MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Trag matrice je zbroj elemenata glavne dijagonale matrice.

Primjer: Trag matrice ***A***

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$trag(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad trag(A) = 2 + 4 + 3 = 9$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

C =

1	3	1	4	6
2	2	4	13	12
3	1	3	2	1
2	12	1	13	11
1	1	3	4	1

Zadaci - Izračunajte *trag(C)*! Koliki je *trag(A)* ako je ***A*** matrica identiteta s 5 redaka?

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Duljina ili norma vektora dobije se operacijom

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2}$$

odnosno

$$|a| = (\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{a})^{1/2}$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Vektor čija je duljina jednaka *1* naziva se ***normirani vektor***. Normirani vektor ($\hat{\boldsymbol{a}}$) se izračunava postupkom ***normiranja***, odnosno dijeljenjem vektora sa svojom duljinom:

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{|a|}$$

odnosno

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a})^{-1/2}$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Primjer: Normiranje vektora ***a***

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{4 + 16 + 9 + 1 + 25} \\ &= \sqrt{55} \\ &= 7{,}42 \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{7{,}42} = \begin{vmatrix} 0{,}27 \\ 0{,}54 \\ 0{,}4 \\ 0{,}13 \\ 0{,}67 \end{vmatrix}$$

$$|\hat{a}| = \sqrt{0{,}27^2 + 0{,}54^2 + 0{,}4^2 + 0{,}13^2 + 0{,}67^2} = \sqrt{1} = 1$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Udaljenost između dvaju vektora istog reda izračunava se kao norma razlike dvaju vektora, a naziva se ***euklidska udaljenost.***

$$d = |a - b| = \left[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^T (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \right]^{1/2}$$

odnosno

$$d = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 \right)^{1/2}$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Primjer: Euklidska udaljenost između vektora ***a*** i ***b***

$$\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^T = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d = \left[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^T (a - \boldsymbol{b})\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Kosinus kuta između dvaju vektora istog reda izračunava se kao omjer skalarnog produkta dvaju vektora i umnoška njihovih normi.

$$cos\alpha = \left(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}\right)\left(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}\right)^{-1/2}\left(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}\right)^{-1/2}$$

odnosno

$$cos\alpha = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{|a||b|}$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Primjer: Kosinus kuta između vektora ***a*** i ***b***

$$\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$|a| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29} = 5,39$$

$$|b| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{50} = 7,07$$

$$\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) + (4 \cdot 5) + (3 \cdot 3) = 37$$

$$cos\alpha = \frac{37}{5,39 \cdot 7,07} = \frac{37}{38,11} = 0,97$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zadaci - Kolika je norma vektora ***a***? Normirajte vektor ***a***! Kolika je udaljenost između vektora ***a*** i vektora ***b***?

MATRIČNA ALGEBRA II.

Korelacija kao kosinus kuta između dvaju vektora

Ako se rezultati u varijablama centriraju

$$a_{ci} = a_i - \bar{a}$$
$$b_{ci} = b_i - \bar{b}$$

tada je kosinus kuta α jednak

$$\cos\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ci} b_{ci}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ci}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_{ci}^2}}$$

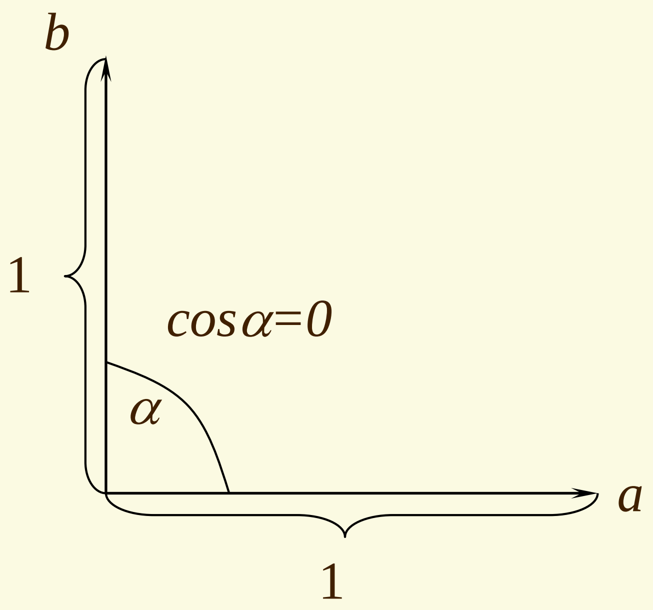
što je formula za izračunavanje koeficijenta korelacije, pa je

$$r_{ab} = \cos \alpha_{ab}$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Korelacija kao kosinus kuta između dvaju vektora

Ako je korelacija između varijabli jednaka nuli ($r_{xy}=0$), onda su dva centrirana vektora pod kutem od 90°.

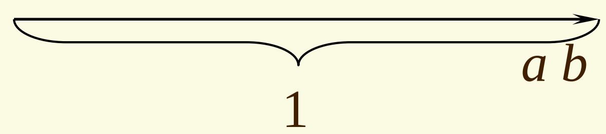


MATRIČNA ALGEBRA II.

