MATRIČNA ALGEBRA I.

Matrična algebra je dio matematike koji se bavi računskim operacijama s *matricama*.

Matrica predstavlja skup brojeva smještenih u *n* redaka i *m* stupaca.

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Oznaka matrice

Element a_{1m} nalazi se u retku *1* i stupcu *m*

Matrice se označavaju velikim masno otisnutim (*bold*) slovima (***A***, ***B***, ***C***…), a elementi matrice s malim slovima i indeksima ($a_{11}, a_{12},\ldots$).

MATRIČNA ALGEBRA I.

Matrica koja ima više redaka i jedan stupac naziva se ***vektor stupca*** ili samo ***vektor***, dok se matrica s više stupaca i jednim retkom naziva ***vektor retka*** ili ***transponirani vektor***.

$$\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ a_n \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{a}^T = \begin{vmatrix} a_1 & . & . & a_n \end{vmatrix}$$

Vektori se označavaju malim masno otisnutim (*bold*) slovima ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,…), a transponirani vektori tako da se oznaci vektora doda eksponent ^{T} ($\boldsymbol{a}^T$, $\boldsymbol{b}^T$, $\boldsymbol{c}^T$,…).

MATRIČNA ALGEBRA I.

A =

90	3	23	68	4	78
32	15	11	33	80	1256
111	122	23	21	932	987
465	32	73	23	323	223
333	4	3	62	1145	21
89	112	19	89	12	56
76	2	6	35	45	44
54	55	17	12	332	33
87	7	18	44	48	78

d^T =

2	3	4	2

Zadaci - Kolika je vrijednost elementa matrice ***A*** čiji je položaj određen indeksom $_{35}$? Koliko varijabli sadrži matrica ***A*** ? Koliko redaka ima vektor d^T ?

MICROSOFT EXCEL

Zadatak - Pet sportaša (s1-s5) je izmjereno s tri motorička testa (var1-var3) i dobiveni su sljedeći rezultati:

	s1	s2	s3	s4	s5
var1	12	11	11	13	15
var2	18	17	18	18	16
var3	3,4	2,4	3,3	5,1	4,8

U programu Microsoft Excel kreirajte matricu s navedenim rezultatima i pohranite je pod nazivom *MA.xls* !

STATISTICA 7

Importiranje *.xls matrice

Importiranje matrice kreirane u programu Microsoft Excel vrši se odabirom opcije *Open*... padajućeg izbornika *File*. U izborniku *Files of type* dijaloškog okvira za odabir datoteke potrebno je odabrati opciju *Excel Files (*.xls)* te u direktorijskoj strukturi odabrati traženu datoteku.

Zadatak - Prethodno kreiranu matricu *MA.xls* importirajte u program STATISTICA 7! Iskoristite opcije *Get case names from first column* i *Get variable names from first row*!

MATRIČNA ALGEBRA I.

Vrste matrica

Matrica s jednakim brojem redaka i stupaca naziva se ***kvadratna matrica***.

Primjer: Kvadratna matrica ***A***

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Vrste matrica

Matricu koja je dobivena iz neke matrice $\boldsymbol{A}$ zamjenom stupaca redcima, a redaka stupcima naziva se ***transponirana matrica*** i označava se s $\boldsymbol{A}^T$. Opisani postupak zove se transponiranje matrice.

Primjer: Matrica $\boldsymbol{A}^T$ je dobivena transponiranjem matrice $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Vrste matrica

Ako je matrica $\boldsymbol{A}$ jednaka transponiranoj matrici $\boldsymbol{A}^T$ naziva se ***simetrična matrica***.

Primjer: Simetrične matrice $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A}^T$

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Vrste matrica

Matrica koja u dijagonali ima elemente različite od nule, dok su svi ostali elementi jednaki nuli, naziva se ***dijagonalna matrica***.

Primjer: Dijagonalna matrica ***D***

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Vrste matrica

Skalarna matrica je poseban slučaj dijagonalne matrice kod koje su dijagonalni elementi jednaki.

Primjer: Skalarna matrica $\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Vrste matrica

Poseban slučaj skalarne matrice u kojoj su dijagonalni elementi jednaki jedinici naziva se ***matrica identiteta***.

Primjer: Matrica identiteta ***I***

$$\boldsymbol{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Vrste matrica

A =

11	17	15	22
13	1	3	3
4	24	12	19

X =

1	0,45		0,78
0,45	1	0,22	0,34
0,07		1	
		0,98	1

Zadaci - Transponirajte matricu ***A***! U simetričnu matricu ***X*** upišite vrijednosti koje nedostaju!

MICROSOFT EXCEL

Transponiranje matrice

Prije transponiranja potrebno je označiti cijelu matricu ili dio matrice koji se želi transponirati te je pohraniti u radnu memoriju odabirom opcije *Copy* padajućeg izbornika *Edit*. Transponiranje se vrši slijedom postupaka: padajući izbornik *Edit* → *Paste Special...* → *Transpose* .

Zadatak - Transponirajte prethodno kreiranu matricu *MA.xls* !

