2$$

gdje je $d^2 = (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)$ euklidska udaljenost između vektora aritmetičkih sredina (centroida) prve i druge grupe, $\mathbf{m}_1$ i $\mathbf{m}_2$ centriodi prve i druge grupe, $\mathbf{C}$ zajednička matrica kovarijanci, n_1 i n_2 broj entiteta u prvoj i drugoj grupi. Zbog složenosti distribucija T^2 -vrijednosti transformira se formulom (Rao, 1952)

$$F = \frac{n_1 + n_2 - m - 1}{m(n_1 + n_2 - 2)} T^2$$

koja ima F-distribuciju sa stupnjevima slobode $df_1 = m$ i $df_2 = (n_1 + n_2 - m - 1)$, pomoću koje je moguće testirati statističku značajnost razlika tih dviju grupa.

I

41. **indirektno mjerenje** (engl. *indirect measurement*) - mjerenje u kojem predmet mjerenja i mjerna jedinica nemaju ista svojstva (npr. mjerenje električnog napona, temperature nekog objekta...). Kod indirektnog mjerenja veličina predmeta mjerenja određuje se pomoću njegova utjecaja na druge objekte koji mijenja njihova svojstva, pa je na temelju izazvanih promjena moguće odrediti veličinu mjerenog svojstva ako između predmeta mjerenja i izazvanih promjena postoji neka stalna veza (relacija, odnos).
42. **inferencijalna statistika** (engl. *inferential statistics*) - statistički postupci kojima se, na temelju rezultata dobivenih na uzorku s oslanjanjem na teoriju vjerojatnosti proširuju, zaključci na populaciju koje je uzorak reprezentant. U ovu skupinu statističkih metoda ubrajaju se *t*-test, univarijatna analiza varijance, multivarijatna analiza varijance, postupci za testiranje statističke značajnosti koeficijenta korelacije, multiple korelacije, kanoničke korelacije, regresijskih koeficijenata itd.
43. **interkvartil** (engl. *interquartile range*) - mjera varijabilnosti koja se izračunava kao razlika između trećeg i prvog kvartila, a predstavlja raspon rezultata preostalih 50% članova nakon što se izuzmu prva i zadnja četvrtina članova sortiranog niza. *Prvi kvartil* je vrijednost koja uređeni niz podataka dijeli na 1/4 članova s manjom ili jednakom vrijednosti, odnosno 3/4 članova s većom ili jednakom vrijednosti, a *treći kvartil* je vrijednost koja uređeni niz podataka dijeli na 3/4 članova s manjom ili jednakom vrijednosti, odnosno 1/4 članova s većom ili jednakom vrijednosti.
44. **intervalna skala** (engl. *interval scale*) - ima kvantitativna svojstva i kontinuitet. Osim što utvrđuju redoslijed, intervali uzduž skale su jednaki (ekvidistantni), a nulta vrijednost je određena dogovorom (primjerice, kod mjerenja temperature u

°C, nulta vrijednost je određena kao temperatura pri kojoj se smrzava voda, kod z-vrijednosti nulta vrijednost predstavlja aritmetičku sredinu).

45. **intervalni uzorak** (engl. *interval sample*) - vrsta slučajnog uzorka koji se formira tako da se svi entiteti neke populacije poredaju (npr. po abecednom redu) te da se, nakon slučajnog izbora prvog entiteta, bira svaki treći, peti, odnosno n -ti entitet. Ovaj način biranja entiteta ima karakteristike jednostavnog slučajnog uzorka ako su entiteti nesistematski poredani.

J

46. **jednostavna linearna kombinacija** (engl. *simple linear combination*) - varijabla koja je nastala zbrajanjem drugih varijabli.
47. **jednostavna sumacija** (engl. *simple summation*) - najjednostavniji način za izračunavanje ukupnog rezultata u nekom kompozitnom testu. Ukupan rezultat u testu dobije se jednostavnom linearnom kombinacijom, odnosno zbrojem rezultata entiteta u česticama.
48. **jednostavni slučajni uzorak** (engl. *simple random sample*) - formira se tako da svakom entitetu neke populacije osiguramo jednaku vjerojatnost (šansu) izbora (primjerice, uz pomoć bubnja za lota, generatora slučajnih brojeva i sl.)
49. **jednostavna struktura** (engl. *simple structure*) - ciljna solucija koja se želi dobiti faktorskom analizom, odnosno pokušaj da zajednički dio varijance (komunalitet) neke manifestne varijable objašnjava što manje značajnih faktora. Pri tom treba težiti da korelacija neke manifestne varijable s nekim faktorom bude jedan, a sa svim ostalim nula.

K

50. **Kaiser-Caffreyev koeficijent pouzdanosti** (engl. *Kaiser-Caffrey's reliability coefficient*) - koeficijent pouzdanosti koji se izračunava u okviru metode interne konzistencije pod klasičnim modelom mjerenja kada se ukupan rezultat u nekom kompozitnom testu odredi kao prva glavna komponenta čestica.

$$\alpha = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)$$

gdje je λ prva svojstvena vrijednost korelacijske matrice. Mjeru pouzdanosti za ovako izračunat ukupan rezultat u nekom kompozitnom testu predložili su Lord (1958) i, nezavisno od njega, Kaiser i Caffrey (1965) te su utvrdili da se tim načinom kondenzacije rezultata nekog kompozitnog testa postiže maksimalna pouzdanost pod klasičnim modelom mjerenja.

51. **kanonička analiza** (engl. *canonical analysis*) - multivarijatna metoda kojom se utvrđuju relacije između dvaju skupova varijabli mjerenih na istom skupu entiteta ili pak istih varijabli mjerenih na istim entitetima u dvije vremenske točke (prije i poslije nekog tretmana).

