MATRIČNA ALGEBRA 1

Vježba 9

Matrična algebra 1

Matrična algebra je dio matematike koji se bavi računskim operacijama s matricama.

Matrica predstavlja skup brojeva smještenih u *n* redaka i *m* stupaca.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Oznaka matrice

Element a_{1m} nalazi se u retku 1 i stupcu m

Matrice se označavaju velikim masno otisnutim (bold) slovima (**A, B, C...**), a elementi matrice s malim slovima i indeksima (a_{11}, a_{12},...).

Matrična algebra 1

Matrica koja ima više redaka i jedan stupac naziva se **vektor stupca** ili samo **vektor**, dok se matrica s više stupaca i jednim retkom naziva **vektor retka** ili **transponirani vektor**.

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ a_n \end{vmatrix} \qquad \mathbf{a}^T = \begin{vmatrix} a_1 & . & . & a_n \end{vmatrix}$$

Vektori se označavaju malim masno otisnutim (bold) slovima (**a, b, c,...**), a transponirani vektori tako da se oznaci vektora doda eksponent ^{T} (**a^T, b^T, c^T,...**).

VRSTE MATRICA

Matrica s jednakim brojem redaka i stupaca naziva se **kvadratna matrica**.

Primjer: Kvadratna matrica **A**

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

VRSTE MATRICA

Matricu koja je dobivena iz neke matrice A zamjenom stupaca redcima, a redaka stupcima naziva se **transponirana matrica** i označava se s $\mathbf{A^T}$. Opisani postupak zove se **transponiranje matrice.**

Primjer: Matrica $\mathbf{A^T}$ je dobivena transponiranjem matrice **A**

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A^T} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

VRSTE MATRICA

Ako je matrica **A** jednaka transponiranoj matrici $\mathbf{A}^T$ naziva se **simetrična matrica**.

Primjer: Simetrične matrice **A** i $\mathbf{A}^T$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

VRSTE MATRICA

Matrica koja u dijagonali ima elemente različite od nule, dok su svi ostali elementi jednaki nuli, naziva se **dijagonalna matrica**.

Primjer: Dijagonalna matrica D

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

VRSTE MATRICA

Skalarna matrica je poseban slučaj dijagonalne matrice kod koje su dijagonalni elementi jednaki.

Primjer: Skalarna matrica **S**

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

VRSTE MATRICA

Poseban slučaj skalarne matrice u kojoj su dijagonalni elementi jednaki jedinici naziva se **matrica identiteta**.

Primjer: Matrica identiteta **I**

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Zbrajanje i oduzimanje matrica može se provoditi uz uvjet da matrice imaju jednak broj redaka i stupaca. Operacija se vrši tako da zbrojimo, odnosno oduzmemo odgovarajuće elemente matrica.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}=\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & . & . & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & . & . & a_{2m}+b_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & . & . & a_{nm}+b_{nm} \end{vmatrix}$$

Matrična algebra 1

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Primjer: Zbrajanje matrica **A** i **B**

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 4 \\ 8 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Množenje matrica provodi se tako da se zbrajaju produkti elemenata redaka prve matrice i odgovarajućih elemenata stupaca druge matrice uz uvjet da je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = c_{11} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = c_{12} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = c_{13} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = c_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = c_{22} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = c_{23} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = c_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = c_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} = c_{33} \end{vmatrix}$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Primjer: Množenje matrica **A** i **B**

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 3 + 1\cdot 4 = 15 & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 7 = 13 & 1\cdot 3 + 3\cdot 3 + 1\cdot 1 = 13 & 1\cdot 4 + 3\cdot 6 + 1\cdot 0 = 22 \\ 4\cdot 2 + 1\cdot 3 + 4\cdot 4 = 27 & 4\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 7 = 34 & 4\cdot 3 + 1\cdot 3 + 4\cdot 1 = 19 & 4\cdot 4 + 1\cdot 6 + 4\cdot 0 = 22 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 15 & 13 & 13 & 22 \\ 27 & 34 & 19 & 22 \end{vmatrix}$$

Matrična algebra 1

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Množenjem nekog vektorom **a** (vektor stupca) s nekim transponiranim vektorom $\mathbf{b}^\mathrm{T}$ (vektor retka) uvijek se dobije matrica.

Primjer: Množenje vektora **a** i $\mathbf{b}^\mathrm{T}$

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b}^\mathrm{T} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\mathrm{T} = \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 12 \\ 2 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Množenjem nekog transponiranog vektora a^T (vektor retka) s nekim vektorom b (vektor stupca) uvijek se dobije skalar.

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Primjer: Množenje vektora $\mathbf{a}^T$ i $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a}^T = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = -3$$

RAČUNSKE OPERACIJE S MATRICAMA

Množenje matrice skalarom vrši se tako da se svaki element matrice pomnoži skalarom.

$$\varphi \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varphi \cdot a_{11} & \cdots & \varphi \cdot a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi \cdot a_{n1} & \cdots & \varphi \cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

Primjer: Množenje matrice **A** skalarom 3

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad 3 \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 6 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 15 & 6 & 18 \\ 3 & 9 & 9 \\ 18 & 15 & 15 \end{vmatrix}$$