MATRIČNA ALGEBRA 2

Vježba 10

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Trag matrice je zbroj elemenata glavne dijagonale matrice.

Primjer: Trag matrice **A**

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$\text{trag}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$\text{trag}(\mathbf{A}) = 2 + 4 + 3 = 9$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Duljina ili norma vektora dobije se operacijom

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{a}_2^2 + \mathrm{a}_3^2 + \ldots + \mathrm{a}_\mathrm{n}^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{a}_\mathrm{i}^2\right)^{1/2}$$

odnosno

$$|\mathbf{a}| = (\mathbf{a}^\mathrm{T}\mathbf{a})^{1/2}$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Vektor čija je duljina jednaka 1 naziva se **normirani vektor**. Normirani vektor (**â**) se izračunava postupkom **normiranja**, odnosno dijeljenjem vektora sa svojom duljinom:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

odnosno

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a})^{-1/2}$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Primjer: Normiranje vektora **a**

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| &= \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{4 + 16 + 9 + 1 + 25} \\ &= \sqrt{55} \\ &= 7{,}42 \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{7{,}42} = \begin{vmatrix} 0{,}27 \\ 0{,}54 \\ 0{,}4 \\ 0{,}13 \\ 0{,}67 \end{vmatrix}$$

$$|\hat{\mathbf{a}}| = \sqrt{0{,}27^2 + 0{,}54^2 + 0{,}4^2 + 0{,}13^2 + 0{,}67^2} = \sqrt{1} = 1$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Udaljenost između dvaju vektora istog reda izračunava se kao norma razlike dvaju vektora, a naziva se **euklidska udaljenost.**

$$\mathbf{d} = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = [(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T(\mathbf{a} - \mathbf{b})]^{1/2}$$

odnosno

$$\mathbf{d} = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2\right)^{1/2}$$

Matrična algebra 2

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Primjer: Euklidska udaljenost između vektora **a** i **b**

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad (\mathbf{a} - \mathbf{b})^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{d} = [(\mathbf{a} - \mathbf{b})^{\mathrm{T}}(\mathbf{a} - \mathbf{b})]^{\frac{1}{2}} = \left[\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Kosinus kuta između dvaju vektora istog reda izračunava se kao omjer skalarnog produkta dvaju vektora i umnoška njihovih normi.

$$\cos\alpha = \left(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\right)\left(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\right)^{-1/2}\left(\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\right)^{-1/2}$$

odnosno

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Primjer: Kosinus kuta između vektora **a** i **b**

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29} = 5{,}39$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{50} = 7{,}07$$

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) + (4 \cdot 5) + (3 \cdot 3) = 37$$

$$\cos\alpha = \frac{37}{5{,}39 \cdot 7{,}07} = \frac{37}{38{,}11} = 0{,}97$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Ako se rezultati u varijablama centriraju

$$a_{ci} = a_i - \bar{a}$$
$$b_{ci} = b_i - \bar{b}$$

tada je kosinus kuta α jednak

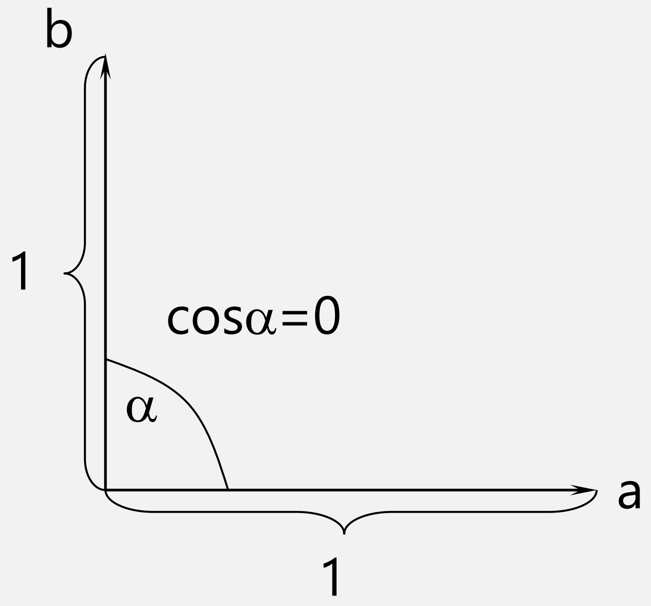
$$\cos\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ci} b_{ci}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ci}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_{ci}^2}}$$

što je formula za izračunavanje koeficijenta korelacije, pa je

$$r_{ab} = \cos\alpha_{ab}$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

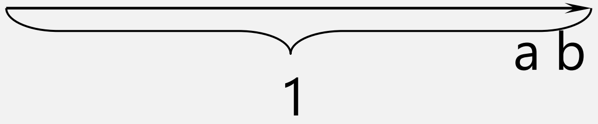
Ako je korelacija između varijabli jednaka nuli (r_{xy}=0), onda su dva centrirana vektora pod kutem od 90°.



RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

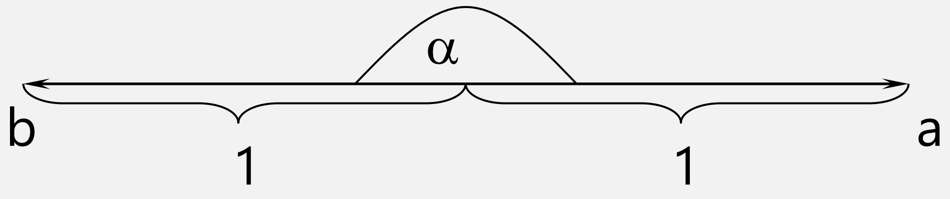
Ako je korelacija između varijabli potpuna pozitivna (r_{xy}=1), onda je kut između dvaju centriranih vektora 0°.