52. **kanonička korelacija** (engl. *canonical correlation*) - maksimalno moguća korelacija između faktora koji čine jedan kanonički par.
53. **kanonički faktori** (engl. *canonical factors*) - predstavljaju linearne kombinacije (kompozite) varijabli jednoga i drugog skupa. Svaki par kanoničkih faktora sastoji se od jednoga kanoničkog faktora iz prvoga i jednoga kanoničkog faktora iz drugog skupa manifestnih varijabli. Pri tome je prvi par kanoničkih faktora dobiven pod uvjetom da bude u najvećoj mogućoj korelaciji. Za svaki sljedeći par kanoničkih faktora vrijedi isto što i za prvi, ali pod uvjetom da ne smije biti u korelaciji ni s jednim prethodno izvedenim parom kanoničkih faktora. Broj parova kanoničkih faktora jednak je broju varijabli u manjem skupu.
54. **koeficijent determinacije** (engl. *determination coefficient*) - predstavlja proporciju zajedničkog varijabiliteta dviju varijabli.
 $\Delta = r^2$ gdje je r koeficijent korelacije.
Koeficijent determinacije pomnožen sa 100 daje postotak kojim se može predviđati rezultat u jednoj varijabli ako nam je poznat rezultat u drugoj varijabli.
55. **kineziološka informatika** - proučava mogućnosti primjene elektroničkih računala za analizu podataka u kineziološkim istraživanjima te u pojedinim područjima primijenjene kineziologije (Mraković, 1992).
56. **kineziološka metodologija** - predstavlja međuzavisni skup disciplina koje proučavaju principe, sustave i postupke mjerenja, prikupljanja i obrade podataka i upotrebe elektroničkih računala u rješavanju tipičnih kinezioloških problema. To su: *kineziometrija*, *kineziološka statistika* i *kineziološka informatika* (Mraković, 1992).
57. **kineziološka statistika** - proučava metode za transformaciju prikupljenih podataka u oblik koji omogućava jasnije prikazivanje i interpretaciju te testiranje postavljenih hipoteza u području kineziologije.
58. **kineziometrija** - proučava probleme mjerenja, odnosno, konstrukcije i evaluacije mjernih instrumenata za procjenu kinezioloških fenomena.
59. **klasični model mjerenja** - izveden je na pretpostavci o postojanju tzv. *paralelnih testova* (mjerni postupci koji u jednakom stupnju izazivaju i mjere isti predmet mjerenja, a to znači da imaju jednake aritmetičke sredine, standardne devijacije i interkorelacije). Klasični model mjerenja polazi od pretpostavki da su pogreške mjerenja međusobno nezavisne, da su pravi rezultati i pogreške mjerenja istog testa međusobno nezavisni te da su pravi rezultati jednog testa nezavisni od pogrešaka mjerenja u drugom testu.
60. **koeficijent kanoničke diskriminacije** - predstavlja korelaciju između diskriminacijske funkcije i binarne varijable kojom je određena pripadnost pojedinog entiteta grupi. Veći koeficijent kanoničke diskriminacije znači veće

mogućnosti razlikovanja grupa na temelju pripadajuće diskriminacijske funkcije.

61. **koeficijent pouzdanosti** (engl. *reliability coefficient*) - formalno predstavlja korelaciju između dva paralelna testa, odnosno omjer varijance pravih rezultata i varijance bruto rezultata.

$$r_{tt} = \frac{\sigma_t^2}{\sigma^2} \text{ gdje je } \sigma_t^2 \text{ varijanca pravih rezultata, a } \sigma^2 \text{ varijanca bruto rezultata.}$$

Tako definiran koeficijent ne može se izračunati jer su varijance pravih rezultata i varijance pogreške nepoznate pa se koeficijent pouzdanosti aproksimativno određuje *metodom test-retest*, *metodom tau-ekvivalentnih testova* i *metodom interne konzistencije*.

62. **koeficijent varijabilnosti** (engl. *variability coefficient*) - relativna mjera disperzije ili varijabilnosti koja pokazuje koliki postotak vrijednosti aritmetičke sredine iznosi standardna devijacija.

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 \text{ gdje je } \sigma \text{ standardna devijacija, } \bar{x} \text{ aritmetička sredina}$$

63. **Kolmogorov - Smirnovljev test** (engl. *Kolmogorov - Smirnov test*) - statistički postupak za utvrđivanje normaliteta neke empirijske distribucije. Temelji se na usporedbi empirijskih relativnih kumulativnih frekvencija i teoretskih relativnih kumulativnih frekvencija.

64. **komponentni model** (engl. *principal components*) - jedan od najčešće korištenih modela faktorske analize koji je predložio je Harold Hotelling 1933. godine. Ovim modelom se iz skupa manifestnih varijabli utvrđuju linearno nezavisne komponente na temelju nereducirane korelacijske matrice (u glavnoj dijagonali su jedinice), što omogućava objašnjenje ukupne varijance analiziranog skupa manifestnih varijabli pomoću dobivenih komponenata. Pri tome se postiže da prva ekstrahirana komponenta objašnjava maksimalno moguć dio ukupne varijance, druga maksimalno moguć dio preostale varijance itd. Takav postupak omogućava da svaka sljedeća komponenta objašnjava manju proporciju varijance od prethodno ekstrahirane komponente pa se minimalnim brojem komponenata može objasniti maksimalna količina ukupne varijance manifestnih varijabli.

65. **kompozitni mjerni instrument** (engl. *composite measuring instrument*) - mjerni instrument koji se sastoji od više čestica (pitanja, zadataka, ponovljenih mjerenja).

66. **komunalitet** (engl. *communaliti*) - dio ukupne varijance manifestne varijable koji je moguće objasniti pomoću značajnih komponenata.

67. **kontinuirana varijabla** (engl. *continuons variable*) - može poprimiti bilo koju numeričku vrijednost.