Korelacija kao kosinus kuta između dvaju vektora

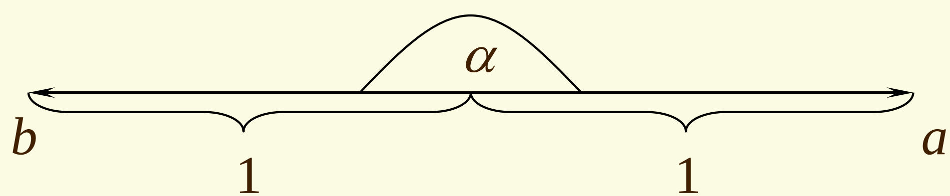
Ako je korelacija između varijabli potpuna pozitivna ($r_{xy}=1$), onda je kut između dvaju centriranih vektora 0°.

$cos\alpha = 1$



Ako je korelacija između varijabli potpuna negativna ($r_{xy}=-1$), onda je kut između dvaju centriranih vektora 180°

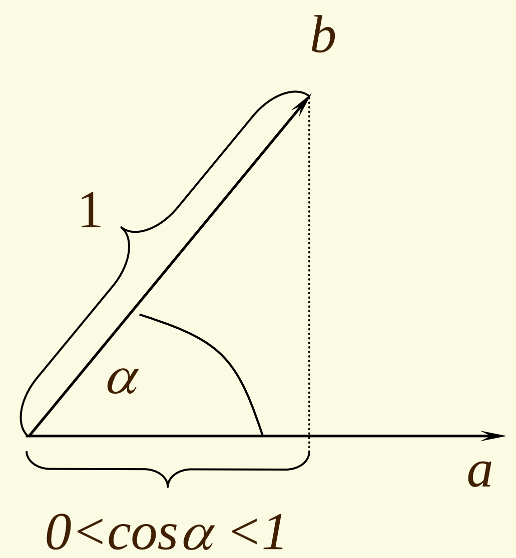
$cos\alpha = -1$



MATRIČNA ALGEBRA II.

Korelacija kao kosinus kuta između dvaju vektora

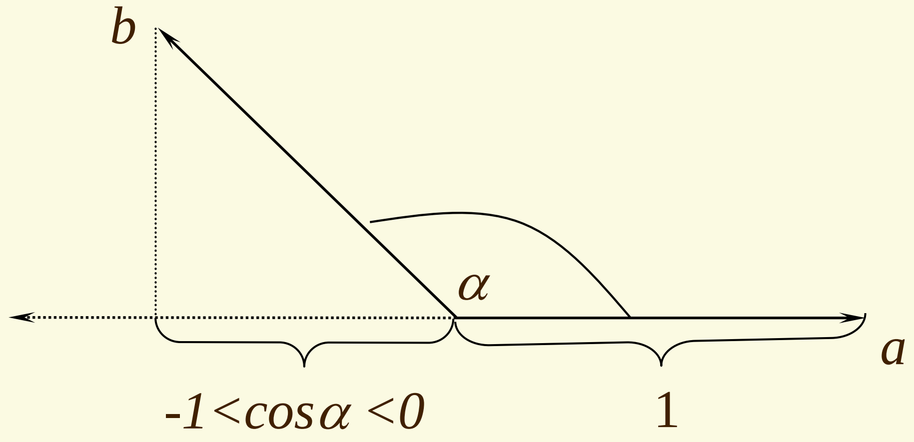
Ako je korelacija nepotpuna pozitivna ($0<r_{xy}<1$), onda je kut između dvaju centriranih vektora veći od 0°, a manji od 90º.



MATRIČNA ALGEBRA II.

Korelacija kao kosinus kuta između dvaju vektora

Ako je korelacija nepotpuna negativna ($-1<r_{xy}<0$), onda je kut između dvaju centriranih vektora veći od 90°, a manji od 180º.



MICROSOFT EXCEL

Izračunavanje kosinusa kuta između dvaju centriranih vektora

Izračunavanje kosinusa kuta između dvaju centriranih vektora jednako je izračunavanju Pearsonovog koeficijenta korelacije, a vrši se pomoću funkcije *Pearson*. Putem traka *Array1* i *Array2* potrebno je definirati niz podataka prve, odnosno druge varijable/vektora.

Zadatak - U datoteci *Judo.xls* izračunaj koliki je kosinus kuta između standardiziranih vektora *SDM* i *BML* !

MICROSOFT EXCEL

Izračunavanje kuta iz kosinusa kuta

Izračunavanje kuta iz kosinusa kuta vrši se pomoću funkcije *Acos*. Izračunatu vrijednost u radijanima moguće je pretvoriti u stupnjeve pomoću funkcije *Degrees*.

Zadatak - U datoteci *Judo.xls* izračunaj koliki je kut između standardiziranih vektora *SDM* i *BML* !

STATISTICA 7

Izračunavanje kosinusa kuta između dvaju centriranih vektora

Izračunavanje kosinusa kuta između dvaju centriranih vektora jednako je izračunavanju Pearsonovog koeficijenta korelacije, a izvodi se slijedom koraka: padajući izbornik *Statistics* → *Basic Statistics/Tables* → *Correlation matrices*. U dijaloškom okviru koji se pokreće odabirom opcije *One variable list* potrebno je označiti varijable/vektore između kojih se želi izračunati kosinus kuta, odnosno Pearsonov koeficijent korelacije.