$\cos\alpha = 1$



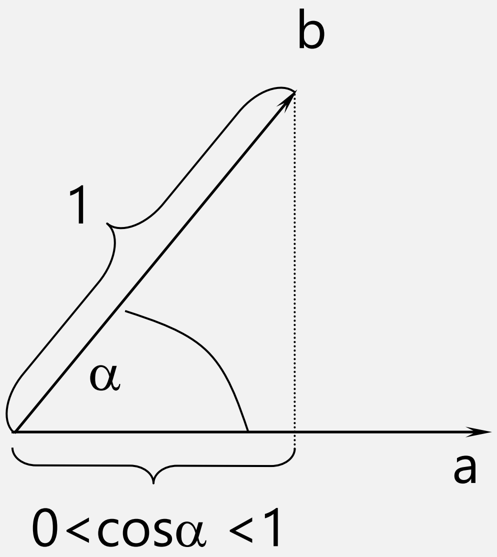
Ako je korelacija između varijabli potpuna negativna (r_{xy}=-1), onda je kut između dvaju centriranih vektora 180°

$\cos\alpha = -1$



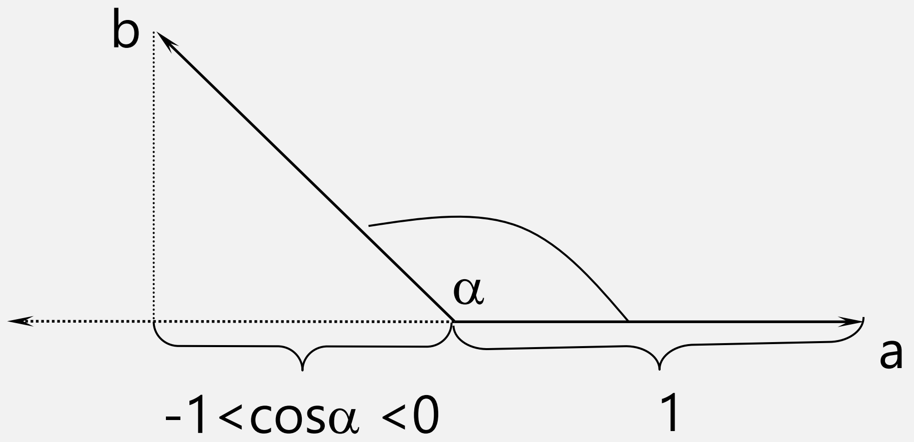
RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Ako je korelacija nepotpuna pozitivna ($0<r_{xy}<1$), onda je kut između dvaju centriranih vektora veći od 0°, a manji od 90°.



RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Ako je korelacija nepotpuna negativna ($-1<r_{xy}<0$), onda je kut između dvaju centriranih vektora veći od 90°, a manji od 180°.



RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Linearna kombinacija vektora je vektor koji je nastao zbrajanjem drugih vektora ponderiranih pripadajućim skalarima.

Ako su $\mathbf{a}_j$ (j=1,…,m) vektori istog reda, a β_j pripadajući skalari onda je vektor **b** linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_j$

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{a}_j = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \beta_m \mathbf{a}_m$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Jednostavna linearna kombinacija je vektor nastao zbrajanjem drugih vektora istog reda ponderiranih jednakim skalarima (**ponderima**).

Diferencijalno ponderirana linearna kombinacija je vektor nastao zbrajanjem drugih vektora istog reda ponderiranih različitim skalarima.

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Ako su **a**, **b** i **c** vektori istog reda, a α, β i γ skalari, novi vektor **d** nastao je linearnom kombinacijom vektora **a**, **b** i **c** ponderiranih skalarima α, β i γ.

$$\mathbf{d} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n + \gamma \cdot c_n \end{vmatrix}$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Za neki redak ili stupac matrice kažemo da je **linearno zavisan** ako se može izraziti kao linearna kombinacija drugih redaka ili stupaca te matrice.

Rang matrice jednak je minimalnom broju redaka ili stupaca u matrici čijom se linearnom kombinacijom mogu izraziti svi ostali redci ili stupci te matrice.

Primjer: Rang matrice **A** je 2 jer se, primjerice, prvi stupac može izračunati kao linearna kombinacija elemenata drugog i trećeg stupca.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} + a_{13} = 3 + 1 = 4 \\ a_{21} &= a_{22} + a_{23} = 0 + 3 = 3 \\ a_{31} &= a_{32} + a_{33} = 4 + 5 = 9 \end{aligned}$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Inverz matrice u matričnoj algebri odgovara recipročnoj vrijednosti broja (skalara) u skalarnoj algebri. Matrica $\mathbf{A}^{-1}$ je inverz matrice **A** ako je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Inverz matrice moguće je izračunati samo ako je matrica kvadratna i punog ranga.

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Inverz matrice može se koristiti za **rješavanje sustava linearnih jednadžbi u matričnom obliku** na sljedeći način:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad / \, \mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{y}$$

gdje je

- **A** kvadratna matrica reda *n* x *n* poznatih vrijednosti
- **x** vektor stupca reda n x 1 nepoznatih vrijednosti
- **y** vektor stupca reda n x 1 poznatih vrijednosti