68. **korelacija** (engl. *correlation*) - povezanost dviju standardiziranih varijabli, odnosno mjera međusobne sukladnosti u variranju rezultata dviju varijabli. Izražava se koeficijentom korelacije koji pokazuje smjer i jačinu međusobne povezanosti dviju varijabli, a čija se vrijednost kreće se u intervalu od -1 do $+1$. Ako je:
- $r = 0$ nema korelacije između dviju varijabli
 - $r = +1$ potpuna pozitivna korelacija
 - $r = -1$ potpuna negativna korelacija
 - $0 < r < +1$ nepotpuna pozitivna korelacija
 - $0 > r > -1$ nepotpuna negativna korelacija.
69. **kriterijska ili zavisna varijabla** (engl. *criterion or dependent variable*) - rezultati entiteta u varijabli čije se varijacije objašnjavaju (prognoziraju) putem jedne ili više prediktorskih ili nezavisnih varijabli.
70. **kumulativne frekvencije** (engl. *cumulative frequencies*) - pokazuju koliko je entiteta (apsolutno ili relativno) kojima je vrijednost jednaka ili manja od gornje granice razreda čija je frekvencija ušla u kumulativni niz. Dobiju se tako da se frekvencije (apsolutne ili relativne) svakog sljedećeg razreda zbrajaju sa sumom frekvencija prethodnih razreda.
71. **kvantitativne metode** (engl. *quantitative methods*) - predmet u okviru kojeg se studenti na sveučilišnom diplomskom studiju Kineziološkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu poučavaju teoretskim osnovama metoda za analizu podataka (osnovne statističke metode i multivarijatne metode) i teoriji mjerenja (kineziometrija) te primjeni informatičke tehnologije (statističke aplikacije, mrežni informacijski servisi i protokoli) u području kineziologije.

L

72. **latentna dimenzija** (engl. *latent dimension*) - varijabla koja se dobije linearnom kombinacijom manifestnih varijabli.
73. **linearna kombinacija** (engl. *linear combination*) - vektor koji je nastao zbrajanjem produkata drugih vektora s pripadajućim skalarima.

M

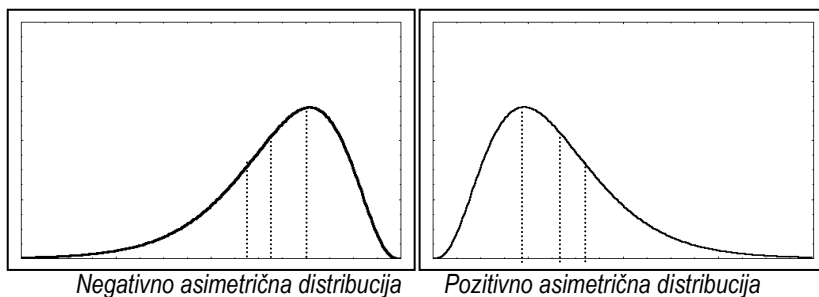
74. **Mahalanobisova distanca** (engl. *Mahalanobis distance*) - udaljenost između vektora aritmetičkih sredina (centroida) prve i druge grupe.
- $$d^2 = (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)$$
- gdje su $\mathbf{m}_1$ i $\mathbf{m}_2$ centriodi prve i druge grupe, $\mathbf{C}$ zajednička matrica kovarijanci, a n_1 i n_2 broj entiteta u prvoj i drugoj grupi.
75. **manifestna varijabla** (engl. *manifest variable*) - varijabla dobivena mjerenjem određenog obilježja nekog skupa entiteta.
76. **medijan** (engl. *median*) - mjera centralne tendencije koja uređeni niz podataka dijeli na dva jednako brojna dijela.

77. **metodologija** (engl. *methodology*) - sustav pravila na temelju kojih se provode istraživački postupci, izgrađuju teorije i obavlja njihova provjera, a cilj joj je opis i analiza temeljnih metoda što se koriste u različitim znanstvenim disciplinama, upoznavanje s njihovim prednostima i ograničenjima, pretpostavkama na kojima počivaju i mogućim ishodima njihove upotrebe (Milas, 2005).
78. **metrijske karakteristike** (engl. *metric characteristics*) - svojstva mjernog instrumenta. To su: pouzdanost, objektivnost, homogenost, osjetljivost i valjanost.
79. **mjere centralne tendencije** (engl. *measures of central tendency*) - deskriptivni pokazatelji čije je zajedničko obilježje da svaka od njih predstavlja jednu vrijednost koja bi trebala biti dobra zamjena za skup svih pojedinačnih vrijednosti, odnosno njihov najbolji reprezentant. To su: *aritmetička sredina*, *geometrijska sredina*, *harmonijska sredina*, *mod* i *medijan*. S obzirom na prirodu varijabli, u kineziološkim istraživanjima najčešće se koriste aritmetička sredina, mod i medijan, dok se ostale mjere centralne tendencije rijetko primjenjuju.
80. **mjere varijabilnosti ili disperzije** (engl. *measures of variability or dispersion*) - deskriptivni pokazatelji kojima procjenjujemo raspršenje rezultata oko neke središnje vrijednosti (najčešće aritmetičke sredine). Za opis disperzije varijabli u kineziološkim istraživanjima najčešće se koriste *totalni raspon*, *interkvartil*, *varijanca* i *standardna devijacija*.
81. **mjerjenje** (engl. *measurement*) - postupak kojim se objektima (entitetima, ispitanicima) pridružuju brojevi ili oznake prema određenim pravilima u skladu s razvijenosti mjerenog svojstva (atributa, karakteristike, obilježja) čime se postiže njegova kvantifikacija ili klasifikacija.
82. **mjerne skale** (engl. *measurement scales*) - određene su svojstvima brojčanog sustava koja određuju pravila pridjeljivanja brojeva pojavama. Ta su pravila: određivanje identiteta (nominalna skala), određivanje redoslijeda (ordinalna skala), utvrđivanje razlika (intervalna skala) i utvrđivanje omjera (omjerna skala). Ovim pravilima ujedno je određena i razina mjerenja koja je definirana dopustivim transformacijama koje skalu ostavljaju invarijatnom. Drugačije rečeno, skalu definira mogućnost manipuliranja brojčanim vrijednostima koje neće promijeniti empirijske informacije dobivene transponiranjem mjerenih pojava u vrijednost skale (Kolesarić i Petz, 1999).
83. **mjerni instrument ili test** (engl. *measuring instrument*) - odgovarajući operator pomoću kojega se određuje pozicija objekta mjerenja na nekoj mjernoj skali kojom se procjenjuje predmet mjerenja. Konačni rezultat mjernog instrumenta ukazuje na stupanj razvijenosti predmeta mjerenja.