Zadatak - U datoteci *Judo.sta* izračunaj koliki je kosinus kuta između standardiziranih vektora *SDM* i *BML* !

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Linearna kombinacija vektora je vektor koji je nastao zbrajanjem drugih vektora ponderiranih pripadajućim skalarima.

Ako su $\boldsymbol{a}_j$ ($j=1,\ldots,m$) vektori istog reda, a β_j pripadajući skalari onda je vektor $\boldsymbol{b}$ linearna kombinacija vektora $\boldsymbol{a}_j$

$$\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{a}_j = \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_m \boldsymbol{a}_m$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Jednostavna linearna kombinacija je vektor nastao zbrajanjem drugih vektora istog reda ponderiranih jednakim skalarima (***ponderima***).

Diferencijalno ponderirana linearna kombinacija je vektor nastao zbrajanjem drugih vektora istog reda ponderiranih različitim skalarima.

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Ako su ***a***, ***b*** i ***c*** vektori istog reda, a α, β i γ skalari, novi vektor ***d*** nastao je linearnom kombinacijom vektora ***a***, ***b*** i ***c*** ponderiranih skalarima α, β i γ.

$$\boldsymbol{d} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n + \gamma \cdot c_n \end{vmatrix}$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Za neki redak ili stupac matrice kažemo da je ***linearno zavisan*** ako se može izraziti kao linearna kombinacija drugih redaka ili stupaca te matrice.

Rang matrice jednak je minimalnom broju redaka ili stupaca u matrici čijom se linearnom kombinacijom mogu izraziti svi ostali redci ili stupci te matrice.

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Primjer: Rang matrice ***A*** je *2* jer se, primjerice, prvi stupac može izračunati kao linearna kombinacija elemenata drugog i trećeg stupca.

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 13 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$a_{11} = 2 \cdot a_{12} + a_{13} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$
$$a_{21} = 2 \cdot a_{22} + a_{23} = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$
$$a_{31} = 2 \cdot a_{32} + a_{33} = 2 \cdot 4 + 5 = 13$$

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Zadaci - Izračunajte jednostavnu linearnu kombinaciju vektora ***a***, ***b*** i ***c***! Izračunajte 2***a*** + 3***b*** + ***c*** ! Kojeg je ranga matrica ***A***?

MICROSOFT EXCEL

Linearno kombiniranje vektora

Linearno kombiniranje vektora moguće je provesti upisom formula za izračunavanje vrijednosti označenog polja u traku *fx* (npr. *=2*A2+3*C2+F2*) te kopiranjem unesene formule na preostale retke vektora pomoću hvataljke ili opcije *Copy* i *Paste*.

Zadatak - U datoteci *KOSARKA.sta* izračunajte linearnu kombinaciju vektora *SUT_2_US* , *SUT_3_US* i *SL_BA_US* tako da vektor *SUT_2_US* ponderirate s *2*, vektor *SUT_3_US* s *3*, a vektor *SL_BA_US s 1* !

STATISTICA 7

Linearno kombiniranje vektora

Linearno kombiniranje vektora moguće je provesti upisom *Spreadsheet formule* (npr. *=2v1+3v3+v6*) u traku *Long name* dijaloškog okvira za formatiranje varijabli.

Zadatak - U datoteci *KOSARKA.xls* izračunajte linearnu kombinaciju vektora *SUT_2_US* , *SUT_3_US* i *SL_BA_US* tako da vektor *SUT_2_US* ponderirate s *2*, vektor *SUT_3_US* s *3*, a vektor *SL_BA_US s 1* !

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Inverz matrice u matričnoj algebri odgovara recipročnoj vrijednosti broja (skalara) u skalarnoj algebri. Matrica $\boldsymbol{A}^{-1}$ je inverz matrice $\boldsymbol{A}$ ako je

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

Inverz matrice moguće je izračunati samo ako je matrica kvadratna i punog ranga.

MATRIČNA ALGEBRA II.

Računske operacije s matricama

Inverz matrice može se koristiti za ***rješavanje sustava linearnih jednadžbi u matričnom obliku*** na sljedeći način:

$$\boldsymbol{A\,x = y} \quad \big/ \boldsymbol{A^{-1}}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} A\,x = A^{-1} y}$$

$$\boldsymbol{x = A^{-1} y}$$

gdje je

- ***A*** kvadratna matrica reda *n* x *n* poznatih vrijednosti
- ***x*** vektor stupca reda *n* x *1* nepoznatih vrijednosti
- ***y*** vektor stupca reda *n* x *1* poznatih vrijednosti

MATRIČNA ALGEBRA II.

Literatura za pripremanje kolokvija

- Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Zagreb: Kineziološki fakultet, str. 20-24, 27-30, 32-34.
- Langer, M. (2004). Brzi vizualni vodič Microsoft Excel 2003 za Windows. Zagreb: Miš, str. 31-35, 44-46, 75-103.