STATISTICA 7

Transponiranje matrice

Transponiranje matrice vrši se odabirom opcija *Transpose* → *File* padajućeg izbornika *Data*. Opcija *Transpose* → *Block* padajućeg izbornika *Data* može se iskoristiti u svrhu transponiranja određenog dijela matrice pri čemu je željeni dio matrice prethodno potrebno označiti.

Zadatak - Transponirajte prethodno kreiranu matricu *MA.sta* !

MATRIČNA ALGEBRA I.

Računske operacije s matricama

Zbrajanje i oduzimanje matrica može se provoditi uz uvjet da matrice imaju jednak broj redaka i stupaca. Operacija se vrši tako da zbrojimo, odnosno oduzmemo odgovarajuće elemente matrica.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & . & . & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & . & . & a_{2m}+b_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & . & . & a_{nm}+b_{nm} \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Računske operacije s matricama

Primjer: Zbrajanje matrica ***A*** i ***B***

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \boxed{2} & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \boxed{3} & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 4 \\ 8 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Računske operacije s matricama

Množenje matrica provodi se tako da se zbrajaju produkti elemenata redaka prve matrice i odgovarajućih elemenata stupaca druge matrice uz uvjet da je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice.

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \\ a_{31} \quad a_{32} \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = c_{11}} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = c_{12} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = c_{13} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = c_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = c_{22} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = c_{23} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = c_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = c_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} = c_{33} \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Računske operacije s matricama

Primjer: Množenje matrica ***A*** i ***B***

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 1} \\ 4 \quad 1 \quad 4 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boxed{1\cdot 2+3\cdot 3+1\cdot 4=15} & 1\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 7=13 & 1\cdot 3+3\cdot 3+1\cdot 1=13 & 1\cdot 4+3\cdot 6+1\cdot 0=22 \\ 4\cdot 2+1\cdot 3+4\cdot 4=27 & 4\cdot 1+1\cdot 2+4\cdot 7=34 & 4\cdot 3+1\cdot 3+4\cdot 1=19 & 4\cdot 4+1\cdot 6+4\cdot 0=22 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boxed{15} & 13 & 13 & 22 \\ 27 & 34 & 19 & 22 \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Računske operacije s matricama

Množenjem nekog vektorom ***a*** (vektor stupca) s nekim transponiranim vektorom $\boldsymbol{b}^T$ (vektor retka) uvijek se dobije matrica.

Primjer: Množenje vektora ***a*** *i* $\boldsymbol{b}^T$

$$\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{b}^T = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^T = \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 12 \\ 2 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Računske operacije s matricama

Množenjem nekog transponiranog vektora $\boldsymbol{a}^T$ (vektor retka) s nekim vektorom $\boldsymbol{b}$ (vektor stupca) uvijek se dobije skalar.

$$\boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Primjer: Množenje vektora $\boldsymbol{a}^T$ *i* $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a}^T = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{b} = -3$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Računske operacije s matricama

Množenje matrice skalarom vrši se tako da se svaki element matrice pomnoži skalarom.

$$\varphi \cdot \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \varphi a_{11} & \varphi a_{12} & . & . & \varphi a_{1m} \\ \varphi a_{21} & \varphi a_{22} & . & . & \varphi a_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \varphi a_{1n} & \varphi a_{2n} & . & . & \varphi a_{nm} \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Računske operacije s matricama

Primjer: Množenje matrice ***A*** skalarom *3*

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{vmatrix} \qquad 3\cdot\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 5 & 3\cdot 2 & 3\cdot 6 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 6 & 3\cdot 5 & 3\cdot 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 15 & 6 & 18 \\ 3 & 9 & 9 \\ 18 & 15 & 15 \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA I.

Računske operacije s matricama

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Zadaci - Izračunajte $A - B$, $A \cdot C$, $b^T \cdot a$, $a \cdot b^T$ i $A \cdot 3$!

MICROSOFT EXCEL

Računske operacije s vektorima

Različite računske operacije s vektorima moguće je provesti upisom formula za izračunavanje vrijednosti označenog polja u traku *fx* (npr. *=A2+C2+F2*) te kopiranjem unesene formule na preostale retke vektora pomoću hvataljke ili opcije *Copy* i *Paste*. Opisani postupak se često koristi za promjenu predznaka standardiziranih rezultata entiteta u obrnuto skaliranim varijablama.

Zadatak - U datoteci *KOSARKA.xls* zbrojite varijable *SUT_2_US* , *SUT_3_US* i *SL_BA_US* unosom formule u traku *fx*!

STATISTICA 7

Računske operacije s vektorima

Različite računske operacije s vektorima moguće je provesti upisom *Spreadsheet formule* (npr. *=v1+v3+v6*) u traku *Long name* dijaloškog okvira za formatiranje varijabli. *Spreadsheet formula* koja se često koristi za promjenu predznaka standardiziranih rezultata entiteta u obrnuto skaliranoj varijabli glasi: *=vcur*(-1)*.

Zadatak - U datoteci *KOSARKA.sta* zbrojite varijable *SUT_2_US* , *SUT_3_US* i *SL_BA_US* pomoću *Spreadsheet formule*!

MATRIČNA ALGEBRA I.

Literatura za pripremanje kolokvija

- Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 11-19.
- Langer, M. (2004). Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows. Zagreb: Miš, str. 31-35, 44-46.