84. **mod ili dominantna vrijednost** (engl. *mode*) - vrijednost kvalitativne ili kvantitativne varijable koja se najčešće pojavljuje, odnosno koja je najveće frekvencije.
85. **Momirovićeva donja granica pouzdanosti** – izračuna se kao omjer prve svojstvene vrijednosti matrice kovarijanci varijabli transformiranih u image metriku (δ) i prve svojstvene vrijednosti matrice korelacija između čestica (λ)
- $$\tau = \frac{\delta}{\lambda}$$
- Ako su vrijednosti ovog koeficijenta visoke, test je sigurno pouzdan, ali ako su vrijednosti ovog koeficijenta niske, test ne mora biti slabo pouzdan (Momirović i sur., 1999).
86. **multipla korelacija** (engl. *multiple correlation*) - predstavlja mjeru povezanosti skupa nezavisnih varijabli i zavisne varijable.
87. **multivarijatna analiza varijance** (engl. *multivariate analysis of variance*, MANOVA) - statistička metoda za utvrđivanje statističke značajnosti razlika dviju ili više grupa entiteta mjerenih u dvije ili više varijabli.
88. **multivarijatne metode** (engl. *multivariate methods*) - statističke metode koje se koriste za istovremenu analizu podataka dviju ili više varijabli uz uvažavanje njihova međusobna odnosa (faktorska analiza, regresijska analiza, diskriminacijska analiza...).

N

89. **asimetrična distribucija** (engl. *asymmetrical distribution*) - distribucija kod koje je grupiranje entiteta u zoni viših (negativno asimetrična distribucija) ili nižih (pozitivno asimetrična distribucija) vrijednosti.

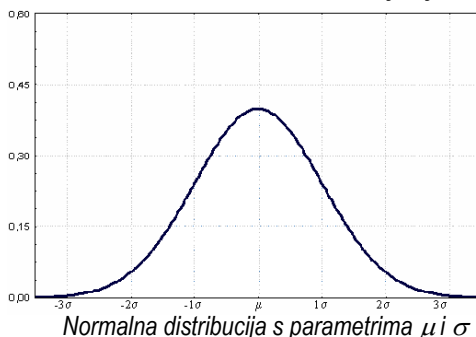


90. **neortogonalna rotacija** (engl. *non-orthogonal rotation*) - transformacija inicijalnoga koordinatnog sustava bez zadržavanja ortogonalnosti između faktora.

91. **neparametrijske metode** (engl. *non-parametric methods*) - koriste se za obradu podataka prikupljenih na kvalitativnim mjernim ljestvicama, koji imaju distribucije značajno različite od normalne. Kod takvih podataka nije moguće utvrđivati statističke parametre (aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju) te se stoga i zovu neparametrijske metode. U tu kategoriju metoda ubrajaju se: χ^2 -test, Wilcoxonov test, medijan test, rang korelacija itd.
92. **nesistematske pogreške** (engl. *non-sistematic errors*) - pogreške mjerenja koje uzrokuju slučajne varijacije rezultata mjerenja te smanjuju njegovu pouzdanost.
93. **nestandardizirani regresijski koeficijent** (engl. *non-standardized regression coefficient*) - predstavlja prosječnu veličinu promjene vrijednosti zavisne varijable za jedinični porast vrijednosti nezavisne varijable x_j , uz uvjet da su vrijednosti preostalih nezavisnih varijabli konstantne.
94. **nezavisna ili prediktorska varijabla** (engl. *independent or predictor variable*) - varijabla na temelju koje se objašnjavaju varijacije zavisne varijable.
95. **nominalna skala** (engl. *nominal scale*) - nema kvantitativna svojstva ni kontinuitet, već se entiteti razvrstavaju u određene kategorije ili klase, pri čemu se vodi računa da su klase definirane jednoznačno, odnosno da svaki entitet može pripadati samo jednoj klasi. Rezultat mjerenja je frekvencija objekata koji pripadaju određenoj klasi (npr. muško-žensko, položili-pali itd.).
96. **normalna (Gaussova) distribucija** (engl. *normal distribution*) - kontinuirana teoretska distribucija. Slučajna varijabla x ima normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2 ako je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

gdje je μ aritmetička sredina, σ standardna devijacija, $\pi = 3.144...$, $e = 2,718...$



O

97. **objekt mjerenja** (engl. *measurement object*) - nositelj informacija koje je moguće prikupiti nekim postupkom mjerenja, a kojima se može opisati stanje nekog entiteta. U kineziološkim istraživanjima objekti mjerenja najčešće su ljudi, ali mogu biti i sportske ekipe, tehnički elementi itd.

98. **objektivnost** (engl. *objectivity*) - mjerna karakteristika kojom se određuje nezavisnost rezultata mjerenja od mjerioca. Postupak mjerenja smatra se objektivnim ako različiti mjerioci, mjereći iste ispitanike, dolaze do istih rezultata. Što je veći stupanj slaganja između rezultata ispitanika koje su dobili različiti mjerioci, to je objektivnost mjerenja veća.
99. **omjerna skala** (engl. *ratio scale*) - uza sva svojstva intervalne mjerne skale, ima još i apsolutnu nulu (potpuna odsutnost mjenog svojstva), odnosno, rezultati su izraženi od nulte vrijednosti pa jednaki brožani odnosi (omjeri) znače i jednake odnose u mjerenoj pojavi (npr. mjerenje duljine, sile, vremena potrebnog za izvođenje neke aktivnosti).
100. **ordinalna skala** (engl. *ordinal scale*) - pored toga što određuje pripadnost pojedinih objekata nekoj klasi (nominalna skala), određuje i njihov redoslijed, ali razlike između pojedinih klasa (vrijednosti) nisu jednake. Dakle, njome je moguće utvrditi je li neki objekt bolji od drugoga, ali ne i koliko je bolji (npr. redoslijed trkača na cilju neke utrke, školske ocjene itd).
101. **ortogonalna rotacija** (engl. *orthogonal rotation*) - transformacija inicijalnoga koordinatnog sustava uz zadržavanje ortogonalnosti između faktora.
102. **osjetljivost** (engl. *sensitivity*) - predstavlja svojstvo mjernog instrumenta da uspješno razlikuje ispitanike po predmetu mjerenja.

P

103. **paralelni testovi** (engl. *parallel tests*) - mjerni postupci koji u jednakom stupnju izazivaju i mjere isti predmet mjerenja, a to znači da imaju jednake aritmetičke sredine, standardne devijacije i interkorelacije (Guliksen, 1950, prema Mejovšek, 2003).
104. **parametrijske metode** (engl. *parametrics methods*) - koriste se za obradu normalno distribuiranih podataka, prikupljenih na kvantitativnim mjernim ljestvicama, kod kojih je moguće utvrđivati statističke parametre (npr. *t*-test, univarijatna analiza varijance, multivarijatna analiza varijance, regresijska analiza itd.)
105. **parcijalna korelacija** (engl. *partial correlation*) - predstavlja stupanj povezanosti između dvije varijable iz kojega je isključen utjecaj jedne ili više ostalih varijabli.

$$r_{xy/z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}}$$

gdje je $r_{yx/z}$ koeficijent parcijalne korelacije između varijabli x i y , r_{yx} koeficijent korelacije između varijabli x i y , r_{xz} koeficijent korelacije između varijabli x i z , r_{yz} koeficijent korelacije između varijabli y i z .

106. **parcijalni koeficijent determinacije** (engl. *partial determination coefficient*) - proporcija zajedničke varijance pojedine nezavisne i zavisne varijable.

107. **PB-kriterij** (engl. *PB-criterion*) kriterij za odabiri značajnog broja glavnih komponentata. Prema PB-kriteriju značajnim komponentama smatraju se one komponente kojih je suma svojstvenih vrijednosti λ_j , poredanih po veličini, manja od Σsmc .

$$\Sigma smc = \text{trag}(\mathbf{I} - \mathbf{U}^2)$$

gdje smc (kvadrat multiple korelacije) predstavlja zajednički dio varijance svake varijable s preostalima iz promatranog skupa, $\mathbf{I}$ matrica identiteta, a $\mathbf{U}^2$ matrica uniknih dijelova varijanci svake varijable koja se izračuna operacijom

$$\mathbf{U}^2 = (\text{diag} \mathbf{R}^{-1})^{-1}$$

108. **podatak** (engl. *data*) - određena kvantitativna ili kvalitativna vrijednost kojom je opisano određeno obilježje nekog objekta, stvari, osobe, pojave, procesa..., odnosno, entiteta.

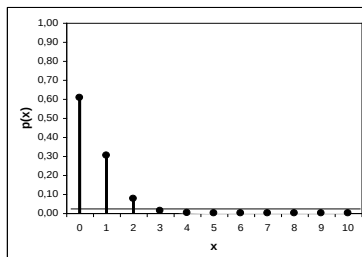
109. **pogreška tipa I ili α** (engl. *type I error or α error*) - pogreška koju činimo kad odbacimo nultu hipotezu, a ona je točna.

110. **pogreška tipa II ili β** (engl. *type II error or β error*) - pogreška koju činimo kad prihvatimo nultu hipotezu, a ona nije točna.

111. **Poissonova distribucija** (engl. *Poisson distribution*) - diskretna teoretska distribucija koja aproksimira *binomnu distribuciju* za velike vrijednosti n (npr. $n > 50$) i male vrijednosti p (npr. $p < 0,05$), pa predstavlja njen ekstremni slučaj. Naziva se i *distribucijom rijetkih događaja*. Ako se $\lambda = n \cdot p$ tretira kao konstanta, jer n teži beskonačnom ($n \rightarrow \infty$), a p nuli ($p \rightarrow 0$), onda je vjerojatnost nekog događaja x jednaka

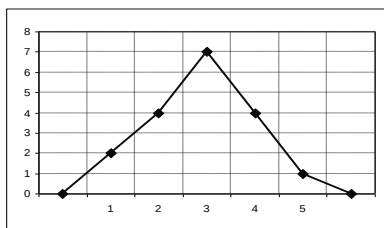
$$p_\lambda(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda},$$

gdje je $p(x)$ vjerojatnost događaja $x = 0, 1, \dots, n$, e baza prirodnog logaritma ($e = 2,71828$), $\lambda = n \cdot p$ parametar *Poissonove distribucije* (n - ukupan broj opažanja, entiteta, događaja, eksperimenata, a p - vjerojatnost povoljnog ishoda, događaja).



Poissonova distribucija za vrijednost parametra $\lambda=3$.

112. **poligon frekvencija** - linijski grafički prikaz distribucije frekvencija koji nastaje spajanjem točaka položaj kojih je u koordinatnom sustavu određen numeričkom vrijednošću obilježja i veličinom frekvencije.



Poligon frekvencija

113. **populacija (univerzum) varijabli** (engl. *population of variables*) - predstavlja skup svih mogućih varijabli kojima se može opisati stanje nekog entiteta.
114. **populacija entiteta** (engl. *population of entities*) - beskonačan ili konačan skup svih entiteta čija su obilježja predmet statističke analize.
115. **pouzdanost** (engl. *reliability*) - metrijska karakteristika koja se odnosi na točnost mjerenja, tj. na nezavisnost mjerenja od nesistematskih pogrešaka.
116. **pragmatička valjanost** (engl. *pragmatic validity*) - metrijska karakteristika koja pokazuje koliko uspješno, odnosno s kolikom sigurnošću možemo predvidjeti uspjeh u nekoj praktičnoj aktivnosti na temelju rezultata tog testa.
117. **pravi rezultat** (engl. *true scores*) - točan rezultat veličine predmeta mjerenja, a bilo bi ga moguće dobiti kada na mjerenje, osim predmeta mjerenja, ne bi utjecali i drugi faktori, odnosno kada bi mjerenje bilo potpuno pouzdano.
118. **prediktorska varijabla** (engl. *predictor variable*) - varijabla na temelju koje se objašnjavaju varijacije zavisne (kriterijske) varijable.
119. **predmet mjerenja** - određeno svojstvo koje se mjeri na objektima mjerenja.
120. **prigodni uzorak** (engl. *convenience sample*) - uzorak formiran odabirom trenutno dostupnih entiteta.
121. **prvi (donji) kvartil** (engl. *lower quartiles*) - vrijednost koja uređeni niz podataka dijeli na 1/4 članova s manjom ili jednakom vrijednosti, odnosno 3/4 članova s većom ili jednakom vrijednosti.

R

122. **regresijska analiza** (engl. *regression analysis*) - matematičko-statistički postupak kojim se utvrđuje odgovarajuća funkcionalna veza između jedne zavisne varijable i jedne ili više nezavisnih varijabli.

123. **relativna frekvencija** (engl. *relative frequency*) - izračuna se kao omjer frekvencije određene kategorije f_g i zbroja frekvencija svih kategorija n (ukupnog broja entiteta).

$$p_g = \frac{f_g}{n} ; \quad \%_g = \frac{f_g}{n} \cdot 100$$

124. **rezidualne vrijednosti** (engl. *residual values*) - odstupanja izmjerenih vrijednosti zavisne varijable y_i od prognoziranih vrijednosti y_i' .

$$e_i = y_i - y_i'$$

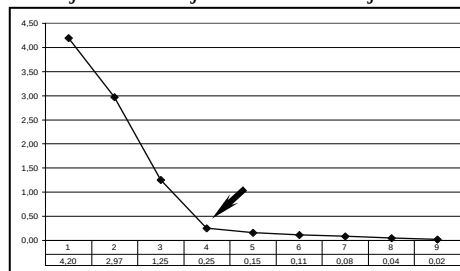
125. **rezidualna suma kvadrata** (engl. *residual sum of squares*) - suma kvadratnih odstupanja izmjerenih vrijednosti zavisne varijable y_i od prognoziranih vrijednosti y_i' .

$$r_{ss} = \sum_{i=1}^n (y_i - y')^2$$

S

126. **sampling distribucija** (engl. *sampling distribution*) - distribucija vjerojatnosti prema kojoj varira neki statistički parametar (npr. aritmetička sredina, varijanca, koeficijent korelacije...) izračunat iz velikog broja slučajnih uzoraka iste veličine. Ako iz neke populacije entiteta odaberemo sve moguće uzorke iste veličine te za svaki uzorak izračunamo parametar ϕ' , dobit ćemo neku distribuciju po kojoj će parametri ϕ' varirati. S obzirom na to da su uzorci birani slučajno, i vrijednosti parametra ϕ' slučajno će varirati, odnosno činit će slučajnu varijablu koja će imati neku od teoretskih distribucija vjerojatnosti (*Gaussova, t-distribucija, F-distribucija...*).

127. **scree test** (engl. *scree test*) - Cattellov način određivanja broja značajnih komponentata. Subjektivnom procjenom odredi se točka poslije koje se svojstvene vrijednosti smanjuju u skladu s blagim linearnim trendom pomoću grafičkog prikaza svojstvenih vrijednosti korelacijske matrice (*scree plot*).



Scree plot – grafikon svojstvenih vrijednosti korelacijske matrice

128. **sistematske pogreške** (engl. *systematic errors*) - pogreške mjerenja koje nastaju utjecajem sistematskih faktora koji izazivaju stalni porast ili pad rezultata (primjerice, učenje, umor, razvoj itd.).

129. **slučajni uzorak** (engl. *random sample*) - uzorak biran tako da svakom entitetu populacije osiguramo jednaku vjerojatnost izbora.

130. **Spearman-Brownov koeficijent pouzdanosti** (engl. *Spearman-Brown's reliability coefficient*) - koeficijent pouzdanosti koji se izračunava u okviru metode interne konzistencije pod klasičnim modelom mjerenja kad se kondenzacija (procjena pravih rezultata) izvodi metodom jednostavne sumacije (zbroyem ili aritmetičkom sredinom) standardiziranih rezultata ispitanika u česticama.

$$r_{tt} = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{m}{\mathbf{1}^T \mathbf{R} \mathbf{1}} \right)$$

gdje je m broj čestica, $\mathbf{R}$ matrica korelacija između čestica, a $\mathbf{1}$ sumacijski vektor sa m jedinica.

131. **split-half metoda** (engl. *split-half method*) - metoda za utvrđivanje pouzdanosti kod koje se kompozitni test dijeli na dva jednaka dijela, i to najčešće metodom longitudinalnog rascjepa (sve neparne čestice čine prvi dio testa, a sve parne drugi dio). Na taj se način test svodi na dvije čestice ($m=2$), pa se pouzdanost izračunava Spearman-Brownovom formulom za dvije čestice

$$r_{tt} = \frac{2r}{1+r}$$

gdje je r korelacija između prvog i drugog dijela testa.

132. **standardna pogreška mjerenja** (engl. *standard error of measurement*) - standardna devijacija pogrešaka mjerenja.

$$\sigma_e = \sigma \sqrt{(1 - r_{tt})}$$

gdje je σ standardna devijacija bruto rezultata, a r_{tt} koeficijent pouzdanosti.

133. **standardizirani regresijski koeficijent** (engl. *standardized regression coefficient*) - predstavlja prosječnu veličinu promjene zavisne varijable izraženu u dijelovima standardne devijacije za jedinični porast standardizirane vrijednosti nezavisne varijable z_j , uz uvjet da su vrijednosti preostalih nezavisnih varijabli konstantne. Budući da su standardizirani regresijski koeficijenti izračunati na standardiziranim varijablama, oni predstavljaju relativan doprinos svake nezavisne varijable prognozi zavisne varijable pa se smatraju koeficijentima utjecaja.

134. **standardna devijacija** (engl. *standard deviation*) - mjera disperzije ili varijabilnosti podataka koja se izračunava kao korijen iz varijance, odnosno, korijen iz prosječnog kvadratnog odstupanja rezultata entiteta od aritmetičke sredine

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \text{ gdje je } i = 1, \dots, n, \text{ a } n \text{ broj entiteta uzorka.}$$

135. **standardna pogreška aritmetičke sredine** (engl. *standard error of mean*) - standardna devijacija aritmetičkih sredina uzoraka, odnosno prosječno odstupanje aritmetičkih sredina uzoraka od aritmetičke sredine populacije

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

gdje je s standardna devijacija, a n broj entiteta uzorka.

136. **standardna pogreška prognoze** (engl. *standard error of estimate*) - standardna devijacija raspršenosti izmjerenih rezultata oko pravca regresije.

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i')^2}{n - (m + 1)}}$$

gdje su y_i izmjereni, a y_i' prognozirani rezultati zavisne varijable.

137. **standardna pogreška razlika** (engl. *standard error of difference*) - standardna devijacija razlika aritmetičkih sredina slučajno odabranih uzoraka.

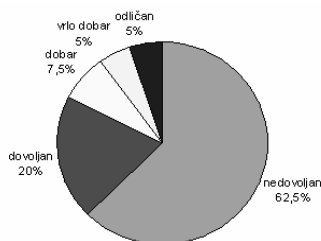
$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)}$$

gdje je s_1^2 varijanca prvog uzorka, s_2^2 varijanca drugog uzorka, n_1 broj entiteta prvog uzorka, n_2 broj entiteta drugog uzorka.

138. **statistički značajna razlika** (engl. *statistical significant difference*) - razlika između aritmetičkih sredina dvaju slučajno odabranih uzoraka koja je posljedica stvarnih razlika između populacija kojima uzorci pripadaju, a ne slučajnog variranja uzoraka. Dakle, to je razlika veća od razlike koja se može dobiti slučajnim variranjem uzoraka.

139. **stratificirani uzorak** (engl. *stratified sample*) - slučajni uzorak koji se formira tako da se populacija podijeli prema nekim važnim obilježjima (npr. spol, dob i sl.) u *stratume* (slojeve, podpopulacije) iz kojih se slučajnim odabirom biraju entiteti. Broj entiteta biranih iz svakog *stratuma* mora biti proporcionalan veličini pojedinog stratuma u populaciji.

140. **strukturni krug** (engl. *pie charts*) - grafikon koji se najčešće koristi za prikaz relativnih frekvencija.



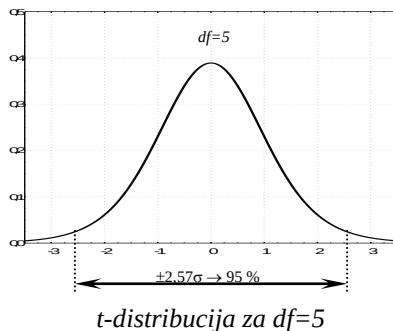
Strukturni krug

T

141. **t-distribucija** (engl. *t-distribution*) - kontinuirana teoretska distribucija. Slučajna varijabla t ima Studentovu t -distribuciju s parametrom df ako je

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{df+1}{2}\right)}{\sqrt{df\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{df}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{df}\right)^{-\frac{df+1}{2}}$$

gdje je df broj stupnjeva slobode ($df=1,2,\dots$), Γ gama funkcija, $\pi=3.14459\dots$



142. **teoretske distribucije** (engl. *distribution functions*) - matematičke funkcije koje omogućavaju utvrđivanje vjerojatnosti nekog slučajnog događaja u zadanim uvjetima. Moguće je razlikovati diskretne (uniformna distribucija, binomna distribucija, Poissonova distribucija) i kontinuirane (normalna distribucija, t -distribucija, F -distribucija, χ^2 -distribucija) teoretske distribucije.

143. **totalni raspon** (engl. *range*) - najjednostavnija mjera varijabilnosti. Utvrđuje se kao razlika između maksimalne (x_{max}) i minimalne (x_{min}) vrijednosti.

$$R_{tot} = x_{max} - x_{min}$$

144. **treći (gornji) kvartil** (engl. *upper quartiles*) - vrijednost koja uređeni niz podataka dijeli na 3/4 članova s manjom ili jednakom vrijednosti, odnosno 1/4 članova s većom ili jednakom vrijednosti.

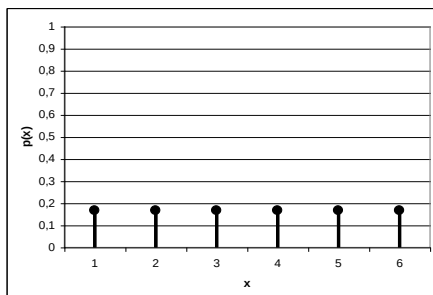
145. **t-test** (engl. *t-test*) - statistički postupak kojim se utvrđuje statistička značajnost razlike aritmetičkih sredina dvaju uzoraka (*t-test za nezavisne uzorke*), statistička značajnost razlike aritmetičkih sredina jednog uzorka mjenjenog u dvije vremenske točke (*t-test za zavisne uzorke*) te statistička značajnost razlike aritmetičke sredine nekog uzorka u odnosu na neku unaprijed poznatu aritmetičku sredinu.

U

146. **uniformna distribucija** (engl. *uniform distribution*) - diskretna teoretska distribucija Slučajna varijabla x ima uniformnu distribuciju ako je vjerojatnost bilo koje njene vrijednosti (elementarnog događaja) u skupu od n elementarnih događaja jednaka

$$p(x) = \frac{1}{n},$$

gdje je $p(x)$ vjerojatnost elementarnog događaja $x = 1, \dots, n$, n ukupan broj vrijednosti koje može imati slučajna varijabla x .



Uniformna distribucija

147. **unikvitet** (engl. *uniquety*) - dio varijance manifestne varijable koji nije moguće objasniti značajnim brojem glavnih komponenata.
148. **univarijatna analiza varijance** (engl. *analysis of variance, ANOVA*) - metoda za utvrđivanje statističke značajnosti razlika između aritmetičkih sredina dviju ili više grupa u određenoj varijabli.
149. **univarijatne metode** (engl. *univariate methods*) - statističke metode kojima se analiziraju podaci jedne varijable (*t*-test, univarijatna analiza varijance...).
150. **uzorak entiteta** (engl. *sample of entities*) - podskup entiteta izabran iz populacije u skladu s nekim pravilom, a s ciljem da je što bolje reprezentira.
151. **uzorak varijabli** (engl. *sample of variables*) - podskup varijabli izabran na temelju neke teorije iz populacije varijabli.
152. **uzorkovanje** (engl. *sampling*) - postupak kojim se iz populacije bira uzorak entiteta.

V

153. **valjanost** (engl. *validity*) - svojstvo mjernog instrumenta koja pokazuje što određeni mjerni instrument mjeri.
154. **varijabla** (engl. *variable*) - određeno obilježje (svojstvo) koje oblikom ili stupnjem varira među entitetima, odnosno po kojem entiteti mogu biti isti ili različiti.
155. **varijanca** (engl. *variance*) - mjera disperzije ili varijabilnosti koja predstavlja prosječno kvadratno odstupanje rezultata entiteta od aritmetičke sredine.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

156. **vjerojatnost** (engl. *probability*) - omjer između elementarnih događaja s povoljnim ishodom x i skupa svih elementarnih događaja n predstavlja *vjerojatnost* da će se elementarni događaj s povoljnim ishodom x dogoditi

$$p(x) = \frac{x}{n}, \text{ a } q(x) = 1 - p$$

predstavlja vjerojatnost da se elementarni događaj s povoljnim ishodom x neće dogoditi.

Z

157. **zavisna ili kriterijska varijabla** (engl. *dependent or criterion variable*) - rezultati entiteta u varijabli čije se varijacije objašnjavaju (prognoziraju) putem jedne ili više prediktorskih ili nezavisnih varijabli.
158. **z - vrijednost** (engl. *z - value*) - relativna mjera odstupanja rezultata entiteta od aritmetičke sredine, izražena u dijelovima standardne devijacije.

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j}$$

gdje je z_{ij} standardizirani rezultat entiteta i u varijabli j , x_{ij} originalna vrijednost, ispitanika i u varijabli j , $\bar{x}_j$ aritmetička sredina varijable j , σ_j standardna devijacija varijable j .

O autoru



Dražan Dizdar rođen je 27. 04. 1967. godine u Drnišu, oženjen, otac troje djece, Hrvat, državljanin Republike Hrvatske. Osnovnu školu završio je u Oklaju, a srednju u Tehničkom školskom centru u Zadru. Fakultet za fizičku kulturu u Zagrebu upisao je 1989. godine, a diplomirao 1994. godine radom: *Kompjutorski program za definiranje kinezioloških operatora za poboljšanje funkcionalnih sposobnosti i redukciju potkožnog masnog tkiva*. Iste godine uposlen je na Fakultetu za fizičku kulturu Sveučilišta u Zagrebu kao mlađi asistent na predmetu Kvantitativne metode te je upisao poslijediplomski studij za znanstveno usavršavanje u području kineziologije. Magistarski rad pod naslovom: *Vrednovanje jednog metodološkog postupka za prognoziranje rezultata u nekim sportovima* obranio je 1997. godine te stekao zvanje asistenta na predmetu Kvantitativne metode. Godine 2002. obranio je doktorsku disertaciju pod naslovom: *Vrednovanje skupa metoda za procjenu stvarne kvalitete košarkaša* na Kineziološkom fakultetu u Zagrebu te stekao zvanje višeg asistenta na predmetu Kvantitativne metode. Dana 2. 12. 2003. godine izabran je u znanstveno-nastavno zvanje docenta, a 15.03.2007. godine u znanstveno zvanje višeg znanstvenog suradnika za područje društvenih znanosti – polje odgojnih znanosti, te 18. 05. 2007. godine u zvanje izvrednog profesora za područje društvenih znanosti, polje odgojnih znanosti, grana kineziologija, predmet Kvantitativne metode na Kineziološkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Dana 10. 10.2011. godine izabran je znanstveno zvanje znanstvenog savjetnika u znanstvenom području društvenih znanosti - polje kineziologija. Aktivno sudjeluje u realizaciji znanstvenih projekata (kao voditelj i suradnik) financiranih od Ministarstvo znanosti i tehnologije Republike Hrvatske, odnosno Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa. Do sada je objavio 42 znanstvena i 5 stručnih radova. Autor je 1 sveučilišnog udžbenika te koautor 3 priručnika i 3 knjige. Radovi pristupnika do sada su citirani 193 puta (H index = 7) prema SCOPUS-u. Od 1994. aktivno sudjeluje u nastavi sveučilišnog studija na Kineziološkom fakultetu u Zagrebu na predmetu Kvantitativne metode, doktorskog studija na predmetima Metode analize podataka i Kineziometrija te stručnog studija na predmetu Osnove statistike i kineziometrije.